

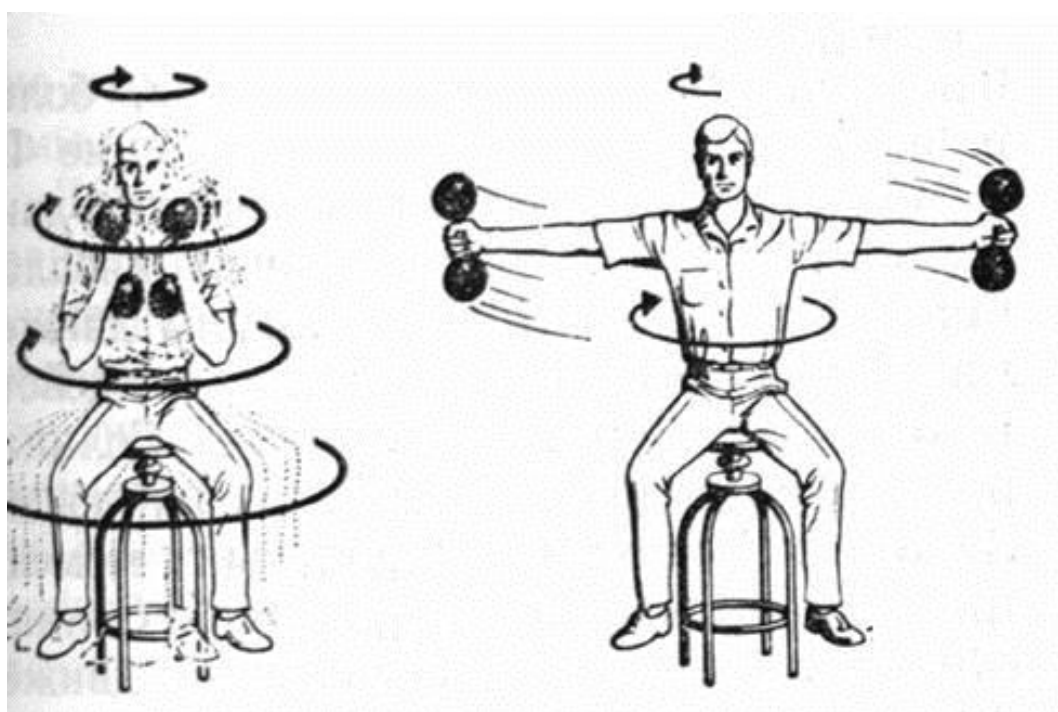
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ФИЗИКИ

Методические указания

к выполнению лабораторной работы М19
«ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ»



Брест 2017

УДК 538.935 (0765)

Методические указания к выполнению лабораторной работы М19 «Определение моментов инерции твердых тел». – Брест: Изд-во БрГТУ, 2017.

Методические указания составлены в соответствии с типовой программой курса физики для инженерно-технических специальностей. В указаниях приведены необходимые для понимания сущности физических процессов теоретические сведения, объясняющие принцип действия используемых приборов и аппаратуры, излагается методика проведения экспериментов, приводятся задания для самостоятельной работы. Даны контрольные вопросы и список рекомендуемой литературы.

Методические указания предназначены для студентов БрГТУ технических специальностей и всех форм обучения.

Составители: Л.А. Величко, к.ф.-м.н., доцент
В.И. Гладковский, к.ф.-м.н., доцент
Е.А. Максимук, лаборант

Рецензент: П.Б. Кац, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры общей
и теоретической физики УО БрГУ им. А.С. Пушкина

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА М19

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

изучение инертных свойств твердых тел при вращательном движении.

II. ЗАДАЧИ РАБОТЫ:

- 1) изучение понятия момента инерции;
- 2) определение собственного момента инерции рамки маятника;
- 3) определение крутильной жесткости проволоки;
- 4) проверка аддитивности моментов инерции тел системы;
- 5) проверка теоремы Штейнера-Гюйгенса;
- 6) определение моментов инерции твердых тел различной формы.

III. ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ:

лабораторная установка НТЦ-22.04.13, электронный секундомер, образцы твердых тел различной формы, линейка.

