МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

РЯДЫ.
ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА.

Задачи и упражнения.

Брест 2004

УДК (517.531 + 517.445) (07)

В настоящей методической разработке рассматриваются задачи и упражнения по числовым и функциональным рядам, функциям комплексной переменной и преобразованию Лапласа, изучаемые студентами инженерно-технических специальностей. Часть задач сопровождается решениями или указаниями, задачи, предназначенные для индивидуальной работы, - ответами. В начале параграфов даются краткие теоретические сведения.

Составители: Тузик Т.А., доцент,
Журавель М.Г., ассистент.

Рецензент: зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений БрГУ им. А.С. Пушкина, к.ф.-м.н., доцент А.В. Чичурин.

СОДЕРЖАНИЕ

I. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

I.I. Числовые ряды. Необходимый признак сходимости.

Рядом называется бесконечная сумма вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad (1)$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ - последовательность чисел или функций.

Ряд *задан*, если известен его общий член $u_n = f(n),\ n \in N$. n – ой частичной суммой ряда называется сумма n первых членов ряда: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Конечный предел частичной суммы при $n \to \infty$ называется *суммой* ряда: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Если S = числу, то ряд называется <u>сходящимся.</u> Если предел частичной суммы не существует или бесконечен, то ряд называется <u>расходящимся</u>.

Необходимый признак сходимости. Если ряд (1) сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Если общий член *не стремится к нулю*, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд *расходится.*

Геометрический ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}, \quad \text{\textit{если}} \ |q| < 1.$$

Гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty, \text{ т.е. расходится.}$$

Задания для аудиторной работы

1. Записать простейшую формулу n-го члена ряда по указанным членам

а) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \quad .$

б) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots + u_n + \ldots .$

в) $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \ldots + u_n + \ldots .$

г) $1 + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10} + \ldots + u_n + \ldots .$

2. Выписать 4-5 первых членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ по известному общему члену

а) $u_n = \dfrac{3n-2}{n^2+1}$;   б) $u_n = \dfrac{1}{\left(3+(-1)^n\right)^n}$;   в) $u_n = \dfrac{\left(2+\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi}{n!}$.

3. Исследовать ряд на сходимость

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot n}+\ldots \quad .$$

Показать, что ряд сходится, найти его сумму

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{1}{4^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n\left(1+q^n\right)$, где $|q|<1$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n+2^n}{10^n}$.

9. Исследовать сходимость рядов, применив необходимый признак сходимости

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2n+3}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n+1]{10}}$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3+2n^2}$;   г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n}$.

1.2. Необходимый признак сходимости. Сравнение рядов с положительными членами.

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.
2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.
3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд может сходиться или расходиться.
4. Даны два ряда с положительными членами:

$u_1 + u_2 + ... + u_n + ...,$ (1)

$v_1 + v_2 + ... + v_n + ...$ (2)

а) Если $u_n \le v_n$ и ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1).

б) Если $u_n \ge v_n$ и ряд (2) расходится, то расходится и ряд (1).

в) Если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = A\ (\ne 0\ и \ne \infty)$, то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Задания для аудиторной работы.

Исследовать сходимость рядов, используя необходимый признак и признаки сравнения

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$; 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; 5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{ln\, n}$;

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3+2n^2}$; 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{n^2+1}{n^2}$; 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{n}}$; 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n+1)^2}$; 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$; 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{n^3+5n+7}$.

Задания для индивидуальной работы.

1. Запишите простейшую формулу общего члена u_n ряда по указанным первым его членам.
2. Найдите сумму ряда.
3. –5. Исследуйте сходимость рядов с помощью необходимого признака или признаков сравнения.

I.	II.
1. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{120} + ... + u_n + ...$.	1. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{8} + \dfrac{7}{16} + \dfrac{9}{32} + \dfrac{11}{64} + ...$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}$.	2. $1 - \dfrac{3}{4} + \dfrac{9}{16} - \dfrac{27}{64} + ... + (-1)^{n-1}u_n + ...$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2+4}{n^2+3n+7}$.	3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, tg\dfrac{3}{n}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{3}{8}\right)^n$.	4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{7}\right)^n$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{n+2}{n}$.	5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

III.	IV.
1. $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{10}+\frac{10}{17}+\frac{13}{26}+...+u_n+...$	1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{4^6}...+u_n+$
2. $\frac{4}{7}+\left(\frac{4}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+...$.	2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$.	3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)^{n^2}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{9}\right)^n$.	4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{5}{12}\right)^n$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} tg^3\frac{1}{\sqrt{n}}$.	5. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\cdot\sin\frac{1}{6^n}$.

