Рассмотрим в качестве примера стержень круглого сечения переменного радиуса $r = r\;\; x$. Понятно, что $b^2\;\; x, y\;\; / 4 + y^2 = r^2\;\; x$, следовательно:

$$\frac{\partial b}{\partial y} = -\frac{4y}{b}, \qquad \frac{\partial b}{\partial y} = 4r'\frac{r}{b}, \qquad \text{где} \quad r' = \partial r / \partial x.$$

Несложно установить, что: $I = \dfrac{\pi r^4}{4}$, $S_0 = \dfrac{b^3}{12}$, следовательно:

$$\frac{S_0}{I} = \frac{b^3}{3\pi r^4}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S_0}{I}\right) = \frac{b^2}{\pi r^4}\left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{4br'}{r}\right) = \frac{b^2 r'}{I}\left(\frac{r}{b} - \frac{b}{3r}\right). \tag{16}$$

После подстановок (15) в (9) получаем:

$$\tau^{xy} = \frac{b^2}{12I}\left[Q + M\,\frac{12r'}{b}\left(\frac{r}{b} - \frac{b}{3r}\right)\right].$$

Теперь несложно найти и касательные напряжения τ^{xz}, воспользовавшись формулой (15). В результате получим выражение:

$$\tau^{xz} = \frac{yz}{3I}\left(-Q + M\,\frac{4r'}{r}\right),$$

которое отличается от формулы, полученной в [3], наличием дополнительного слагаемого, зависящего от изгибающего момента.

Список цитированных источников

1. Биргер, И. А. Сопротивления материалов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов – М. : Физматгиз, 1986. – 560 с.
2. Сливкер, В. И. О касательных напряжениях при изгибе стержней / В. И. Сливкер // Исследования по механике строительных конструкций и материалов : межвузовский тематический сборник трудов / СПбГАСУ. – СПб., 2002. – С. 90–96.
3. Харлаб, В. Д. О касательных напряжениях в элементарной теории плоского изгиба / В. Д. Харлаб // Исследования по механике строительных конструкций и материалов : труды Ленинград. инж.-строит. ин-та. – Л., 1991. – С. 92–95.

УДК 681.3:624.04

Николаенко Е.А.

Научный руководитель: к.т.н., доцент Игнатюк В.И.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ИЗГИБАЕМЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЯХ

Выделим из криволинейного стержня элементарный участок (заштрихован на рисунок 1), ограниченный слева сечением с дуговой координатой s, справа сечением с координатой $s + \Delta s$, и от остальной части стержня криволинейной поверхностью $z = Const$ (рис. 1).

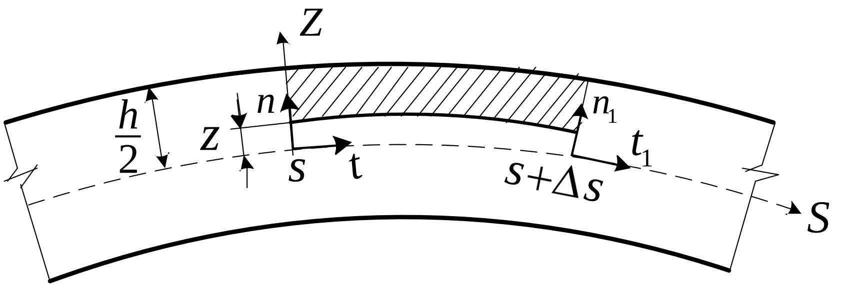

Рисунок 2 – Элемент криволинейного стержня

В левом сечении выделенного элемента стержня действуют нормальные напряжения σ, суммарно создающие продольную силу N_0 и изгибающий момент M_0 относительно оси Y. В сечении справа в выделенном элементе будут действовать нормальные напряжения

$$\sigma + \frac{d\sigma}{ds}\Delta s.$$

Нормальные напряжения σ в зависимости от используемой теории криволинейных стержней могут быть представлены в виде [1, 2]:

