

УДК 539.3

Игнатов А.Ю., Игнатюк В.И.

К РАСЧЁТУ ТОНКИХ ПОДКРЕПЛЁННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

Введение. Подкрепленные цилиндрические оболочечные покрытия, являясь достаточно эффективными сооружениями, широко применяются при строительстве ангаров, складов и т. п. В процессе эксплуатации они подвергаются действию порывов ветра, которые создают внешнее давление на покрытия. При этом несущая способность оболочечных покрытий чаще всего определяется их устойчивостью.

Постановка задачи. Рассматривается ребристое цилиндрическое покрытие длиной L , которое представляет собой систему, состоящую из оболочки (тонкой многослойной обшивки) и жёстко с ней соединённых по линиям контакта продольных (стрингеры) и кольцевых (шпангоуты) рёбер (рис. 1), нагруженное равномерным внешним давлением q . Криволинейная ортогональная система координат выбрана так, что координатные линии x и y совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности обшивки (радиусом R). Положение произвольных точек оболочки (ребра), не лежащих в координатной (срединной) поверхности, определяется третьей координатой z , нормальной к линиям $x = const$, $y = const$ и направленной к центру кривизны обшивки.

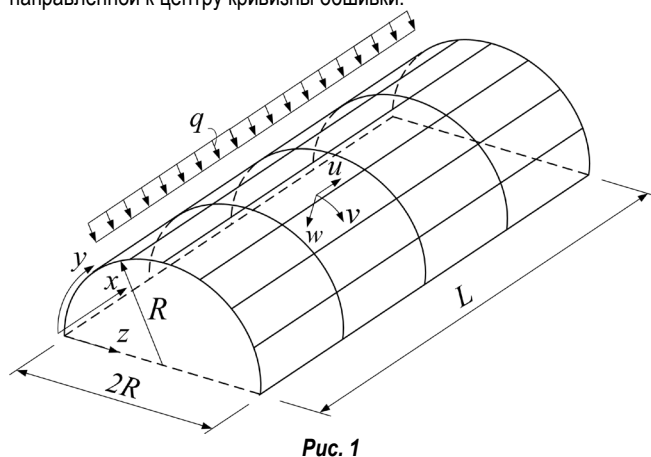


Рис. 1

Предполагается, что рёбра одного направления имеют одинаковые упругие и геометрические характеристики и равномерно размещены по обшивке вдоль направлений координатных линий x , y ; что края (плоскости концов) продольных рёбер, как и края обшивки, лежат в одной координатной плоскости yz .

Обшивка имеет постоянную толщину h и собрана из \bar{m} однородных ортотропных слоёв также постоянной толщины t_s , симметрично расположенных относительно её срединной поверхности. Предполагается, что слои при деформации остаются упругими и работают совместно без скольжения и что главные направления упругости в каждой точке каждого слоя обшивки совпадают с направлениями координатных линий.

Принимается, что расчёт обшивки может быть выполнен с использованием линейной теории тонких упругих оболочек, основанной на сдвиговой модели типа Тимошенко [5], а для расчёта кольцевых рёбер (одномерных стержней) применима теория криволинейных стержней с учётом деформаций сдвига. При этом гипотеза прямолинейного недеформируемого элемента принимается справедли-

вой как для всего пакета слоёв, так и в целом для системы "обшивка-рёбро" (в местах наличия рёбер). Учитываются дискретность расположения рёбер [2] и их несимметричность относительно обшивки.

Исходное докритическое состояние оболочки считается безмоментным.

Геометрические соотношения. Согласно сдвиговой модели типа Тимошенко принимается, что отрезок нормали к срединной поверхности в результате деформации поворачивается, не искривляясь и не изменяя своей длины, в плоскостях xz , yz на углы:

$$\alpha_1 = -\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1 = \varphi_1 + \psi_1;$$

$$\alpha_2 = -\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_2 = \varphi_2 + \psi_2. \quad (1)$$

Здесь обозначено: $\varphi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}$, $\varphi_2 = -\frac{\partial w}{\partial y}$ – углы поворота

нормали к срединной поверхности по направлениям координатных линий x и y соответственно; ψ_1 и ψ_2 – углы сдвига, то есть углы поворота прямолинейного отрезка по отношению к нормали к деформированной срединной поверхности соответственно по направлениям осей x и y в результате сдвига; w – величина прогиба срединной поверхности оболочки в направлении оси z .

