TARASUK N.P., LUTSENKO E.V., GLADYSHCHUK A.A. Optical confiniment factor of heterostructures ZnMgCdSSe with graded index a waveguide and thick upper layer ZnMgSSe for optical pumped up lasers

The results of calculations of the optical confiniment factor for heterostructures ZnMgCdSSe are presented. For increase in efficiency of transport of nonequilibrium charge carriers in active region the design of heterostructures with graded index a waveguide is offered. To decrease of heterostructure surface influence, the thickness of upper layer of ZnMgSSe was increased. Comparison of the optical confiniment factor, the specific optical confiniment factor for heterostructures with graded index a waveguide, containing one, two, three, five, seven and nine ZnCdSe quantum dots has been carried out.

УДК 517.9

Жук А.И.

НЕАВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В АЛГЕБРЕ МНЕМОФУНКЦИЙ

В настоящей работе рассматривается следующая система уравнений с обобщенными коэффициентами на отрезке $T=[0;a]\subset R$:

$$\dot{x}^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t,x(t))\dot{L}^j(t)\,,\quad i=\overline{1,p} \qquad (1)$$

$$x(0)=x_0\,, \qquad (2)$$

где f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ – липшицевы функции, $x(t)=[x^1(t),x^2(t),...,x^p(t)]$, $x_0\in R^p$, а $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ – функции ограниченной вариации на отрезке *T*. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ непрерывны справа, $L^j(0)=L^j(0-)=0$ и $L^j(a-)=L^j(a)$, $j=\overline{1,q}$.

При решении нелинейных задач возникают принципиально неразрешимые трудности, связанные с невозможностью корректного определения произведения обобщенных функций. Существующие подходы к трактовке подобного рода систем уравнений можно классифицировать следующим образом.

Первый подход связан с попытками исследования задачи (1)–(2) в рамках теории обобщенных функций и упирается в проблему умножения разрывных функций на обобщенные, которая возникает в выражении $f^{ij}(t,x(t))\dot{L}^j(t)$. В работах [1, 2] вводится определение произведения разрывной функии на обобщенную, а затем ищется решение дифференциального уравнения.

Второй подход предполагает формальный переход к интегральному уравнению (см., например, [3]), где интеграл понимается в определенном смысле, например, в смысле Лебега-Стилтьеса, Перрона-Стилтьеса и т.д. Однако, при таком толковании решение интегрального уравнения зависит от типа интеграла и определения функции $x(t)$ в точках разрыва $L(t)$.

Третий подход (см., напр., [2]) опирается на идею аппроксимации искомого решения задачи (1)–(2) решениями обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что решения полученные в разных работах, даже в рамках одного подхода, вообще говоря различны.

Еще один подход связан с алгебрами новых обобщенных функций. Впервые алгебра была постоена в [4], а общий метод построения подобных алгебр описан в [5], там же был использован термин «мнемофункция» для обозначения новой обобщенной функции. В данной работе используется алгебра определенная в [6] (см., также [7]). Согласно этим работам уравнение (1) заменяется уравнением в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций. Решением последнего будет новая обобщенная функция. Важнейшая особенность новых обобщенных функций состоит в том, что они определяются как классы эквивалентных последовательностей гладких функций и зависят от способа аппроксимации, что позволяет охватить решения, получающиеся в результате толкования задачи (1)–(2) с помощью трех описанных выше подходов. Подобные задачи в одномерном случае рассматривались в [7, 8].

Заменяя обычные функции, присутствующие в (1), на соответствующие им новые обобщенные функции получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре мнемофункций (см., [6, 7]).

$$d_{\tilde h}\tilde{x}^i(\tilde t)=\sum_{j=1}^{q}\tilde f^{ij}(\tilde t,\tilde x(\tilde t))d_{\tilde h}\tilde L^j(\tilde t)\,,\ i=\overline{1,p} \qquad (3)$$

с начальным условием $\tilde x\big|_{[\tilde 0,\tilde h)}=\tilde x^0$, где $\tilde h=[\{h_n\}]\in H$, $\tilde a=[\{a\}]\in T$ и $\tilde t=[\{t_n\}]\in\tilde T$, $\tilde x=[\{x_n(t)\}]$, $\tilde f=[\{f_n(x)\}]$, $\tilde x^0=[\{x_n^0(t)\}]$, $\tilde L=[\{L_n(t)\}]$ и $x_{n0}\to x(0)$.