а) стержни малой кривизны (kh<<1):

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Mz}{I}; \qquad 1)$$

б) стержни средней кривизны (k^2h^2<<1):

$$\sigma = \frac{N + kM}{A} + \frac{Mz}{I} - \frac{kMz^2}{I}; \qquad (2)$$

в) стержни большой кривизны:

$$\sigma = \frac{N + kM}{A} + \frac{M}{I_p}\frac{z}{1 + kz}. \qquad (3)$$

Запишем выражения для геометрических характеристик левого сечения выделенного элемента – площадь, статические моменты и моменты инерции для отсеченной части сечения:

$$A_0 = \int_z^{h/2} b\,dz, \qquad S_0 = \int_{A_0} z\,dA, \qquad I_0 = \int_{A_0} z^2 dA,$$

$$S_{\rho o} = \int_{A_0} \frac{z}{1 + kz} dA, \qquad I_{\rho o} = \int_{A_0} \frac{z^2}{1 + kz} dA, \qquad I_{2o} = \int_{A_0} z^3 dA. \qquad 4)$$

Несложно проверить, что справедливы также следующие зависимости:

$$\int_A \frac{A_0}{b} dA = A\frac{h}{2}, \qquad \int_A \frac{S_0}{b} dA = I, \qquad \int_A \frac{zS_0}{b} dA = 0, \qquad \int_A \frac{I_0}{b} dA = I\frac{h}{2}. \qquad (5)$$

Доказательство этих соотношений основано на интегрировании по частям, и их несложно получить, если учесть следующие соотношения и факторы:

1) формулы дифференцирования геометрических характеристик:

$$\frac{dA_0}{dz} = -b\ \ z\ , \qquad \frac{dS_0}{dz} = -zb\ \ z\ , \qquad \frac{dI_0}{dz} = -z^2 b\ \ z\ ,$$

2) условие симметрии сечения стержня относительно оси *У*, из которого следует, что $\int_{-h/2}^{h/2} z^2 bdz = 0$ при любом нечётном *n*.

Отметим также, что справедливы следующие оценки порядка величин:

$$\frac{S_0}{A_0} < h, \qquad \frac{I_0}{S_0} < h, \qquad \frac{I_{2o}}{A_0} < h. \tag{6}$$

В случае криволинейного стержня удобно воспользоваться уравнением равновесия выделенного элемента стержня не в проекциях на тангенциальную ось, как для случая стержня с прямолинейной осью, а в моментах. Точнее говоря, запишем условие равенства нулю моментов всех сил, действующих на выделенный элемент стержня, относительно центра кривизны оси стержня. Обозначив штрихом производную по координате *s* и учитывая, что $k = 1/\rho$, получим:

$$-\int_z^{h/2} \sigma b \ \ \rho + z \ \ dz = \int_z^{h/2} \left[\sigma b + \ \ \sigma b \ '\ \Delta s \right] \ \ \rho + \rho' \Delta s + z \ \ dz - \tau^{sz} b \ \ 1 + kz \ \ \ \rho + z \ \ = 0.$$

После сокращений, удерживая в полученном соотношении члены не выше первого порядка малости по отношению к Δs, имеем

$$\int_z^{h/2} \ \ \sigma b \ ' \ \ p = z \ \ dz = \int_z^{h/2} \sigma b p' dz - \tau^{sz} b p \ \ 1 = kz \ ^2 = 0.$$

Подынтегральное выражение в первом слагаемом этой формулы удобно представить в виде:

$$\frac{d \ \ \sigma b}{ds} \ \ p = z \ \ = \frac{d\left[\sigma b \ \ p + z \ \right]}{ds} - \sigma b \frac{dp}{ds}.$$

Это даёт возможность вынести операцию дифференцирования по координате *s* за знак интеграла, а поскольку кривизна оси стержня *k* от *z* не зависит, окончательно общее выражение для касательного напряжения по сечению криволинейного стержня переменного сечения примет вид:

$$\tau^{sz} = \frac{k}{b \ \ 1 + kz \ ^2} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{k} \int_z^{h/2} \sigma b \ \ 1 + kz \ \ dz \right] \tag{7}$$

В результате подстановок в (7) формул (1) – (3) для стержней различной кривизны и последующего интегрирования можно получить расчётные формулы для касательного напряжения τ^{sz} в зависимости от используемой теории для криволинейных стержней.

