

Воспользуемся теперь уравнениями равновесия Кирхгоффа [1] для криволинейных стержней, согласно которым:

$$N' = -kQ - q_t, \quad kN = Q' + q_n, \quad M' = Q - m. \quad (9)$$

После выполнения дифференцирования в (8) и подстановок выражений для производных N' и M' согласно (9) получим:

$$\tau^{sz} = \frac{1}{b} \left[Q \left(\frac{S_0}{I} - \frac{kA_0}{A} \right) + Nk \left(\frac{A_0}{A} \right) + Mk \left(\frac{S_0}{kI} \right) - q_t \frac{A_0}{A} - m \frac{S_0}{I} \right]. \quad (10)$$

Если подсчитать интегральную характеристику касательных напряжений τ^{sz} по всему сечению стержня, то она будет равняться поперечной силе Q . Но уже первый член в (10) с учётом формул (5) даёт эту поперечную силу:

$$Q \int_A \frac{1}{b} \left(\frac{S_0}{I} - \frac{kA_0}{A} \right) dA = Q \left(1 - \frac{kh}{2} \right) \approx Q,$$

следовательно, все остальные члены суммарно дают нулевой вклад в величину общей поперечной силы. Это обстоятельство позволяет ограничиться обычной формулой Журавского при определении среднего по сечению сдвига γ :

$$\tau^{sz} = \frac{QS_0}{bI}.$$

Более точное значение касательного напряжения в отдельных волокнах поперечного сечения стержня, при необходимости, может быть вычислено по уточнённой формуле (8).

Список цитированных источников

1. Биргер, И. А. Сопротивления материалов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов – М. : Физматгиз, 1986. – 560 с.
2. Сливкер, В. И. О касательных напряжениях при изгибе стержней / В. И. Сливкер // Исследования по механике строительных конструкций и материалов : межвузовский тематический сборник трудов / СПбГАСУ. – СПб., 2002. – С. 90–96.

УДК 681.3:624.04

Николаенко Е.А.

Научный руководитель: к.т.н., доцент Игнатюк В.И.

О ВЕЛИЧИНЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕЙ СРЕДНЕЙ И БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ

В работе [4] получена формула, которая позволяет определять касательные напряжения по сечениям плоских криволинейных изгибаемых стержней переменного сечения в более точной постановке

$$\tau^{sz} = \frac{k}{b} \frac{1}{1+kz} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{k} \int_z^{h/2} \sigma b (1+kz) dz \right] \quad (1)$$

при подстановке в эту формулу выражений для нормальных напряжений σ для стержней различной кривизны в зависимости от используемой теории криволинейных стержней.

Рассмотрим, например, изгибаемые плоские стержни средней кривизны, для которых справедливо соотношение [1] $k^2 h^2 \ll 1$ и для которых распределение нормальных напряжений σ по сечению определяется [4] выражением:

$$\sigma = \frac{N + kM}{A} + \frac{M_z}{I} - \frac{kM_z^2}{I}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и выполняя интегрирование, для стержней средней кривизны получим:

$$\tau^{sz} = \frac{k}{b} \frac{1}{1+kz} \frac{d}{ds} \left[N \frac{A_0 + kS_0}{kA} + M \left(\frac{A_0 + kS_0}{A} + \frac{S_0 - k^2 I_{2o}}{kI} \right) \right]. \quad (3)$$

В рамках точности, принимаемой в теории стержней средней кривизны [1], вместе с оценками соотношений [4]:

$$\frac{S_0}{A_0} < h, \quad \frac{I_0}{S_0} < h, \quad \frac{I_{2o}}{A_0} < h$$

будем иметь:
$$\frac{1}{1+kz} \approx 1 - 2kz,$$

что позволяет упростить выражение (3) до формулы:

$$\tau^{sz} = \frac{k}{b} \frac{1-2kz}{1+kz} \frac{d}{ds} \left[N \frac{A_0 + kS_0}{kA} + M \left(\frac{A_0 + kS_0}{A} + \frac{S_0}{kI} \right) \right]. \quad (4)$$