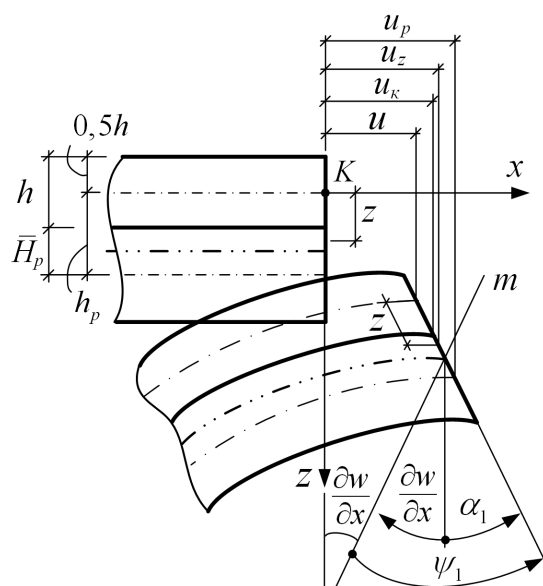


Рис. 2

Перемещение произвольной точки, лежащей на расстоянии (до деформации) z от срединной поверхности, равны

$$u_z = u + z\alpha_1; v_z = v + z\alpha_2; w_z = w. \quad (2)$$

Нормальное к срединной поверхности оболочки перемещение принимается независимым от координаты z . Таким образом, смещение произвольной точки оболочки характеризуется пятью величинами: тремя

Игнатов Алексей Юрьевич, аспирант Брестского государственного технического университета.

Игнатюк Валерий Иванович, кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой строительной механики Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Строительство и архитектура

перемещениями u , v и w и двумя углами поворота α_1 и α_2 .

Компоненты деформации в произвольной точке оболочки, не лежащей в срединной поверхности и относящейся к s -му слою обшивки, через компоненты перемещений этой точки $u_z^s = u_z^s(x, y, z)$, $v_z^s = v_z^s(x, y, z)$ и $w_z^s = w_z^s(x, y, z)$ выражаются известными соотношениями [3], которые при пренебрежении величиной z/R по сравнению с единицей, принимают вид

$$\begin{aligned} e_x^s &= \frac{\partial u_z^s}{\partial x}, & e_{xz}^s &= \frac{\partial u_z^s}{\partial z} + \frac{\partial w_z^s}{\partial x}, \\ e_y^s &= \frac{\partial v_z^s}{\partial y}, & e_{yz}^s &= \frac{\partial v_z^s}{\partial z} + \frac{\partial w_z^s}{\partial y}, \\ e_z^s &= \frac{\partial w_z^s}{\partial z}, & e_{xy}^s &= \frac{\partial u_z^s}{\partial y} + \frac{\partial v_z^s}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя в (3) выражения (2) и (1), получим выражения для компонент деформации в произвольной точке обшивки через компоненты деформации срединной поверхности и компоненты деформации поперечного сдвига

$$\begin{aligned} e_x^s &= \varepsilon_1 + z(\chi_1 + \Gamma_1); & e_{xz}^s &= \Gamma_5; \\ e_y^s &= \varepsilon_2 + z(\chi_2 + \Gamma_2); & e_{yz}^s &= \Gamma_4; \\ e_z^s &= 0; & e_{xy}^s &= \omega + z(\tau + \Gamma_3). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь обозначено: ε_1 , ε_2 – относительные продольные удлинения срединной поверхности обшивки в направлениях осей соответственно X и Y ; ω – сдвиг срединной поверхности; χ_1 , χ_2 – изменения кривизн срединной поверхности в направлениях осей x и y ; τ – кручение срединной поверхности оболочки. Эти компоненты деформации срединной поверхности кругового цилиндрического покрытия определяются выражениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}, & \omega &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \chi_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \chi_2 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \tau &= -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (5)$$

соответствующими общей технической теории тонких оболочек [3].