IV. ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Лабораторная установка НТЦ-22.04.13, представляющая собой вариант крутильного маятника, показана на фото 1. На основании 1, оснащенном ножками регулируемой высоты и круговым уровнем, закреплен вертикальный стержень 2, на котором, при помощи винтовых зажимов перемещаются рамка оптического датчика 3 и транспортер 4. На верхнем торце стойки установлен кронштейн 5 для крепления стальной проволоки 6. Поворотная рамка 7 подвешена на стальной проволоке, силу натяжения которой можно регулировать при помощи натяжного винта 8, закрепленного на верхнем кронштейне. Исследуемое тело 9 помещается внутрь поворотной рамки и фиксируется при помощи прижимных пластин 10, которые могут свободно перемещаться вдоль направляющих 11. Отсчет количества колебаний и времени колебания производится с помощью счетчика 12, питание которого включается тумблером 13, размещенным на задней панели установки (на фото местоположение тумблера показано стрелкой).

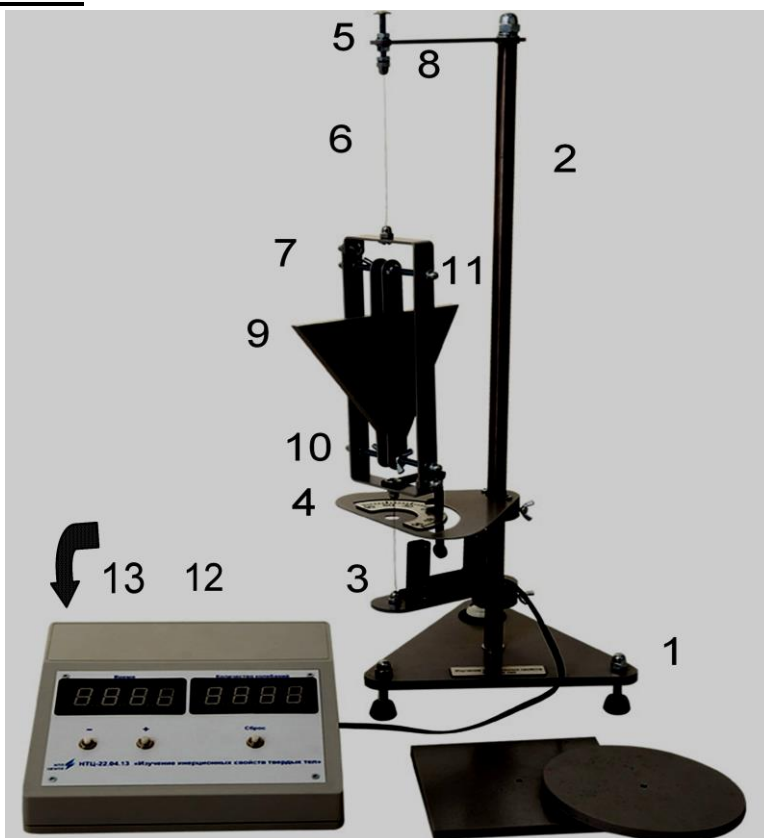


Фото 1 – Лабораторная установка

V. ПРИНЦИП РАБОТЫ УСТАНОВКИ

Способность твердого тела сохранять значение угловой скорости зависит не только от величины массы тела, но и от расстояния, на котором находится масса или ее часть по отношению к оси вращения. Поэтому для характеристики инертных свойств твердых тел вводится понятие момента инерции как коэффициента пропорциональности между вращательным моментом и угловым ускорением.

Если вращение происходит вокруг закрепленной оси, то выполняется закон динамики вращательного движения относительно неподвижной оси: момент силы, действующий на вращающееся тело, равен произведению его момента инерции на угловое ускорение. Суть этого закона можно выразить в виде уравнения

$$M = I\varepsilon, \quad (1)$$

где M – момент сил, приложенных к телу относительно оси вращения; I – момент инерции вращающегося тела, ε – угловое ускорение тела, равное второй производной от угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (2)$$

При повороте маятника на небольшой угол φ , при котором деформация кручения проволоки еще является упругой, момент возвращающих сил по закону Гука пропорционален углу закручивания проволоки:

$$M = -k\varphi, \quad (3)$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от размера, формы и свойств материала проволоки (так называемая крутильная жесткость проволоки). Знак « $-$ » указывает на то, что момент возвращающих сил (т. е. сил упругости) препятствует закручиванию проволоки.