Если заменить в (3) каждую новую обобщенную функцию представителем класса ее определяющего, получим запись задачи (3) на уровне представителей

$$x_n^i(t+h_n)-x_n^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(t,x_n(t))[L_n^j(t+h_n)-L_n^j(t)]\,,\ i=\overline{1,p} \qquad (4)$$

$$x_n(t)\big|_{[0,h_n)}=x_{n0}(t)\,, \qquad (5)$$

Здесь $L_n^j(t)=(L^j*\rho_n^j)(t)=\int\limits_0^{\frac{1}{\gamma^j(n)}}L^j(t+s)\rho_n^j(s)ds$, $j=\overline{1,q}$, где $\rho_n^j(t)=\gamma^j(n)\rho^j(\gamma^j(n)t)$, $\rho^j\ge 0$, $su\rho\rho(\rho^j)\subseteq[0,1]$, $\int\limits_0^1\rho^j(s)ds=1$, а $f_n=f*\tilde\rho_n$, где $\tilde\rho_n(x_0,x_1,...,x_p)=n^p\tilde\rho(nx_0,nx_1,...,nx_p)$, $\tilde\rho\in C^\infty(R^{p+1})$, $\tilde\rho\ge 0$, $\int\limits_{[0,1]^{p+1}}\tilde\rho(x_0,x_1,...,x_p)dx_0dx_1...dx_p=1$, $su\rho\rho(\tilde\rho)\subset[0,1]^{p+1}$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка *T*. Тогда t можно представить в виде $t=\tau_t+m_th_n$, где $\tau_t\in[0,h_n)$, $m_t\in N$. Несложно видеть, что решение системы (4)–(5) можно записать в виде

$$x_n^i(t)=x_{n0}^i(\tau_t)+\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1}f_n^{ij}(\tau_t+kh_n,x_n(\tau_t+kh_n))\times$$
$$\times[L_n^j(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n^j(\tau_t+kh_n)], \qquad (6)$$

где $i=\overline{1,p}$.

В одномерном случае в работах [7, 8] показано, что предел последовательности (6) зависит от связи между $\gamma^j(n)$ и h_n. Данная работа посвящена изучению общей ситуации.

Для описания предельного поведения задачи (4)–(5) рассмотрим систему уравнений

***Жук А.И.**, старший преподаватель кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int_0^t f^{ij}(s, x(s)) dL^{jc}(s) + \\ + \sum_{\mu_r \le t} S^i(\mu_r, x(\mu_r -), \Delta L(\mu_r)), \quad i = \overline{1,p}, \tag{7}$$

где $L^{jc}(t)$ – непрерывная, а $L^{jd}(t)$ – разрывная составляющие функции $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$, μ_r – точки разрыва функции $L(t)$, $\Delta L(\mu_r) = L^d(\mu_r +) - L^d(\mu_r -)$ – величина скачка. $S^i(\mu, x, u) = \phi^i(1, \mu, x, u) - \phi^i(0, \mu, x, u)$, $x \in R^p$, $u \in R^q$, $\mu \in T$, а $\phi^i(t, \mu, x, u)$ находится из вспомогательной системы уравнений

$$\phi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^{b} u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \phi(s-, \mu, x, u)) dH(s-1) +,$$

$$+ \sum_{j=b+1}^{q} u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \phi(s, \mu, x, u)) ds, \quad i = \overline{1,p}.$$

Здесь и далее в работе интеграл $\int_u^t f(x) dL(x)$ понимается в смысле Лебега-Стилтьеса на промежутке $(u;t]$, $x \in R^p$, $u \in R^q$, $\mu \in T$, $H(s)$ – функция Хевисайда, т.е. $H(s) = 1$ при $s \ge 0$ и $H(s) = 0$ при $s < 0$. Существование и единственность решения системы (7) для всех значений параметров $x \in R^p$, $u \in R^q$, $\mu \in T$ доказано в [9].

Отметим некоторые частные случаи системы (7). Если $b = q$, то (7) можно записать в виде (8). Такие уравнения рассматривались в [2, 10]. Если $b = 0$, то вспомогательная ситема имеет вид (9). Подобное исследовалось в [2, 8, 11].

В дальнейшем под модулем вектора $x(t) = [x^1(t), x^2(t), \ldots, x^p(t)]$ будем понимать $|x(t)| = \sum_{i=1}^{p} |x^i(t)|$.

Теорема 1. *Пусть* f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ *удовлетворяют условию Липшица и ограничены.* $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ *– непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ $\gamma^j(n) \to \infty$ *так, что для* $j = \overline{1,b}$ $\gamma^j(n) h_n \to \infty$ *и для* $j = \overline{b+1,q}$ $\gamma^j(n) h_n \to 0$, *решение* $x_n(t)$ *задачи Коши (4)–(5) сходится к решению* $x(t)$ *системы уравнений (7) в* $L^1(T)$, *если* $\int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \to 0$.