В (4) участвуют также компоненты деформации, учитывающие сдвиги в оболочке и определяющиеся следующими выражениями

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, & \Gamma_2 &= \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, & \Gamma_3 &= \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \\ \Gamma_4 &= \psi_2, & \Gamma_5 &= \psi_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Для описания деформированного состояния рёбер необходимо определить три составляющие перемещений центров тяжести их поперечных сечений (u_i , v_i , w_i и u_j , v_j , w_j соответственно для i -го стрингера и j -го шпангоута), а также для сдвига ψ_i , ψ_j и закручивания $\varphi_{кри}$, $\varphi_{крj}$.

Условия жёсткого соединения рёбер и обшивки дают возможность установить определённые зависимости между компонентами их перемещений. На рис. 2 представлен пример деформации обшивки рёбер при заданных условиях их взаимодействия. Учитывая это, а также соотношения (2) несложно выразить компоненты перемещений рёбер через компоненты перемещений соответствующих точек срединной поверхности обшивки.

Запишем для этого условия равенства перемещений в касательной обшивке плоскости точек контакта рёбер и собственно оболочки, которые будут иметь вид

$$u(x, y_i) + \frac{h}{2} \alpha_1(x, y_i) = u_i(x) - \bar{H}_i \alpha_{1i}(x),$$

$$v(x, y_i) + \frac{h}{2} \alpha_2(x, y_i) = v_i(x) - \bar{H}_i \alpha_{2i}(x), \quad (7)$$

$$u(x_j, y) + \frac{h}{2} \alpha_1(x_j, y) = u_j(y) - \bar{H}_j \alpha_{1j}(y),$$

$$v(x_j, y) + \frac{h}{2} \alpha_2(x_j, y) = v_j(y) - \bar{H}_j \alpha_{2j}(y), \quad (8)$$

где \bar{H}_i , \bar{H}_j – расстояние соответственно от осей i -го стрингера и j -го шпангоута до поверхности их контакта с обшивкой; эти расстояния здесь, вследствие принятия всех рёбер одного направления одинаковыми, будут постоянными величинами, т.е. можно записать $\bar{H}_i = \bar{H}_c$, $\bar{H}_j = \bar{H}_w$ (при принятом правиле знаков эти расстояния будут положительными для внутренних рёбер); X_i и Y_j – координаты линий сопряжения рёбер с обшивкой; α_{1i} , α_{2i} и α_{1j} , α_{2j} – полные углы поворота (с учётом сдвига) прямолинейного элемента поперечного сечения соответственно стрингеров и шпангоутов относительно осей x и y . Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеет место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жёсткого соединения рёбер с обшивкой равенства соответствующих углов сдвига и закручивания, получим следующие соотношения, включающие преобразованные зависимости (7), (8) и указанные равенства:

$$\begin{aligned} u_i(x) &= u(x, y_i) + h_c \alpha_1(x, y_i), \\ v_i(x) &= v(x, y_i) + h_c \alpha_2(x, y_i), \\ w_i(x) &= w(x, y_i), & \psi_i(x) &= \psi_1(x, y_i), \\ \varphi_{кри}(x) &= \varphi_2(x, y_i); \\ u_j(y) &= u(x_j, y) + h_w \alpha_1(x_j, y), \\ v_j(y) &= v(x_j, y) + h_w \alpha_2(x_j, y), & w_j(y) &= w(x_j, y), \\ \psi_j(y) &= \psi_2(x_j, y), & \varphi_{крj}(y) &= \varphi_1(x_j, y). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $h_c = 0,5h + \bar{H}_c$, $h_w = 0,5h + \bar{H}_w$ – эксцентриситеты подкрепления соответственно стрингеров и шпангоутов, ψ_i , ψ_j – углы сдвига для стрингеров и шпангоутов.

Соотношения (9), (10) позволяют с помощью (3) и (5) выразить компоненты тензора деформаций рёбер через компоненты перемещений точек срединной поверхности обшивки.