Подставив правые части уравнений (3) и (2) в (1), получим соотношение

$$-k\varphi = I\ddot{\varphi}. \quad (4)$$

Введя обозначение $\omega_0^2 = \frac{k}{I}$, после преобразований получим уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (5)$$

Непосредственной подстановкой легко проверить, что одним из решений полученного дифференциального уравнения является, например, функция

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha_0), \quad (6)$$

где φ_0 – угловая амплитуда колебаний, $\omega_0 t + \alpha_0$ – фаза колебаний, α_0 – начальная фаза, $\omega_0 = 2\pi\nu$ – циклическая частота колебаний, ν – частота колебаний.

Следовательно, до тех пор, пока соотношение (3) будет выполняться (а оно нарушается только при больших углах поворота, когда возникает необратимая деформация), крутильные колебания являются *гармоническими*. В этом случае угловое отклонение крутильного маятника изменяется со временем по гармоническому закону (6). Циклическая частота таких колебаний будет равна $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}}$. Учитывая, что период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, получим формулу

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}. \quad (7)$$

Таким образом, период колебаний крутильного маятника T зависит только от его момента инерции I и крутильной жесткости проволоки k и не зависит от угла закручивания проволоки.

Момент инерции материальной точки вычисляется по формуле:

$$I = mr^2.$$

Момент инерции системы материальных точек равен сумме моментов инерции материальных точек системы:

$$I = \sum_i m_i r_i^2,$$

где m_i – масса i -й материальной точки системы, r_i – расстояние от i -й точки до оси вращения.

Момент инерции I твердого тела относительно некоторой оси определяется выражением

$$I = \int r^2 \cdot dm$$

или

$$I = \int_V \rho r^2 \cdot dV,$$

где r – расстояние от оси вращения до элемента массы $dm = \rho \cdot dV$, ρ – плотность, dV – элемент объема.

Если вращение тела происходит относительно оси, не проходящей через центр инерции, то, согласно теореме Гюйгенса-Штейнера, момент инерции тела I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела I_C относительно оси, проходящей через центр инерции тела параллельно данной оси, и произведения массы тела на квадрат расстояния R между осями:

$$I = I_C + mR^2, \quad (8)$$

где m – масса тела.

VI. ПОДГОТОВКА УСТАНОВКИ К РАБОТЕ

Перед началом работы установку необходимо выровнять в горизонтальной плоскости, используя круговой уровень и регулировочные ножки. Подключить электронный секундомер к рамке оптического датчика.

Внимание! Подключение производить при отключенном питании электронного секундомера.

Включить питание секундомера тумблером 13, который размещен на задней панели установки (местоположение тумблера показано стрелкой на фото 1).

Необходимо проверить, чтобы лопатка маятника свободно проходила через прорезь транспортира и рамку оптического датчика. При необходимости надо отрегулировать положение транспортира и рамки.

Рамка может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через её центр. Для того чтобы рамка начала совершать крутильные колебания, её надо повернуть на некоторый угол и отпустить.

VII. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Определение периода колебаний рамки с некоторым расстоянием от дополнительных грузов до оси вращения.

1.1. Установите два дополнительных груза массой $m=50$ г на направляющих 11 на одинаковом расстоянии R_l от оси вращения. Измерьте и запишите это расстояние в таблицу 1.

Поверните рамку маятника на угол $10^\circ-20^\circ$ и удерживайте в таком положении. Нажмите кнопку «Сброс» электронного секундомера. Если счетчик количества колебаний показывает 0, то кнопкой «+» установите количество колебаний, равное 10. Если счетчик количества колебаний показывает число, отличное от 0, то с помощью кнопки «-» установите 0, а затем кнопкой «+» установите количество колебаний, равное 10.

Отпустите рамку и следите за тем, чтобы она беспрепятственно совершала крутильные колебания. Секундомер автоматически начнет отсчет времени. Количество колебаний на секундомере отсчитывается в обратном порядке, и по окончании 10 полных колебаний секундомер самостоятельно остановит измерение времени.

