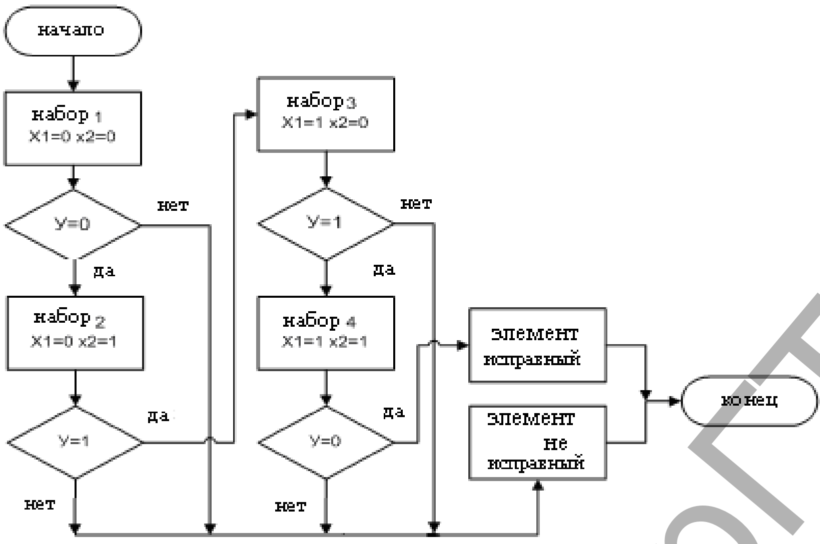

Рис. 5. Алгоритм построения теста диагностирования элемента "сложение по модулю 2"

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Діагностика цифрових та аналогових пристроїв радіоелектронної техніки: монографія / В.В. Вишнівський, М.К. Жердєв, С.В. Лєнков, В.О. Проценко; під редакцією М.К. Жердєва, С.В. Лєнкова. – К.: Знання України, 2009. – 220 с.
2. Вишнівський, В.В. Безконтактний індукційний метод діагностування радіоелектронних блоків: збірник наукових праць Військового інституту Київського національного університету імені Тараса Шевченка / В.В. Вишнівський, М.К. Жердєв, Б.П. Креденцер, В.В. Кузавков, Є.В. Редзюк – К.: ВІКНУ, 2013. – Вип. №43. – 17с.
3. Жердєв, М.К. Побудова функціональних перевірних тестів для енергодинамічного та електромагнітного методів діагностування / М.К. Жердєв, С.В. Лєнков, П.А. Шкуліпа // Система обробки інформації. – Харків. – №1(108). – С. 49–52.
4. Шкуліпа, П.А. Побудова перевірних тестів для діагностування радіоелектронних пристроїв електромагнітним методом // Наукові нотатки постійно діючого семінару науковців, здобувачів та ад'юнктів. – Випуск №24. – Київ: ВІКНУ, 2013. – С. 3–25.

Материал поступил в редакцию 06.02.15

KUZAVKOV W.V., CHETVIORKINA G.A. **Building a screening test diagnosis radio-electronic components for contactless inductive method**

The structure of modern electronic technology facilities include digital blocks, which consist of radio-electronic components (REC). Conducting quality control of the technical state of the digital REC depends on the method of diagnosis.

A promising method of diagnosing REC is a non-contact induction method of diagnosis.

Summary contactless inductive method (hereinafter - method) diagnosing digital blocks is that the parameters are used as a diagnostic signal parameters, which are induced at the terminals of the conductive parts of the measuring coil from a test unit to a digital signal.

Under the current carrying element is understood the power cord digital unit (positive or cabinet). The work is accompanied by a digital unit change in the magnetic field around the wire supply feeding a diagnostic test.

Is input REC test sequence $\tilde{x}_i$ triggers the element, respectively, with sales in its function. When this occurs on a SDS corresponding sequence of signals (feedback) $\tilde{y}_{\text{к}.i}$. If the input sequence contains $\tilde{x}_i$ a functional screening test, the total response of the rivers can be represented as a sequence of response elements on FPT $\tilde{y}_{\text{фпт}.i}$ and redundant sets $\tilde{y}_{\text{нд}.i}$. This total response $\tilde{y}_{\text{к}.i.\text{ет}}$ has reference to the case of a fully serviceable REC.

УДК 517.5

Поддубный А.М.