Таким образом, принятие гипотезы прямолинейного недеформируемого элемента для всего пакета ребристой многослойной оболочки в целом освобождает от необходимости рассмотрения перемещений и деформаций каждого слоя и рёбер в отдельности. Все характеристики деформации и перемещения каждого слоя и рёбер получаются из элементов геометрии оболочки, перемещений срединной поверхности и углов поперечного сдвига в срединной поверхности оболочки.

Соотношения упругости и выражения усилий. Уравнения обобщённого закона Гука для многослойного ортотропного покрытия [3] с учётом того, что три плоскости упругой симметрии в каждом слое перпендикулярны к соответствующим ортогональным координатным направлениям X , Y , Z и пренебрегая напряжениями

σ_z^s , получим в виде

$$e_x^s = \frac{1}{E_1^s} \sigma_x^s - \frac{\nu_{12}^s}{E_2^s} \sigma_y^s; \quad e_{yz}^s = \frac{1}{G_{23}^s} \tau_{yz}^s;$$

$$e_y^s = -\frac{\nu_{21}^s}{E_1^s} \sigma_x^s + \frac{1}{E_2^s} \sigma_y^s; \quad e_{xz}^s = \frac{1}{G_{13}^s} \tau_{xz}^s; \quad (11)$$

$$e_z^s = 0; \quad e_{xy}^s = \frac{1}{G_{12}^s} \tau_{xy}^s,$$

где в силу симметрии этих уравнений существует зависимость $\nu_{12}^s E_1^s = \nu_{21}^s E_2^s$. Число упругих постоянных здесь равно семи: E_1^s , E_2^s – модули Юнга для материала s -того слоя обшивки соответственно по направлениям x и y ; G_{23}^s , G_{13}^s , G_{12}^s – модули сдвига материала s -того слоя обшивки, характеризующие изменение углов между главными направлениями y и z , x и z , x и y соответственно; ν_{12}^s , ν_{21}^s – коэффициенты Пуассона материала s -того слоя обшивки.

Решая уравнения (11) относительно составляющих тензора напряжений в каждом слое оболочки и учитывая при этом соотношение (4), получим

$$\sigma_x^s = B_{11}^s \varepsilon_1 + B_{12}^s \varepsilon_2 + z \left[B_{11}^s (\chi_1 + \Gamma_1) + B_{12}^s (\chi_2 + \Gamma_2) \right];$$

$$\sigma_y^s = B_{21}^s \varepsilon_1 + B_{22}^s \varepsilon_2 + z \left[B_{21}^s (\chi_1 + \Gamma_1) + B_{22}^s (\chi_2 + \Gamma_2) \right]; \quad (12)$$

$$\tau_{yz}^s = B_{44}^s \Gamma_4; \quad \tau_{xz}^s = B_{55}^s \Gamma_5;$$

$$\tau_{xy}^s = B_{66}^s \omega + z B_{66}^s (\tau + \Gamma_3),$$

где для коэффициентов B_{jk} имеем

$$B_{11}^s = \frac{E_1^s}{1 - \nu_{12}^s \nu_{21}^s}; \quad B_{22}^s = \frac{E_2^s}{1 - \nu_{12}^s \nu_{21}^s};$$

$$B_{12}^s = B_{21}^s = -\frac{\nu_{12}^s E_1^s}{1 - \nu_{12}^s \nu_{21}^s};$$

$$B_{44}^s = G_{23}^s; \quad B_{55}^s = G_{13}^s; \quad B_{66}^s = G_{12}^s.$$

Проинтегрировав напряжения по высоте сечения (по всем слоям обшивки), получим выражения внутренних сил в обшивке в виде:

$$N_1 = C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2; \quad N_2 = C_{12} \varepsilon_1 + C_{22} \varepsilon_2;$$

$$T_{12} = T_{21} = C_{66} \omega; \quad H_{12} = H_{21} = D_{66} \tau + D_{66} \Gamma_3;$$