1.2. Запишите в таблицу 1 время t_{11} 10 полных колебаний рамки маятника. Повторите опыт еще два раза с тем же расстоянием между грузами и запишите значения времени t_{12} и t_{13} .

1.3. Определите периоды колебаний рамки по формулам: $T_{11} = t_{11}/10$, $T_{12} = t_{12}/10$ и $T_{13} = t_{13}/10$. Результаты занесите в таблицу 1.

1.4. Найдите среднее значение периода колебаний по формуле

$$\langle T_1 \rangle = \frac{T_{11} + T_{12} + T_{13}}{3}.$$

1.5. Определите погрешности отдельных измерений по формулам:

$$\Delta T_{11} = T_{11} - \langle T_1 \rangle, \quad \Delta T_{12} = T_{12} - \langle T_1 \rangle \quad \text{и} \quad \Delta T_{13} = T_{13} - \langle T_1 \rangle.$$

1.6. Вычислите среднюю квадратичную погрешность серии измерений

$$S_{13} = \sqrt{\frac{(\Delta T_{11})^2 + (\Delta T_{12})^2 + (\Delta T_{13})^2}{3 \cdot 2}}.$$

1.7. Определите границы доверительного интервала погрешности периода ΔT_1 серии из трех измерений, умножив среднюю квадратичную погрешность S_{13} на коэффициент Стьюдента $t_{0,95;3}$ для доверительной вероятности 95% при 3 испытаниях (дополнительные сведения о способах определения границ доверительного интервала погрешности указаны в Приложении):

$$\Delta T_1 = S_{13} \cdot t_{0,95;3} = S_{13} \cdot 4,3.$$

Таблица 1 – Экспериментальные данные для измерения периода колебаний рамки маятника при расстоянии R_1 от дополнительных грузов до оси вращения

Масса груза $m = 50$ г; расстояние от груза до оси вращения $R_1 =$ м										
Номер опыта	Время колебаний, с		Период колебаний, с		Средний период колебаний, с		Погрешность измерения периода, с		Границы доверительного интервала погрешности периода, с	
1	t_{11}		T_{11}		$\langle T_1 \rangle$		ΔT_{11}		ΔT_1	
2	t_{12}		T_{12}				ΔT_{12}			
3	t_{13}		T_{13}				ΔT_{13}			
Период колебаний $T_1 = \langle T_1 \rangle \pm \Delta T_1 = (\pm)$, с.										

1.8. Запишите в таблицу 1 период колебаний рамки при выбранном расстоянии от грузов до оси вращения в виде:

$$T_1 = (\langle T_1 \rangle \pm \Delta T_1) \text{ с.}$$

Задание 2. Определение периода колебаний рамки с измененным расстоянием от дополнительных грузов до оси вращения.

2.1. Измените расстояние от дополнительных грузов до оси вращения и запишите значение R_2 в таблицу 2, составленную самостоятельно.

2.2. Повторите действия, проводившиеся в пунктах 1.2–1.8.

2.3. Запишите в таблицу 2 период колебаний рамки с измененным расстоянием от дополнительных грузов до оси вращения в виде:

$$T_2 = (\langle T_2 \rangle \pm \Delta T_2) \text{ с.}$$

Задание 3. Определение собственного момента инерции рамки маятника I_C .

3.1. Определите собственный момент инерции рамки маятника:

$$I_C = 2m \frac{T_2^2 R_1^2 - T_1^2 R_2^2}{T_1^2 - T_2^2}.$$

Задание 4. Определение крутильной жесткости проволоки k .

4.1. Определите крутильную жесткость проволоки:

$$k = 8\pi^2 m \frac{R_1^2 - R_2^2}{T_1^2 - T_2^2}.$$

Задание 5 (факультативное). Проверка аддитивности моментов инерции тел системы.

5.1. Определите моменты инерции 2-х тел из имеющегося набора сначала порознь, а потом вместе (помещать грузы надо так, чтобы центр тяжести каждого из них лежал на оси вращения системы). Выполните проверку аддитивности момента инерции системы по формуле:

$$I_{\text{системы}} = I_1 + I_2,$$

где I_1 и I_2 – моменты инерции тел системы.

Задание 6 (факультативное). Проверка теоремы Штейнера-Гюйгенса.