В частных случаях аналогичные результаты были получены в [10, 11].

Случай Ито. Для описания предельного поведения задачи (4)–(5) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int_0^{t+} f^{ij}(s, x(s-)) dL^j(s) \quad i = \overline{1,p}. \tag{8}$$

Существование и единственность решения системы (8) для липшицевых функций f^{ij} доказано в [9].

Теорема 2. *Пусть* f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ *удовлетворяют условию Липшица и ограничены.* $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ *– непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *так, что* $1/n = o(h_n)$, *для всех* $t \in T$ *решение* $x_n(t)$ *задачи Коши (4)–(5) сходится к решению* $x(t)$ *системы уравнений (8), в* $L^1(T)$, *если* $\int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \to 0$.

В случае Стратоновича для описания предельного поведения задачи (4)–(5) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int_0^t f^{ij}(s, x(s)) dL^{jc}(s) + \\ + \sum_{\mu_r \le t} S^i(\mu_r, x(\mu_r -), \Delta L(\mu_r)), \quad i = \overline{1,p}, \tag{9}$$

где $S^i(\mu, x, u) = \phi^i(1, \mu, x, u) - \phi^i(0, \mu, x, u)$, где $x \in R^p$, $u \in R^q$, $\mu \in T$, а $\phi^i(t, \mu, x, u)$ находится из уравнения

$$\phi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^{q} u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \phi(s, \mu, x, u)) ds, \quad i = \overline{1,p}.$$

Из результатов статьи [9] вытекает, что решение системы (9) существует и единственно.

Теорема 3. *Пусть* f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ *удовлетворяют условию Липшица и ограничены.* $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ *– непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *так, что* $h_n = o(1/n)$, *для всех* $t \in T$ *решение* $x_n(t)$ *задачи Коши (4)–(5) сходится к решению* $x(t)$ *системы уравнений (9) в* $L^1(T)$, *если* $\int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \to 0$.

Непрерывный случай. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1)–(2) в случае, когда $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ – непрерывные функции ограниченной вариации на отрезке *T*. Тогда для описания предельного поведения задачи (4)–(5) рассмотрим

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int_0^t f^{ij}(s, x(s)) dL^j(s), \ i = \overline{1,p} \tag{10}$$

Существование и единственность решения системы (10) для липшицевых функций f^{ij} доказано в [9]. В этой работе также показано, что решения систем уравнений (8) и (10), вообще говоря, различны.

Теорема 4. *Пусть* f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ *удовлетворяют условию Липшица и ограничены.* $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ *– функции ограниченной вариации и непрерывны. Тогда при* $n \to \infty$ *для всех* $t \in T$ *решение* $x_n(t)$ *задачи Коши (4)–(5) сходится к решению* $x(t)$ *системы уравнений (10) в* $L^1(T)$, *если* $\int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \to 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Антосик, П. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. – М.: Мир, 1976. – С. 311.
2. Завалищин, С.Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С.Т. Завалищин, А.Н. Сесекин. – М.: Наука, 1991. – С. 256.
3. Das, P.C. Czech. Math / P.C. Das, R.R. Sharma – J. 1972. – V. 22. – № 1. – P. 145–158.
4. Colombeau, J. Elementary introduction to new generalized functions. – Amsterdam, 1985.

5. Антоневич, А.Б. Докл. АН СССР / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно – 1991. – Т. 318. – №2. – С. 267–270.
6. Лазакович, Н.В. Докл. АН Беларуси. – 1994. – Т. 38. – № 5. – С. 23–27.
7. Yablonski, A. Nonlinear Analysis. – 2005. – V. 63. – P. 171–197.
8. Ковальчук, А.Н. Математика-2005 // Известия ВУЗов / А.Н. Ковальчук, В.Г. Новохрост, О.Л. Яблонский – № 3. – С. 23–31.
9. Groh, J. Illionois J. – Math. – 1980. – V. 24 (2). – P. 244–263.
10. Жук, А.И. Труды института математики / А.И. Жук, О.Л. Яблонский – 2011. – Т. 19. – № 2. – С. 43–51.
11. Жук, А.И. Известия НАН Беларуси. Сер. физ. мат. наук / А.И. Жук, О.Л. Яблонский. – 2011. – № 1. – С. 12–16.

Материал поступил в редакцию 12.01.15

***ZHUK A.I.* Nonautonomic systems of differential equations with generalized coefficients in the algebra of mnemofunctions**

Some systems of differential equations with generalized coefficients are investigated in the algebra of mnemofunctions. The associated solutions of such systems of differential equations are obtained.

УДК 517.91: 004.021

Чичурин А.В., Швычкина Е.Н.