$$M_1 = D_{11} (\chi_1 + \Gamma_1) + D_{12} (\chi_2 + \Gamma_2);$$

$$M_2 = D_{12} (\chi_1 + \Gamma_1) + D_{22} (\chi_2 + \Gamma_2);$$

$$Q_1 = k_0 C_{55} \Gamma_5; \quad Q_2 = k_0 C_{44} \Gamma_4,$$

где N_1 и N_2 , T_{12} и T_{21} , M_1 и M_2 – нормальные усилия, сдвигающие усилия и изгибающие моменты в направлениях осей x и y соответственно; Q_1 , Q_2 – поперечные силы в плоскостях, перпендикулярных соответственно координатным линиям x и y ; H_{12} , H_{21} – крутящие моменты относительно осей x и y соответственно; k_0 – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по толщине обшивки; C_{jk} , D_{jk} – жёсткости обшивки, определяемые выражениями:

$$C_{jk} = 2 \left[B_{jk}^{m_c+1} h_{m_c+1} + \sum_{s=1}^{m_c} B_{jk}^s (h_s - h_{s+1}) \right];$$

$$D_{jk} = 2 \left[B_{jk}^{m_c+1} h_{m_c+1}^3 + \sum_{s=1}^{m_c} B_{jk}^s (h_s^3 - h_{s+1}^3) \right].$$

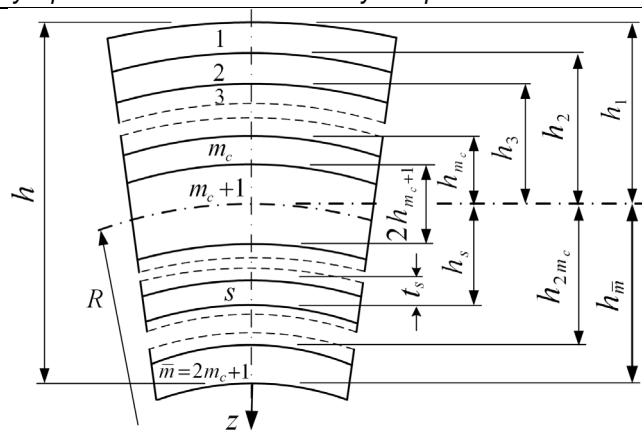


Рис. 3

Аналогично выражения усилий в ребрах получим в виде:

$$N_{1c} = E_c A_c \frac{\partial u_i}{\partial x}; \quad M_{1c} = E_c J_{yc} \left(-\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right);$$

$$M_{kpc} = G_c J_{kpc} \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial x}; \quad Q_{1c} = k_c G_c A_c \psi_i;$$

$$N_{2w} = E_w A_w \left(\frac{\partial v_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R} \right); \quad Q_{2w} = k_w G_w A_w \psi_j;$$

$$M_{2w} = E_w J_{xw} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} - \frac{w_j}{R^2} \right);$$

$$M_{kpw} = G_w J_{kpw} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right).$$

Подставляя в эти выражения (9), (10) и учитывая соотношения (5) и (6), формулы для усилий и моментов в ребрах получим в виде

$$N_{1c} = E_c A_c [\varepsilon_1 + h_c (\chi_1 + \Gamma_1)]; \quad Q_{1c} = k_c G_c A_c \Gamma_5;$$

$$M_{kpc} = 0,5 G_c J_{kpc} \tau; \quad M_{1c} = E_c J_{yc} (\chi_1 + \Gamma_1);$$

$$N_{2w} = E_w A_w \left(\varepsilon_2 + h_w (\chi_2 + \Gamma_2) - \frac{w}{R} \right);$$

$$M_{2w} = E_w J_{xw} \left(\chi_2 + \Gamma_2 - \frac{w}{R^2} \right); \quad Q_{2w} = k_w G_w A_w \Gamma_4;$$

$$M_{kpw} = G_w J_{kpw} \left[\frac{1}{2} \tau + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{h_w}{R} \left(\frac{1}{2} \tau + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \right].$$

Полная потенциальная энергия. Потенциальная энергия упругой системы, подверженной действию заданных нагрузок, определяется как работа, совершаемая внутренними и внешними силами при переводе системы из деформированного в начальное, недеформированное состояние. Обозначив потенциальную энергию внутренних сил через U и внешних сил через W для потенциальной энергии системы \mathcal{E} получим выражение

$$\mathcal{E} = U + W. \quad (13)$$

Потенциальная энергия внутренних сил, линейно зависящих от деформации, состоит из потенциальной энергии деформации собственно оболочечного покрытия (многослойной обшивки) U_0 и потенциальной энергии деформации подкрепляющих ребер U_c и U_w .

