***Рисунок 3 – Пример дизайна интерьера в 3Ds Max***

**Список цитированных источников**

1. Тозик, В.Т. Самоучитель SketchUp / В.Т. Тозик, О.Б. Ушакова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2013. – 192 с.
2. Горелик, А.Г. Самоучитель 3ds Max 2018 / А.Г. Горелик. – СПб.: БХВ-Петербург, 2018. – 528 с.
3. Нойферт, П. Проектирование и строительство. Дом, квартира, сад: Перевод с нем. – Третье изд., переработанное и дополненное / П. Нойферт, Л. Нефф. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2005. – 264 с.
4. Макарова, В.В. Дизайн помещений: стили интерьера на примерах / В.В. Макарова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 160 с.

УДК 681.3:624.04
***Николаенко Е. А.***
***Научный руководитель: к.т.н., доцент Игнатюк В. И.***

## ОБ ОЦЕНКЕ ФОРМУЛЫ ЖУРАВСКОГО ДЛЯ ПЛОСКИХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ИЗГИБАЕМЫХ СТЕРЖНЕЙ

Рассмотрим случай изгиба стержня (рисунок 1) в плоскости (*X*, *У*), введя обозначения: *X* – продольная ось стержня, проходящая через центры тяжести поперечных сечений стержня; *Y* и *Z* – главные центральные оси инерции сечений стержня. Считается, что оси *Y* и *Z* не поворачиваются при переходе от одного сечения стержня к другому.

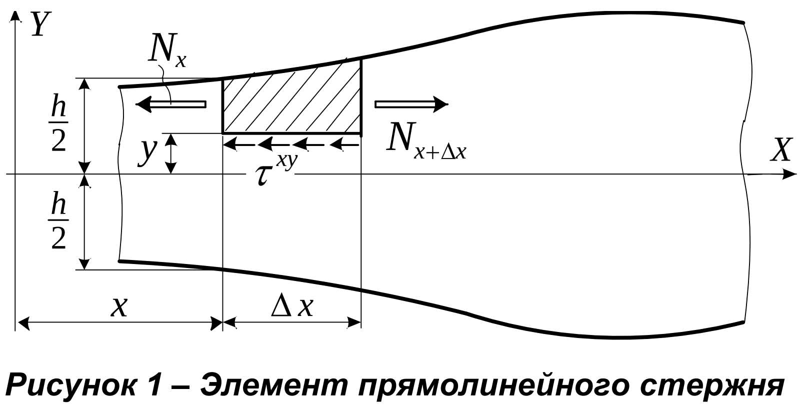


***Рисунок 1 – Элемент прямолинейного стержня***

Выполним анализ известной формулы Журавского, которая имеет вид [1]:

$$\tau = \frac{QS}{Ib}, \tag{1}$$

где $Q$ – поперечная сила в сечении; $S$ – статический момент отсеченной части сечения на уровне определения напряжений; $I$ – момент инерции сечения; $b$ – ширина сечения на уровне определения напряжений.

При выводе и использовании данной формулы часто не говорится об ограничениях ее применения, при этом эта формула лежит в основе вывода ряда зависимостей, в том числе для определения перемещений в изгибаемых стержневых системах, связанных с учётом влияния сдвиговых деформаций.

Проанализируем эти ограничения, являющиеся дополнительными по отношению к предположениям, описывающим гипотезу плоских сечений [2], приняв следующие предположения:

- касательные напряжения считаются распределёнными равномерно по ширине поперечного сечения изгибаемого стержня, и функция $\tau^{xy} = \tau^{xy}\ x, y$ соответственно не зависит от координаты $z$, а компонента $\tau^{xz}$ не определяется в рамках рассматриваемой теории изгиба стержней;
- совокупность внешних воздействий на стержень не содержит распределённой моментной нагрузки $m$ в рассматриваемом сечении;
- считается, что поперечное сечение стержня не меняется по длине стержня в окрестности рассматриваемого сечения.

Выполним анализ сначала первого из этих трёх предположений, равномерность распределения касательных напряжений $\tau^{xy}$ по ширине обсудим позже.

Из гипотезы плоских сечений следует, что каждое поперечное сечение стержня ведёт себя как абсолютно твёрдое (недеформируемое) тело. Это означает, что сдвиговые деформации γ тождественно равны нулю и, следовательно, соответствующие касательные напряжения $\tau$ не могут быть определены на основании физического закона, связывающего деформации γ и напряжения τ, то есть закона Гука для линейно деформируемого материала. При этом касательные напряжения могут быть найдены из уравнений равновесия. Для этого выделим элементарный участок стержня $\Delta x$ (рисунок 1), ограниченный двумя поперечными сечениями $x$ и $x + \Delta x$ соответственно, и отсекаемый от остальной части стержня горизонтальной плоскостью, находящейся на расстоянии $y$ от плоскости ($X$, $Z$) (на рисунке 1 выделенный элемент стержня заштрихован).