Так, для изгибаемых плоских стержней малой кривизны, для которых справедливо соотношение *kh*<<1, подставляя в (7) зависимость (1) и интегрируя полученное выражение, найдем:

$$\tau^{sz} = \frac{k}{b} \frac{d}{ds} \left(N \frac{A_0 + kS_0}{kA} + M \frac{S_0 + kI_0}{kI} \right).$$

В соответствии с принятым в теории стержней малой кривизны порядком точности и с учётом оценок (6), формулу можно упростить, и она примет вид:

$$\tau^{sz} = \frac{k}{b} \frac{d}{ds} \left(N \frac{A_0}{kA} + M \frac{S_0}{kI} \right). \tag{8}$$

Воспользуемся теперь уравнениями равновесия Кирхгоффа [1] для криволинейных стержней, согласно которым:

$$N' = -kQ - q_t, \qquad kN = Q' + q_n, \qquad M' = Q - m\ . \tag{9}$$

После выполнения дифференцирования в (8) и подстановок выражений для производных N' и M' согласно (9) получим:

$$\tau^{sz} = \frac{1}{b}\left[Q\left(\frac{S_0}{I} - \frac{kA_0}{A} \right) + Nk\left(\frac{A_0}{A} \right) + Mk\left(\frac{S_0}{kI} \right) - q_t \frac{A_0}{A} - m\frac{S_0}{I} \right]. \tag{10}$$

Если подсчитать интегральную характеристику касательных напряжений τ^{sz} по всему сечению стержня, то она будет равняться поперечной силе *Q*. Но уже первый член в (10) с учётом формул (5) даёт эту поперечную силу:

$$Q\int_A \frac{1}{b}\left(\frac{S_0}{I} - \frac{kA_0}{A} \right) dA = Q\left(1 - \frac{kh}{2} \right) \approx Q,$$

следовательно, все остальные члены суммарно дают нулевой вклад в величину общей поперечной силы. Это обстоятельство позволяет ограничиться обычной формулой Журавского при определении среднего по сечению сдвига γ:

$$\tau^{sz} = \frac{QS_0}{bI}.$$

Более точное значение касательного напряжения в отдельных волокнах поперечного сечения стержня, при необходимости, может быть вычислено по уточнённой формуле (8).

Список цитированных источников

1. Биргер, И. А. Сопротивления материалов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов – М. : Физматгиз, 1986. – 560 с.

2. Сливкер, В. И. О касательных напряжениях при изгибе стержней / В. И. Сливкер // Исследования по механике строительных конструкций и материалов : межвузовский тематический сборник трудов / СПбГАСУ. – СПб., 2002. – С. 90–96.

УДК 681.3:624.04

Николаенко Е.А.
Научный руководитель: к.т.н., доцент Игнатюк В.И.

О ВЕЛИЧИНЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕЙ СРЕДНЕЙ И БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ

В работе [4] получена формула, которая позволяет определять касательные напряжения по сечениям плоских криволинейных изгибаемых стержней переменного сечения в более точной постановке

$$\tau^{sz} = \frac{k}{b\ 1+kz\ ^2}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k}\int_z^{h/2} \sigma b\ 1+kz\ \ dz \right] \tag{1}$$

при подстановке в эту формулу выражений для нормальных напряжений *σ* для стержней различной кривизны в зависимости от используемой теории криволинейных стержней.