Потенциальная энергия деформации многослойной обшивки (рис. 3) согласно [6] и принятым гипотезам (в соответствии которым

пренебрегается нормальными напряжениями σ_z на площадках, параллельных срединной поверхности) записывается в виде:

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{\pi R} \left\{ \sum_{s=1}^m \int_{h_{s-1}}^{h_s} (\sigma_x^s e_x^s + \sigma_y^s e_y^s + \tau_{xy}^s e_{xy}^s + \tau_{xz}^s e_{xz}^s + \tau_{yz}^s e_{yz}^s) dz \right\} dx dy. \quad (14)$$

Подставляя в (14) выражения (11) и (12), интегрируя и суммируя по слоям, и учитывая (5) и (6), получим выражение потенциальной энергии деформации обшивки в виде

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{\pi R} [C_{11} \varepsilon_1^2 + 2C_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + C_{22} \varepsilon_2^2 + C_{66} \omega^2 + D_{11} \chi_1^2 + 2D_{12} \chi_1 \chi_2 + D_{22} \chi_2^2 + D_{66} \tau^2 + k_0 C_{55} \Gamma_5^2 + k_0 C_{44} \Gamma_4^2 + D_{11} (2\chi_1 \Gamma_1 + \Gamma_1^2) + 2D_{12} (\chi_1 \Gamma_2 + \chi_2 \Gamma_1 + \Gamma_1 \Gamma_2) + D_{22} (2\chi_2 \Gamma_2 + \Gamma_2^2) + D_{66} (2\tau \Gamma_3 + \Gamma_3^2)] dx dy. \quad (15)$$

Потенциальная энергия деформации ребер (стрингеров и шпангоутов), подкрепляющих обшивку, записывается с учётом энергий изгиба, сжатия, кручения и сдвига. Принимается, что энергиями изгиба и сдвига ребер из их плоскости можно пренебречь. Тогда:

$$U_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \int_0^L \left[E_c A_c \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + k_c G_c A_c \psi_c^2 + E_c J_{yc} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + G_c J_{kc} \left(\frac{\partial \varphi_{kp i}}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad (16)$$

$$U_w = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_1} \int_0^{\pi R} \left[E_w A_w \left(\frac{\partial v_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R} \right) + k_w G_w A_w \psi_j^2 + E_w J_{xw} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} - \frac{w_j}{R^2} \right) + G_w J_{kw} \left(\frac{\partial \varphi_{kp j}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2 \right] dy. \quad (17)$$

Здесь обозначено: k, k_1 – число стрингеров и шпангоутов; E_c, G_c – модули упругости и сдвига материала стрингеров; A_c, J_{yc}, J_{kc} – площадь, момент инерции поперечного сечения стрингера относительно оси, проходящей через его центр тяжести, и момент инерции при кручении; $E_w, G_w, A_w, J_{xw}, J_{kw}$ – соответствующие величины для шпангоутов; k_c, k_w – коэффициенты, учитывающие неравномерность распределения касательных напряжений по сечениям стрингеров и шпангоутов соответственно.