ТЕОРЕМА ТИПА ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Сформулируем сначала некоторые определения понятий и обозначения, используемые в работе.

Пусть $D = \{z \in C : |z| \le 1\}$ – единичный кругкомплексной плоскости C.

Определение 1 ([1]). Возрастающую дифференцируемую функцию $\lambda(t) : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\lambda(0) = 0$ будем называть мажорантой, если её производная $\lambda'(t)$ убывает.

Определение 2 ([1]). Пускай $\lambda(t)$ – мажоранта. Будем говорить, чтофункция $f : D \to C$ принадлежит классу $Lip_\lambda(D)$, если существует конечная положительная константа M такая, что выполняется неравенство

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le M\lambda(|z_1 - z_2|) \tag{1}$$

для всех $z_1, z_2 \in D$. В частности, если $\lambda(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, то класс $Lip_\lambda(D)$ – это известный класс Липшица.

В принятых обозначениях классическая теорема Харди-Литтлвуда [2, с. 397] имеет вид:

Теорема. Если функция аналитическая круге D, $\lambda(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$ и $f \in Lip_\lambda(D)$, то существует такая

Поддубный Алексей Михайлович, *кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и математической физики Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки.*

константа $A>0$, зависящаятолько от α и константы M из (1), что неравенство

$$|f'(z)|\le A\lambda'(1-|z|) \qquad (2)$$

выполняется для всех $z\in D$.

В работе [1] получена такая характеристика мажорант, для которой имеет место теорема Харди-Литтлвуда в более общем виде:

Теорема ([1]). Пускай $\lambda(t)$ – мажоранта. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Если функция f аналитическая круге D и $f\in Lip_{\lambda}(D)$, то существует такая константа $A>0$, зависящая только от α и константы M из (1), что неравенство (2) выполняется для всех $z\in D$.
2. $\lim\limits_{t\to0+}\sup\dfrac{\lambda(t)}{t\lambda'(t)}<\infty.$

Возникает задача: при каких условиях на мажоранту соответствующий результат работы [1] будет иметь место для производных высших порядков функции f. Для этого нужны дополнительные условия на мажоранту. Мы получаем ответ на этот вопрос введением понятия регулярно монотонной мажоранты, которое является обобщением понятия мажоранты.

Определение 3 ([3]). Вещественную функцию называют регулярно монотонной на некотором сегменте, если на этом сегменте она и все её производные являються знакопостоянными.

Определение 4. Мажоранту $\lambda(t)$ будем называть регулярно монотонной в интервале $(0,\infty)$, если $\left|\lambda^{(k)}(t)\right|$ убывает при $t>0$ и $k=1,2,3,\ldots$

Нижеизложенное утверждение обобщает результаты С.А. Нольдера и Д.М. Оберлина, полученные в [1].

Теорема 1. Пускай $\lambda(t)$ – регулярно монотонная мажоранта в интервале $(0,\infty)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Если функция аналитическая круге D и $f\in Lip_{\lambda}(D)$, то существует такая константа $A>0$, зависящая только от α и константы M из (1), что для всех $z\in D$ выполняется неравенство

$$\left|f^{(k)}(z)\right|\le A\left|\lambda^{(k)}(1-|z|)\right|; \qquad (3)$$

2.

$$\lim_{t\to0+}\sup\frac{\lambda(t)}{t^k\left|\lambda^{(k)}(t)\right|}<\infty. \qquad (4)$$

Доказательство. Докажем сначала, что из 2) следует 1). Если имеет место соотношение (4), то существуют такие положительные константы t_0 и C_0, что

$$\lambda(t)t^{-k}\le C_0\left|\lambda^{(k)}(t)\right| \qquad (5)$$

для $t\in(0,t_0]$. Неравенство (5) выполняетсяи для всех $t\in(0,1]$, если константу C_0 заменить на константу $C_1=\max\{C_0,\ \lambda(t_0)t_0^{-k}\ \left|\lambda^{(k)}(1)\right|^{-1}\}$. Зафиксируем $z\in D$ и пускай $0<R<1-|z|$. Поскольку $f\in Lip_{\lambda}(D)$ то, используя интегральную формулу Кошии условие (5), получаем

$$\left|f^{(k)}(z)\right|=\left|\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{|z-\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\right|=$$

$$=\left|\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f\left(z+\mathrm{R}e^{i\theta}\right)-f(z)}{R^{k+1}e^{(k+1)i\theta}}\mathrm{R}e^{i\theta}\,id\theta\right|\le$$

$$\le\frac{k!}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\left|f\left(z+\mathrm{R}e^{i\theta}\right)-f(z)\right|}{R^k}d\theta\le k!\,M\lambda(R)R^{-k}\le$$

$$\le C_1k!M\left|\lambda^{(k)}(R)\right|.$$

После перехода в последнем неравенстве к границе при $R\to1-|z|$ получаем (3).