В результате дифференцирования по s в (4) и с учётом уравнений Кирхгоффа [1]

$$N' = -kQ - q_t, \quad kN = Q' + q_n, \quad M' = Q - m, \quad (5)$$

окончательно получим формулу для касательных напряжений τ^{sz} применительно к стержням средней кривизны в виде:

$$\tau^{sz} = \frac{1-2kz}{b} \times \left[Q \frac{S_0}{I} + Nk \left(\frac{A_0 + kS_0}{kA} \right) + Mk \left(\frac{A_0 + kS_0}{A} + \frac{S_0}{kI} \right) - q_t \frac{A_0 + kS_0}{A} - mk \left(\frac{A_0 + kS_0}{A} + \frac{S_0}{kI} \right) \right]. \quad (6)$$

Интегрируя τ^{sz} по площади сечения стержня A и учитывая соотношения (5) для первого члена этой формулы получим:

$$Q \int_A \frac{1-2kz S_0}{b} \frac{S_0}{I} dA = Q,$$

Таким образом, для стержней средней кривизны формула Журавского будет:

$$\tau^{sz} = \frac{QS_0}{bI} (1-2kz). \quad (7)$$

Рассмотрим теперь изгибаемые плоские стержни большой кривизны, для которых справедливо соотношение $k^2 h^2 \ll 1$.

На основании формулы (1) с учётом распределения нормальных напряжений σ по сечениям стержней большой кривизны [4], имеющего вид:

$$\sigma = \frac{N + kM}{A} + \frac{M}{I_p} \frac{z}{1+kz}, \quad (8)$$

после подстановки (3) в (1) и интегрирования получим:

$$\tau^{sz} = \frac{k}{b} \frac{1}{1+kz} \frac{d}{ds} \left[N \frac{A_0 + kS_0}{kA} + M \left(\frac{A_0 + kS_0}{A} + \frac{S_0}{kI_p} \right) \right].$$

Выполняя теперь дифференцирование и учитывая соотношения Кирхгофа для криволинейных стержней (5), эту формулу преобразуем к виду:

$$\tau^{sz} = \frac{1}{b} \frac{1}{1+kz} \times \left[Q \frac{S_0}{I_0} + Nk \left(\frac{A_0 + kS_0}{kA} \right) + Mk \left(\frac{A_0 + kS_0}{A} + \frac{S_0}{kI_p} \right) - q_t \frac{A_0 + kS_0}{A} - mk \left(\frac{A_0 + kS_0}{A} + \frac{S_0}{kI_p} \right) \right]. \quad (9)$$

Интегрируя τ^{sz} по всей площади сечения стержня A для первого члена формулы получаем

$$Q \int_A \frac{1}{b} \frac{1}{1+kz} \frac{S_0}{I_0} dA = \frac{Q}{I_p} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{S_0}{1+kz} dz.$$

Интегрируя последнее выражение по частям, получим:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{S_0}{1+kz} dz = -\frac{S_0}{k} \frac{1}{1+kz} \Big|_{-h/2}^{h/2} - \frac{zS_0}{1+kz} dz.$$

Внеинтегральный член равен нулю, так как равен нулю статический момент отсечённой части сечения на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Оставшийся интеграл представляет собой статический момент S_p приведённого сечения. В результате получаем:

$$Q \int_A \frac{1}{b} \frac{1}{1+kz} \frac{S_0}{I_p} dA = \frac{QS_p}{I_p k} = Q.$$

Таким образом, для стержней большой кривизны формула Журавского имеет вид:

$$\tau^{sz} = \frac{QS_0}{bI_p} \frac{1}{1+kz}. \quad (10)$$

Список цитированных источников

1. Биргер, И. А. Сопротивления материалов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов – М. : Физматгиз, 1986. – 560 с.
2. Сливкер, В. И. О касательных напряжениях при изгибе стержней / В. И. Сливкер // Исследования по механике строительных конструкций и материалов : межвузовский тематический сборник трудов / СПбГАСУ. – СПб., 2002. – С. 90–96.
3. Харлаб, В. Д. О касательных напряжениях в элементарной теории плоского изгиба / В. Д. Харлаб // Исследования по механике строительных конструкций и материалов : труды Ленинград. инж.-строит. ин-та. – Л., 1991. – С. 92–95.
4. Николаенко Е. А. Об определении касательных напряжений в изгибаемых криволинейных стержнях / Е. А. Николаенко // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов / БрГТУ. – Брест, 2020.