Потенциальная энергия внешних сил определяется произведением сил на перемещения и может быть выражена через радиальное сжимающее напряжение в покрытии σ_y , возникающее в докритическом состоянии при действии внешней нагрузки q и связанное с ним, учитывая, что напряжение возникает и в обшивке, и в ребрах, соотношением

$$\sigma_y = k_{Aw} q \frac{R}{h} \text{ или } q = \frac{\sigma_y h}{k_{Aw} R}, \text{ где } k_{Aw} = 1 / \left(1 + \frac{A_w}{h l_w} \right). \quad (18)$$

Для определения потенциальной энергии внешней нагрузки q учтём влияние кольцевых усилий $S=qR$ на изгиб оболочки путём

введения эквивалентной радиальной нагрузки, интенсивность которой определяется по формуле [7]:

$$\tilde{q} = -S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2} \right) \quad (19)$$

Эта нагрузка при переводе оболочки из деформированного в начальное, недеформированное состояние совершает работу

$$W_0 = -\frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{\pi R} \tilde{q} w dx dy = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{\pi R} S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2} \right) w dx dy.$$

Аналогично получим и выражение для работы внешнего радиального давления, действующего на шпангоуты.

Потенциальная энергия внешней нагрузки с учетом соотношения (19) и того, что в оболочке $S_0 = \sigma_y h$, а в шпангоутах

$S_w = \sigma_y A_w$, примет вид

$$W = W_0 + W_w = \frac{h}{2} \int_0^L \int_0^{\pi R} \left[\sigma_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2} \right) w \right] dx dy + \frac{A_w}{2} \sum_{j=1}^{k_1} \int_0^{\pi R} \left[\sigma_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2} \right) w_j \right] dy. \quad (20)$$

Подставляя в (15) выражения (5) и (6), а в (16), (17) и (20) соотношения (9), (10), получим согласно (13) выражение полной потенциальной энергии через перемещения срединной поверхности оболочки в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = & \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{\pi R} \left\{ C_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) + \right. \\ & + C_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right)^2 + C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \\ & + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \\ & + k_0 C_{55} \psi_1^2 + k_0 C_{44} \psi_2^2 + D_{11} \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right] - \\ & - 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) + \\ & + D_{22} \left[\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right] + \\ & + D_{66} \left[-4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ & + \sigma_y h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2} \right) w \left. \right\} dx dy + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \int_0^L \left\{ E_c A_c \left[\frac{\partial u}{\partial x} + h_c \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \right]^2 + \right. \\ & + k_c G_c A_c \psi_1^2 + E_c J_{yc} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + G_c J_{kc} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \left. \right\} \Big|_{y=y_i} dx + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_1} \int_0^{\pi R} \left\{ E_w A_w \left[\frac{\partial v}{\partial y} + h_w \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) - \frac{w}{R} \right]^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+k_w G_w A_w \psi_2^2 + E_w J_{xw} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{w}{R^2} \right)^2 + \\
 &+G_w J_{\text{кр} w} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{h_w}{R} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \right]^2 + \\
 &+\sigma_y A_w \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2} \right) w \Big|_{x=x_j} dy.
 \end{aligned}$$

Определение критических напряжений на основе энергетического метода связано с выбором аппроксимирующих выражений для функций перемещений, описывающих деформированное состояние ребристого цилиндрического оболочечного покрытия при потере устойчивости и удовлетворяющих граничным условиям. Будем считать, что в точках опирания покрытия обеспечены условия шарнирного опирания и что до потери устойчивости оболочка сохраняет свою первоначальную (цилиндрическую) форму.

Расположив начало координат в торце покрытия (рис. 1), применим выражения для аппроксимирующих функций перемещений в виде:

$$\begin{aligned}
 u &= a_{mn} \cos \frac{m \pi x}{L} \sin \frac{n y}{R}; \\
 v &= b_{mn} \sin \frac{m \pi x}{L} \sin \frac{n y}{R}; \\
 w &= c_{mn} \sin \frac{m \pi x}{L} \sin \frac{n y}{R}; \\
 \psi_1 &= d_{mn} \cos \frac{m \pi x}{L} \sin \frac{n y}{R}; \\
 \psi_2 &= e_{mn} \sin \frac{m \pi x}{L} \cos \frac{n y}{R},
 \end{aligned} \quad (22)$$

где m, n – число полуволн вдоль образующей (вдоль оси X) и окружности обшивки (вдоль криволинейной оси y); $a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, d_{mn}, e_{mn}$ – неизвестные константы.