Усилие $N_x$, действующее в левом сечении выделенного элемента, определяется путем интегрирования нормальных напряжений по площади элемента:

$$N_x = \int_{A_0} \sigma^x dA = \int_{A_0} \frac{My}{I_z} dA = \int_{A_0} y dA = \frac{MS_{zo}}{I_z}.$$

Здесь $A_0$ и $S_{zo}$ – площадь и статический момент левого сечения отсечённой части стержня относительно нейтральной оси $Z$ полного сечения стержня.

Продольное усилие $N_{x+\Delta x}$, действующее в правом сечении ($x + \Delta x$), равно:

$$N_{x+\Delta x} = N_x + \frac{dN_x}{dx}\Delta x.$$

Результирующее продольное усилие, действующее на выделенный элемент стержня, будет равно: $$\Delta N = \frac{dN}{dx}\Delta x.$$

Если считать, что длина выделенного участка стержня $\Delta x$ представляет собой величину первого порядка малости, то, отбрасывая малые более высокого порядка, равнодействующую касательных напряжений $\tau_{xy}$, действующих по горизонтальному сечению выделенной части стержня, можно определить как $\tau_{xy} b \Delta x$, где $b = b \;\; x, y$ – ширина поперечного сечения стержня, являющаяся в общем случае функций двух координат *x* и *y*.

Считая, что на наружной поверхности стержня нет нагрузки вдоль оси *X*, и, составляя уравнение равновесия выделенного элемента в проекции на эту ось:

$\dfrac{dN}{dx}\Delta x - \tau_{xy}\, b\,\Delta x = 0,$ приходим к формуле: $\tau^{xy} = \dfrac{1}{b}\dfrac{dN_x}{dx} = \dfrac{1}{b}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{MS_{zo}}{I_z}\right),$ (2)

а с учетом зависимости $M' = Q + m$ и дифференцирования по частям получаем:

$$\tau^{xy} = \frac{1}{b}\left[\frac{Q+m \;\; S_{zo}}{I_z} + M\frac{d}{dx}\left(\frac{S_{zo}}{I_z}\right)\right].$$

Выполним анализ отдельных компонент этой формулы. Заметим, что моментная нагрузка *m* создаётся силовыми парами, приложенными непосредственно к продольной оси стержня, однако возможен и другой способ создания этой нагрузки, при котором внешний распределённый момент *m*, как мы увидим далее, может быть исключен из рассматриваемой формулы.

Для упрощения рассуждений будем считать, что ось *Z* является осью симметрии сечения стержня. Тогда моментную нагрузку *m* можно представить себе как результат действия продольной нагрузки $q_x$, при этом под $q_x$ понимается интенсивность продольной нагрузки по отношению к единице объёма материала изгибаемого стержня. Принимается равномерное распределение этой нагрузки по высоте сечения, будем считать, что функция $q_x = q_x(x, y)$ является кососимметричной функцией координаты *y*, то есть

$$q_x \;\; x, y \;\; = -q_x \;\; x, -y \;\; . \tag{3}$$

Моментная нагрузка *m* тогда определяется зависимостью:

$$m = -\int_{-h/2}^{h/2} q_x \;\; x, y \;\; b \;\; y \;\; y\,dy\,,$$

где *h = h(x)* – высота сечения стержня.

Учитывая нагрузку $q_x$ в уравнении равновесия выделенного элемента стержня, приходим вместо формулы (2) к формуле:

$$\tau^{xy} = \frac{1}{b}\frac{dN_x}{dx} + \frac{1}{b}\int_y^{h2} q_x \;\; x, y \;\; b \;\; y \;\; dy = \frac{1}{b}\frac{d}{dx}\left(\frac{MS_m}{I_z}\right) + \frac{1}{b}\int_y^{h/2} q_x \;\; x, y \;\; dy\,,$$

которую после подстановок и преобразований приведем к виду:

$$\tau^{xy} = \frac{1}{b}\left[\frac{QS_{zo}}{I_z} + M\frac{d}{dx}\left(\frac{S_{zo}}{I_z}\right) + \frac{mS_{zo}}{I_z} + \int_y^{h/2} q_x \;\; x, y \;\; b \;\; y \;\; dy\right]. \tag{5}$$

Если положить $q_x = 0$ и считать, что стержень имеет постоянное сечение, то формула (5) упростится и перейдёт в известную формулу Журавского (1).