Докажем теперь, что из (1) следует (2) рассуждая методом от противного. Для этого предположим, что (4) не вернои покажем, что существует такая аналитическая функция $f\in Lip_{\lambda}(D)$ для которой не выполняется (3).Чтобы не усложнять аналитических расчётов, проведём доказательство для случая $k=2$. В общем случае доказательство аналогично.

Поскольку, по предположению,

$$\lim_{t\to0+}\sup\frac{\lambda(t)}{t^2\left|\lambda''(t)\right|}=+\infty,$$

то существует такая монотонно убывающая последовательность значений $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ аргумента $t\in(0,1]$, для которой

$$\frac{\lambda(t_j)}{t_j^2\left|\lambda''(t_j)\right|}\ge2^{3j},\quad j=1,2,\ldots \qquad (6)$$

Определим аналитическую в круге D функцию $f(z)$ следующим образом

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}a_jz^{n_j}, \qquad (7)$$

где $a_j=2^{-j}\lambda(t_j)$, n_j – целая часть положительного числа t_j^{-1}. Легко проверить, что круг сходимости этого ряда единичный. Покажем, что таким образом построенная функция f принадлежит классу $Lip_{\lambda}(D)$. Посколькуимеет место оценка

$$\left|z_1^l-z_2^l\right|=\left|z_1-z_2\right|\times$$

$$\times\left|z_1^{l-1}+z_1^{l-2}z_2+\ldots+z_2^{l-1}\right|\le l\left|z_1-z_2\right|,$$

то

$$\left|z_1^l-z_2^l\right|\le\min\{2,l\left|z_1-z_2\right|\} \qquad (8)$$

для $l=1,2,\ldots$ и произвольных $z_1,z_2\in D$. Полагая $t=\left|z_1-z_2\right|$ и используя (8), получаем оценку

$$\sup_{z_1,z_2\in D}\frac{\left|z_1^l-z_2^l\right|}{\lambda(\left|z_1-z_2\right|)}\le$$

$$\le\max\left\{\sup_{0<t<\frac{2}{l}}\frac{lt}{\lambda(t)},\ \sup_{\frac{2}{l}<t\le2}\frac{2}{\lambda(t)}\right\}\le\frac{2}{\lambda(l^{-1})}. \qquad (9)$$

Действительно, посколькувместе с функцией $\lambda(t)$ монотонно возрастает и функция $\varphi(t)=\dfrac{t}{\lambda(t)}$, то

$$\sup_{0<t<\frac{2}{l}} \frac{l\,t}{\lambda(t)} \le \frac{2}{\lambda\left(\frac{2}{l}\right)} \le \frac{2}{\lambda\left(\frac{1}{l}\right)};$$

$$\sup_{\frac{2}{l}<t\le 2} \frac{2}{\lambda(t)} \le \frac{2}{\lambda\left(\frac{2}{l}\right)} \le \frac{2}{\lambda\left(\frac{1}{l}\right)}.$$

Учитывая (7), (9) и принятые обозначення, имеем

$$\sup_{z_1,z_2\in D} \frac{\left|f(z_1)-f(z_2)\right|}{\lambda\left(\left|z_1-z_2\right|\right)} \le \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sup_{z_1,z_2\in D} \frac{\left|z_1^{n_j}-z_2^{n_j}\right|}{\lambda\left(\left|z_1-z_2\right|\right)} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda(t_j)}{2^j}\cdot\frac{2}{\lambda\left(n_j^{-1}\right)} = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{1-j}\frac{\lambda(t_j)}{\lambda\left(n_j^{-1}\right)} \le 2,$$

Поскольку $t_j \le n_j^{-1}$, $j = 1, 2, \dots$. Таким образом, для произвольных $z_1, z_2 \in D$ имеет место неравенство

$$\left|f(z_1)-f(z_2)\right| \le 2\lambda\left(\left|z_1-z_2\right|\right)$$

этим доказано, что $f \in Lip_{\lambda}(D)$.