Подставляя аппроксимирующие функции перемещений (22) в выражения полной потенциальной энергии (21) и применяя к ней условие минимума энергии [4], можно получить систему разрешающих уравнений для определения критических нагрузок.

Заключение. В статье представлена постановка задачи расчета на устойчивость тонких подкрепленных цилиндрических покрытий при внешнем давлении, приведены соотношения упругости, получены геометрические соотношения, выражения усилий, полной потенциальной энергии ребристого покрытия в перемещениях. Приняты аппроксимирующие функции для перемещений, с использованием которых планируется решение задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Амбарцумян, С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. Методы расчета оболочек: в 5 т. – Т. 2: Теория ребристых оболочек / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий – К.: Наукова думка, 1980. – 368 с.
3. Власов, В.З. Общая теория оболочек и её приложения в технике. – М.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
4. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
5. Вольмир, А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
6. Новожилов, В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432 с.
7. Тимошенко, С. П. Устойчивость упругих систем. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 532 с.

Материал поступил в редакцию 17.02.09

IGNATOV A.YU, IGNATIUK V.I. Some considerations in the stability analysis of thin cylindrical ribbed shells subjected to external pressure

The paper presents the general setting of the problem, elasticity ratios, as well as geometric ratios, stress expressions, total potential energy of a ribbed shell in displacements and approximating functions for displacements which have been respectively obtained and determined.

УДК 697.1, 691.86

Протасевич А.М., Крутилин А.Б.

РАСЧЕТ ТЕПЛОВЛАЖНОСТНОГО РЕЖИМА НАРУЖНЫХ СТЕН ЗДАНИЙ С ВЕНТИЛИРУЕМОЙ ВОЗДУШНОЙ ПРОСЛОЙКОЙ И ЗАЩИТНЫМИ ЭКРАНАМИ

Введение. Для повышения теплозащитных качеств наружных стен эксплуатируемых и вновь строящихся зданий в Республике Беларусь широко используется их наружная теплоизоляция. Теплоизоляция выполняется с использованием как “мокрых”, так и “сухих” технологий.

Преобладающей технологией ведения работ на настоящий момент являются “мокрые” способы теплоизоляции с легкими штукатурными системами, как наиболее дешевые. Основным недостатком указанных систем — недолговечность наружного укрывного штукатурного слоя [1 – 3].

Более долговечна в эксплуатации теплоизоляция стен зданий, выполненная по “сухой” технологии и в частности с вентилируемыми воздушными прослойками – “вентилируемый фасад”. Особенность данных способов утепления состоит в укрытии слоя теплоизоляции облицовочными экранами, защищающими ее от внешних атмосферных воздействий. Панели экрана размещаются на некотором расстоянии от теплоизоляции и образуют вентилируемую воздушную прослойку (далее ВВП). Экран монтируется на металлических кронштейнах подоблицовочной конструкции, закрепленных на стене. Изготавливаются экраны часто из металлического профилированного сайдинга.

Исследованиям теплотехнических особенностей ВВП и их влиянию на тепловлажностный режим наружных стен посвящено ряд работ [4 – 8]. В указанных работах решались частные вопросы, связанные с нормализацией тепловлажностного режима ограждающих конструкций, защиты их от перегрева и т.д. В то же время остались невыясненными вопросы расчета потока влаги, диффундирующей через ограждение и ее распределение по толще стены, ассимиляция ее воздухом в ВВП, условия конденсации водяного пара на внутренней поверхности экрана и др. Чтобы ответить на указанные вопросы были выполнены натурные экспериментальные исследования на эксплуатируемых зданиях с “вентилируемыми фасадами” [9, 10]. Результаты исследований позволили решить ряд вопросов проектирования теплоизоляции с ВВП, оценить влияние воздушного потока в прослойке на продольную и поперечную фильтрацию воздуха в слое теплоизоляции и др. Но они не дали ответа на вопрос о влиянии взаимосвязанных процессов переноса теплоты, влаги и воздуха на тепловлажностный режим системы “наружная стена + теплоизоляция “вентилируемый фасад”. Решение указанной задачи принято выполнять с использованием математического моделирования.