Покажем, что в рамках теории изгиба стержней Бернулли-Эйлера два последних члена в квадратных скобках в формуле (5) могут быть отброшены. Для этого представим продольную нагрузку $q_x = q_x(x, y)$ разложением в степенной ряд по координате *y*, причём в силу кососимметричности этой функции по координате *y* ряд этот будет содержать только члены с нечётными степенями *y*:

$$q_x(x, y) = \alpha_1(x)\, y + \alpha_3(x)\, y^3 + \ldots \tag{6}$$

Многоточием обозначены оставшиеся члены этого ряда с более высокими степенями *y*. Но в рамках теории изгиба стержней Бернулли-Эйлера в этом разложении должен быть удержан всего лишь первый (линейный по *y*) член ряда, а все остальные члены отброшены.

Действительно, согласно гипотезе плоских сечений каждое поперечное сечение при изгибе обладает всего одной степенью свободы в отношении перемещений *u* вдоль оси *X*, а именно жестким поворотом всего сечения на угол $\theta$ вокруг оси *Z*, то есть: $u = -\theta y$.

Это означает, что уже первым членом ряда (6) исчерпываются все те обобщённые внешние силы, которым отвечают все учитываемые моделью Бернулли-Эйлера степени свободы сечения по отношению к продольным перемещениям точек поперечного сечения. Поэтому в рамках рассматриваемой теории изгиба стержней следует принять:

$$q_x(x, y) = \alpha_1(x) \cdot y\,. \tag{7}$$

Искомый функциональный коэффициент $\alpha_1(x)$ можно получить домножением равенства (7) на $b(y)\, y$ с последующим интегрированием по высоте сечения, что с учётом (4) даёт зависимость:

$$\alpha_1(x) = -\frac{m}{I_z}\,. \tag{8}$$

В результате получим:

$$\int_y^{h/2} q_x(x, y)\, b(y)\, dy = -\frac{m}{I_z}\int_y^{h/2} b(y)\, y dy = -\frac{mS_{oz}}{I_z}\,,$$

и два последних члена в формуле (5) сокращаются, то есть будем иметь:

$$\tau^{xy} = \frac{1}{b}\left[\frac{QS_{zo}}{I_z} + M\,\frac{d}{dx}\left(\frac{S_{zo}}{I_z}\right)\right]. \tag{9}$$

Несложно показать, что

$$\int_A \frac{S_{zo}}{b} dA = I_z\,, \tag{10}$$

где *A* – площадь поперечного сечения стержня. Действительно, интегрируя по частям в пределах от –h/2 до h/2 с учетом принятого предположения о симметрии сечения стержня относительно оси Z, получаем:

$$\int_A \frac{S_{zo}}{b} dA = \int_{-h/2}^{h/2} S_{zo} dy = S_{zo} y \Bigg|_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} y\,\frac{dS_{zo}}{dy} dy\,.$$

Но статический момент всего сечения относительно оси Z равен нулю, то есть $S_{zo}(x, h/2) = 0$ и $S_{zo}(x, -h/2) = 0$, следовательно, внеинтегральный член в первой части этой формулы исчезает. Учитывая также, что

$$\frac{dS_{zo}}{dy} = \frac{d}{dy}\int_y^{h/2} b(x, y)\, y dy = -b(x, y)\, y\,, \tag{11}$$

после подстановок приходим к формуле (10).

Формула (9) более точна в отношении распределения по сечению стержня касательных напряжений, чем более простая формула Журавского. Однако если определять только *усреднённое* значение сдвига по сечению, то можно показать что интегрально второе слагаемое в уточнённой формуле (9) дает нулевой вклад в общий интеграл $\int_A \tau^{zy} dA$. Действительно, имеем:

$$\int_A \frac{1}{b\ \ x,y} \frac{d}{dx}\left(\frac{S_{zo}}{I_z}\right) dF = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{I_z}\int_{-h/2}^{h/2} S_{zo} dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{I_z} I_z\right) = 0 .$$

Таким образом, интегрально второе слагаемое в формуле (9) не даёт вклада в усреднённое значение сдвига по сечению стержня. Это обстоятельство позволяет в рамках теории стержней, основанной на гипотезе плоских сечений, опираться на простую формулу Журавского при определении среднего сдвига по сечению. Именно эти соображения дают право пользоваться формулой Журавского при выводе уравнений теории изгиба стержней Тимошенко.