6.1. Для того чтобы было более удобно проверять теорему Штейнера-Гюйгенса: $I = I_C + mR^2$, преобразуем ее к другому виду. Воспользуемся следующими подстановками: $I = mI'$ и $I_C = mI'_C$.

Подставляя эти выражения в предыдущую формулу, получим:

$$I' = I'_C + R^2.$$

Если извлечь из обеих сторон предыдущего уравнения квадратный корень, то получим

$$\sqrt{I' - I'_C} = R,$$

где $I' = \frac{I}{m}$ – приведенный момент инерции системы относительно оси вращения, не проходящей через центр инерции системы, $I'_C = \frac{I_C}{m}$ – приведенный момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр системы, R – расстояние между этими осями.

6.2. Поместите два диска внутрь поворотной рамки, как можно ближе к оси вращения, которая должна проходить через центр инерции обоих дисков. Зафиксировав время 10 полных колебаний, определите период колебаний T_0 .

6.3. Увеличивайте расстояние между дисками так, чтобы их общий центр инерции всё время оставался на оси вращения системы. Рассчитайте момент инерции I'_i такой структуры при каждом значении расстояния R_i от дисков до оси рамки. Запишите данные в таблицу 3.

Таблица 3

	1	2	3	4	5	6	7	8
R_i , см								
I_i'								
$\sqrt{I_i' - I_C'}$								

6.4. Постройте график зависимости $\sqrt{I_i' - I_C'}$ от R_i .

6.5. Сделайте вывод о правильности теоремы Штейнера-Гюйгенса.

Задание 7 (факультативное). Определение моментов инерции твердых тел различной формы.

В данном задании используются значения собственного момента инерции рамки маятника I_C и крутильной жесткости проволоки k , экспериментально найденные в заданиях 3 и 4.

7.1. При помощи прижимной пластины установите исследуемое тело на рамку маятника так, чтобы ось вращения проходила строго через центр инерции тела.

7.2. Определите момент инерции исследуемого тела с помощью знаний, полученных при выполнении заданий 1-4. Экспериментальные данные и результаты расчетов запишите в таблицу 3, составленную самостоятельно.

7.3. Сравните полученные экспериментальные значения с расчетными.

VIII. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение момента инерции.
2. От чего зависит величина момента инерции тела?
3. Что характеризует момент инерции?
4. Чему равен момент инерции материальной точки, системы материальных точек, твердого тела?
5. Приведите пример расчета момента инерции твердого тела (например, однородного стержня длиной l или цилиндра радиусом R и высотой h).
6. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера и примените ее к стержню и диску.
7. Получите формулу для собственного момента инерции рамки маятника I_C .
8. Дайте вывод формулы для крутильной жесткости k проволоки.
9. Применяя к крутильному маятнику закон динамики вращательного движения, покажите, что он совершает гармонические колебания.
10. Как изменится момент инерции тела, если ось вращения перемещать параллельно самой себе, удаляя её от тела? Постройте примерный график зависимости момента инерции тела от расстояния между телом и осью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин, Д.В. Общий курс физики: учеб. пособие / Д.В. Сивухин. – 3-е изд. – М. : Наука, 1989. – Т. 1: Механика. – Гл. 5.
2. Савельев, И.В. Курс общей физики / И.В. Савельев. – Кн. 1. – М.: Наука, 2004. – Гл. 3, 5.
3. Трофимова, Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 1998. – Гл. 3, 4.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Измерить какую-нибудь величину – значит узнать, сколько раз в ней заключается однородная величина, принимаемая за единицу меры.

Произвести измерения физических величин абсолютно точно невозможно, так как всякое измерение сопровождается той или иной ошибкой. Наша оценка этой ошибки называется погрешностью.

Погрешности бывают систематические и случайные. **Систематические погрешности** порождаются: несовершенством приборов; смещением шкалы прибора; неточной установкой стрелки прибора в нулевом положении; недостаточной чувствительностью прибора; не учетом тепловых, электрических и магнитных полей, давлений, влажности и других внешних факторов, влияющих на результат измерений; приближенным характером уравнений и констант, используемых для расчета определяемых величин и так далее. Систематические погрешности либо только увеличивают, либо только уменьшают результат измерений. Систематические погрешности не описываются методами математической статистики. Их можно уменьшить только путем изучения приборов, которыми пользуются при выполнении лабораторных работ и введением соответствующих поправок в результат измерений.