Покажем теперь, что для функции (7) не выполняется соотношение (3). Действительно, поскольку

$$f''(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j n_j\left(n_j-1\right) z^{n_j-2},$$

а супремум по под множеству не превышает супрему мапо множеству, то имеем

$$\sup_{z\in D} \frac{\left|f''(z)\right|}{\left|\lambda''\left(1-|z|\right)\right|} \ge \sup_{0<r<1} \frac{\sum_{j=1}^{\infty} a_j n_j\left(n_j-1\right) r^{n_j-2}}{\left|\lambda''(1-r)\right|} \ge$$

$$\ge \sup_j \sup_{0<r<1} \frac{a_j n_j\left(n_j-1\right) r^{n_j-2}}{\left|\lambda''(1-r)\right|}.$$

И поскольку супремум по точечному множеству не менее значения функции (от переменной r, $0<r<1$) в каждой точке этого множества, то, полагая $1-r=t_j$, $r = 1-t_j \ge 1-n_j^{-1}$, получаем

$$\sup_{z\in D} \frac{\left|f''(z)\right|}{\left|\lambda''\left(1-|z|\right)\right|} \ge \sup_j \frac{a_j n_j\left(n_j-1\right)\left(1-n_j^{-1}\right)^{n_j-2}}{\left|\lambda''\left(n_j^{-1}\right)\right|} =$$

$$= \sup_j \frac{\lambda(t_j)\, n_j^3\left(1-n_j^{-1}\right)^{n_j}}{2^j\left|\lambda''\left(n_j^{-1}\right)\right|\left|\left(n_j-1\right)\right|} \ge \frac{1}{e}\sup_j \frac{\lambda(t_j)\, n_j^2}{2^j\left|\lambda''\left(n_j^{-1}\right)\right|}.$$

Учитывая, что если $n_j \le t_j^{-1}$, то $2n_j > t_j^{-1}$, а также условие, что производные $\left|\lambda^{(k)}(t)\right|$ монотонно убывають, имеем

$$\sup_{z\in D} \frac{\left|f''(z)\right|}{\left|\lambda''\left(1-|z|\right)\right|} \ge \frac{1}{e}\sup_j \frac{\lambda(t_j)}{2^{j+2}t_j^2\left|\lambda''(t_j)\right|}.$$

Из последнего неравенства и соотношения (6) получаем

$$\sup_{z\in D} \frac{\left|f''(z)\right|}{\left|\lambda''\left(1-|z|\right)\right|} = \infty,$$

что и доказывает, условие (3)для функции (7) не выполняется.

В случае произвольного натурального k теорема доказывается аналогично. Следует отметить только, что вобщем случае на основе предположения про ложность условия (4) делаем вывод, что существует такая монотонно убывающая последовательность значений $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ аргумента $t\in(0,\ 1]$, для которой

$$\frac{\lambda(t_j)}{t_j^k\left|\lambda^{(k)}(t_j)\right|} \ge 2^{(k+1)j}, \quad j = 1, 2, \dots.$$

Теорема доказана.

Отметим, что при $k=1$ теорема 1 доказана в [3].

Замечание. Примером регулярно монотонной мажоранты, которая не удовлетворяет условие (4) есть функция $\lambda(t) = \ln(t+1)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Nolder, C.A. Moduli of continui tyanda Hardy – Little wood theorem / C.A. Nolder, D.M. Oberlin // Lecture Notesin Math. – 1987. – № 1351. – P. 265–272.
2. Голузин, Г.М. Геометрическаятеорияфункций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 623 с.
3. Бернштейн, С.Н. О некоторых свойствах регулярно монотонныхфункций // Собрание сочинений. – М.: Изд-во АНСССР, 1952. – Т. 1. – С. 350–360.

Материал поступил в редакцию 13.02.15

***PIDDUBNY O.M.* Hardy-Littlewood type theoremsfor higher derivatives**

In this paper we researched the issues about the boundary behavior of derivatives of analytic functions in the unit circle in the complex plane. The obtained results generalize some results of C.A. Nolder and D.M. Oberlin.