Интересно обсудить и вопрос о распространении горизонтального касательного напряжения $\tau_{xz}$. Оказывается, что ответ и на этот вопрос может быть найден в рамках элементарной теории [3]. Определим эти напряжения, исходя из дифференциального уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \tau^{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma^z}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{My}{I_z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{QS_{zo}}{bI_z} + \frac{M}{b}\frac{d}{dx}\left(\frac{S_{zo}}{I_z}\right)\right]. \qquad (12)$$

Преобразуем это уравнение, используя дифференцирование по частям:

$$\frac{\partial \tau^{xz}}{\partial z} = -\frac{Q}{I_z} y - My\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{I_z}\right) - \frac{Q}{I_z}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{S_{zo}}{b}\right) - M\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S_{zo}}{I_z}\right)\right].$$

Воспользовавшись формулой (11) и введя обозначение $b' = \partial b/\partial y$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{S_{zo}}{b}\right) = -y - \frac{S_{zo}b'}{b^2}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S_{zo}}{I_z}\right)\right] = -\frac{b'}{b^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S_{zo}}{I_z}\right) - \frac{y}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{I_z}\right),$$

что после подстановок в (13) и преобразований приводит к зависимости:

$$\frac{\partial \tau^{xz}}{\partial z} = \tau^{xy}\frac{b'}{b} + My\left[\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{I_z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{I_z}\right)\right].$$

Учитывая, что $\qquad \frac{\partial}{\partial}\left(\frac{1}{I_z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{bI_z}\right) = \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{I_z}\right) - \frac{1}{bI_z}\frac{\partial b}{\partial x},$

получаем выражение для производной $\partial \tau^{xz}/\partial z$ в виде:

$$\frac{\partial \tau^{xz}}{\partial z} = \frac{\tau^{xy}}{b}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{M\,y}{bI_z}\frac{\partial b}{\partial x}. \qquad (14)$$

Учитывая, что по принятому предположению все компоненты в правой части формулы (14) не зависят координаты $z$ и что $\tau^{xy}(x,y,0)=0$, приходим к простой окончательной формуле для горизонтальных касательных напряжений:

$$\tau^{xz} = \left(\tau^{xy}\frac{\partial b}{\partial y} + \sigma^x\frac{\partial b}{\partial x}\right)\frac{z}{b}. \qquad (15)$$

Рассмотрим в качестве примера стержень круглого сечения переменного радиуса $r = r \;\; x$ . Понятно, что $b^2 \;\; x, y \;\; / 4 + y^2 = r^2 \;\; x$ , следовательно:

$$\frac{\partial b}{\partial y} = -\frac{4y}{b}, \qquad \frac{\partial b}{\partial y} = 4r'\frac{r}{b}, \qquad \text{где} \quad r' = \partial r / \partial x.$$

Несложно установить, что: $I = \dfrac{\pi r^4}{4}$, $S_0 = \dfrac{b^3}{12}$, следовательно:

$$\frac{S_0}{I} = \frac{b^3}{3\pi r^4}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S_0}{I}\right) = \frac{b^2}{\pi r^4}\left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{4br'}{r}\right) = \frac{b^2 r'}{I}\left(\frac{r}{b} - \frac{b}{3r}\right). \tag{16}$$

После подстановок (15) в (9) получаем:

$$\tau^{xy} = \frac{b^2}{12I}\left[Q + M\frac{12r'}{b}\left(\frac{r}{b} - \frac{b}{3r}\right)\right].$$

Теперь несложно найти и касательные напряжения $\tau^{xz}$, воспользовавшись формулой (15). В результате получим выражение:

$$\tau^{xz} = \frac{yz}{3I}\left(-Q + M\frac{4r'}{r}\right),$$

которое отличается от формулы, полученной в [3], наличием дополнительного слагаемого, зависящего от изгибающего момента.

**Список цитированных источников**


1. Биргер, И. А. Сопротивления материалов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов – М. : Физматгиз, 1986. – 560 с.
2. Сливкер, В. И. О касательных напряжениях при изгибе стержней / В. И. Сливкер // Исследования по механике строительных конструкций и материалов : межвузовский тематический сборник трудов / СПбГАСУ. – СПб., 2002. – С. 90–96.
3. Харлаб, В. Д. О касательных напряжениях в элементарной теории плоского изгиба / В. Д. Харлаб // Исследования по механике строительных конструкций и материалов : труды Ленинград. инж.-строит. ин-та. – Л., 1991. – С. 92–95.



УДК 681.3:624.04



***Николаенко Е.А.***

***Научный руководитель: к.т.н., доцент Игнатюк В.И.***


## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ИЗГИБАЕМЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЯХ

Выделим из криволинейного стержня элементарный участок (заштрихован на рисунок 1), ограниченный слева сечением с дуговой координатой *s*, справа сечением с координатой $s + \Delta s$, и от остальной части стержня криволинейной поверхностью *z* = *Const* (рис. 1).