Случайные погрешности вызываются неточностями отсчетов, которую невольно может допустить всякий экспериментатор. Они обусловлены несовершенством наших органов чувств, посредством которых мы получаем сведения о внешнем мире. Кроме того, случайные погрешности вызываются многочисленными трудноучитываемыми кратковременными факторами, каждый из которых приводит к незначительному изменению результатов измерений. Случайные погрешности обнаруживаются путем повторных измерений.

Случайные погрешности подчиняются законам математической статистики. Теория ошибок, построенная на теории вероятностей, позволяет определить степень влияния величины случайных погрешностей на окончательный результат измерений.

Всякий эксперимент состоит из одного или нескольких измерений. Измерения бывают прямые и косвенные. При прямых измерениях определяемая величина находится при помощи какого-либо прибора. Например, измерения длин производятся линейкой, штангенциркулем, микрометром, массы - весами, времени - секундомером, температуры - термометром, силы тока - амперметром, напряжения - вольтметром и т. п.

При косвенных измерениях определяемая величина вычисляется по результатам прямых измерений других величин, которые связаны с ней какой-либо функциональной зависимостью. Например, измерение ускорения силы тяжести производится по измерению длины маятника и периода его колебаний. Во время таких измерений допускаются погрешности, которые в свою очередь вызывают появление ошибки в определении ускорения силы тяжести. Из-за ограниченности времени в лабораторной практике экспериментатор не в состоянии провести большое количество измерений (например $n > 30$). Английский математик Уильям Госсет нашел и в 1908 году опубликовал в журнале «Биометрика» под псевдонимом «Student» (Студент) закон распределения плотности вероятности, который при 20 измерениях практически не отличается от нормального закона Гаусса распределения плотности вероятности при $n \rightarrow \infty$. Им была установлена связь погрешности измерения определяемой величины ΔT с коэффициентом Стьюдента $t_{\alpha;n}$ и средней квадратичной погрешностью

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (\Delta T_j)^2}{n(n-1)}}. \text{ Зависимость оказалась следующей:}$$

$$\Delta T = S_n \cdot t_{\alpha;n},$$

где $t_{\alpha;n}$ – коэффициент Стьюдента, зависящий от числа проведенных измерений n и доверительной вероятности α , часто называемой надежностью.

Значения коэффициента Стьюдента, часто используемые в экспериментальной практике, приведены в нижеследующей таблице. В лабораторном практикуме обычно выбирают доверительную вероятность на уровне 95%, т. е. принимают $\alpha = 0,95$.

Таблица значений коэффициентов Стьюдента

n	α												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1	1,38	2	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	0,14	0,29	0,45	0,62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7	9,9	31,6
4	0,14	0,28	0,42	0,58	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,13	0,27	0,41	0,57	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	0,13	0,27	0,41	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2	2,6	3,4	4	6,9
7	0,13	0,27	0,4	0,55	0,72	0,9	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6
8	0,13	0,26	0,4	0,55	0,71	0,9	1,1	1,4	1,9	2,4	3	3,5	5,4
9	0,13	0,26	0,4	0,54	0,71	0,9	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5
10	0,13	0,26	0,4	0,54	0,7	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
20	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
30	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2	2,5	2,8	3,7
120	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1	1,3	1,7	2	2,4	2,6	3,4
∞	0,13	0,25	0,39	0,52	0,67	0,84	1	1,3	1,6	2	2,3	2,6	3,3

Учебное издание

Составители:

*Величко Любовь Алексеевна,
Гладковский Виктор Иванович,
Максимук Елена Александровна*

Методические указания

К выполнению лабораторной работы М19

«ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ»

Ответственный за выпуск: Гладковский В.И.

Редактор: Боровикова Е.А.

Компьютерная вёрстка: Соколюк А.П.

Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 01.06.2017 г. Формат 60x84 ¹/₁₆. Бумага «Performer».
Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 0,69. Уч. изд. л. 0,75. Заказ № 495. Тираж экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный
технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.