О КОМПЬЮТЕРНОМ МЕТОДЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ШЕСТЬЮ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ И ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЕМУ СИСТЕМ

Введение. В работе рассматривается дифференциальное уравнение Шази третьего порядка с шестью постоянными полюсами и системы двух дифференциальных уравнений, эквивалентные этому дифференциальному уравнению. Для симметрично заданных полюсов приводится процедура интегрирования заданного уравнения Шази и эквивалентной ему системы.

Уравнение Шази с шестью полюсами общего вида исследовалось в работе [1]. Там же были приведены эквивалентные ему системы двух дифференциальных уравнений, на основе которых был установлен ряд свойств этого уравнения. Для дифференциального уравнения Шази третьего порядка с шестью постоянными полюсами вида

$$w''' = \sum_{k=1}^{6} \frac{w'w''+A_k(w')^3+c_k w'}{w-a_k} + E\ w', \qquad (1)$$

коэффициенты которого $c_k,\ a_k, A_k\ \ (k=\overline{1,6})$, E являются постоянными величинами и связаны между собой соотношениями

$$\sum_{k=1}^{6} A_k = 0,\ \ \sum_{k=1}^{6} a_k A_k = -6,\ \ \sum_{k=1}^{6} a_k{}^2\ A_k = -2\sum_{k=1}^{6} a_k\ , \qquad (2)$$

$$2\ A_k^2 + \sum_j \frac{A_k - A_j}{a_k - a_j} = 0\ \ (k,j=\overline{1,6};\ j\neq k), \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1, j\neq k}^{6} \frac{c_j - c_k}{a_k - a_j} = 2\ A_k + E\ ,(k,j=\overline{1,6};\ \ j\neq k). \qquad (4)$$

Н.А. Лукашевичем была предложена замена [2], позволяющая свести это уравнение к линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Интегрирование уравнения (1) через такую редукцию было проведено в работах [3−6]. В данной работе интегрирование уравнения (1) осуществляется через построенную для него эквивалентную систему вида

$$\begin{cases} w'' = f_1(z,w)w'^2 + f_2(z,w)v + f_3(w), \\ \qquad v' = -2f_1(z,w)w'v, \end{cases} \qquad (5)$$

где $f_i(i=\overline{1,3})-$ функции по z и w.

В двух приводимых примерах рассматривается процедура интегрирования и визуализации частных решений уравнения (1), когда все действительные или комплексные полюсы симметрично расположены относительно начала координат. Последнее предположение существенно с точки зрения времени расчетов и громоздкости получаемых решений. С другой стороны, условие симметричности коэффициентов уравнения (1) позволяет создавать алгоритмы и программные функции, которые дают возможность рассмотреть общий метод интегрирования уравнения (1) при помощи эквивалентных систем. Частные решения находятся также с помощь численных методов, для которых проводится сравнительный анализ.

Материал и методика исследований. Воспользуемся результатами работы [7], где приведено решение систем (2)−(3). Кроме того, будем использовать программные модули [5, 6], позволяющие находить решение соответствующей системы Шази и приведены программные средства, позволяющие находить решение уравнения Шази в численной или аналитической форме, а также осуществлять процесс визуализации и анимации частных решений.

В работах [8, 9] рассматривается дифференциальное уравнение (1), коэффициенты которого $a_k\ \ (k=\overline{1,6})$ являются постоянными величинами, связанными соотношением $\sum_{k=1}^{6} a_k = 0$ и точки, соответствующие им, расположены симметрично относительно начала координат. В этих же работах описан метод построения эквивалентной системы (5) и приведен компьютерный метод нахождения явного вида функций, являющихся коэффициентами этой системы. В частности, определена программная функция $constrSystem[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]$, которая по заданным значениям $a_k\ \ (k=\overline{1,6})$ уравнения (1) строит эквивалентную ему систему (5).

С помощью построенной системы (5) можно свести интегрирование дифференциального уравнения (1) к интегрированию линейного дифференциального уравнения первого порядка. Действительно, поскольку система (5) является автономной, то из второго уравнения этой системы найдем

$$v = C_1 exp\left(-2\int f_1(w)dw\right),$$

где $C_1 -$ произвольная постоянная. Подставим найденное выражение в первое уравнение системы (3) и введем замену

$$(w'(z))^2 = y(w), \quad w''(z) = \frac{1}{2}y'(w)\,. \qquad (6)$$

***Чичурин Александр Вячеславович,** д.ф-м.н., профессор, профессор кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина.*
Беларусь, БрГУ им. А.С. Пушкина, 224016, г. Брест, бул. Космонавтов, 21.
***Швычкина Елена Николаевна,** к.ф-м.н., доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.