1.3. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Признак Даламбера. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ \ u_n>0.$

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то при $l<1$ ряд сходится, при $l>1$ ряд расходится.

Радикальный признак Коши.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то при $l<1$ряд сходится, при $l>1$ - расходится.

При $l=1$ признаки ответа не дают.

Интегральный признак Коши.

Если $u_n=f(n)$ и $f(x)$ - убывающая функция при $x\ge 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\begin{cases} \text{сходится, если } \ p>1, \\ \text{расходится, если } \ 0<p\le 1. \end{cases}$$

Формула Стирлинга:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}\cdot e^{\frac{\theta}{12n}},\ \ 0<\theta<1.$$

Задания для аудиторной работы.

Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{2n+1}}{n!}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 4\cdot 9 ... n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9...(4n-3)}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n-1}{5n+3}\right)^n$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n\cdot n!}{n^n}$; 6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$; 7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-n}$;

8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$.

9. Убедиться в том, что признак Даламбера неприменим к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_{2k-1}=\dfrac{2^{k-1}}{3^k}$, $u_{2k}=\dfrac{2^k}{3^k}$, тогда как по признаку Коши этот ряд сходится.

Задания для индивидуальной работы.

Исследуйте знакоположительные ряды на сходимость с помощью признака Даламбера, радикального или интегрального признаков Коши:

I.	II.
1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n\cdot n!}{n^3}$;	1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+2}{(n+1)!}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot ...(4n)}$;	2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n+1)}{1\cdot 4\cdot ...\cdot(3n-2)}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n-1}{3n+8}\right)^n$;	3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n tg^n \dfrac{1}{3n}$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;.	4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^3+5}$;
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{2n+7}{\sqrt{n^5+3}}$.	5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n+1}{n^3+2}$.
Отв.: 1. расх.; 2. сх.; 3. сх.; 4. сх.; 5. сх.	Отв.: 1. сх.; 2. сх.; 3. сх.; 4. расх.; 5. сх.

III.	IV.
1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{7^n \cdot n^4}$;	1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt{n+1}}{(n+2)!}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 11 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot (10n-9)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots (4n-3)}$;	2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \ldots (4n+1)}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,(2^n+1)}$;	3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{4n+2}\right)^{n^2-n}$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$;	4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{n}}$;
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{n^5+6}$.	5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n+\sqrt{n}}$.
Отв.: 1. сх.; 2. расх.; 3. расх.; 4. сх.; 5. сх.	Отв.: 1. сх.; 2. сх.; 3. сх.; 4. сх.; 5. расх.

1.4. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов.

Ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется <u>знакопеременным</u>.

Ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, называется <u>знакочередующимся</u>.

<u>Признак Лейбница.</u> Знакочередующийся ряд $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots \quad (u_n > 0)$ сходится, если выполнены условия:

1. члены ряда убывают $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > u_{n+1} > \ldots$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. При этом сумма ряда S удовлетворяет неравенству $0 < S \le u_1$.

При замене суммы сходящегося знакочередующегося ряда его n-ой частичной суммой ошибка R_n по абсолютной величине не превышает первого из отброшенных членов, т.е. $|S - S_n| = |R_n| \le u_{n+1}$.

Дан знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n > 0 \ \text{ или } \ u_n < 0. \qquad (1)$$

Составим ряд из абсолютных величин членов ряда (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots. \qquad (2)$$

Если ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1), его сходимость называется <u>абсолютной.</u>.

Если ряд (2) расходится, а ряд (1) сходится, то его сходимость называется <u>условной.</u>

Задания для аудиторной работы.

Исследовать на абсолютную и условную сходимости следующие ряды:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \cdot 2^{-n}$; 3. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n^2-9}$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n}{6n+5}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2\pi\alpha}{n^2+1}$; 6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$;
7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$.
8. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{(0,7)^n}{(n+1)\,!}$, ограничившись тремя его первыми членами. Оценить абсолютную погрешность вычислений.
9. Убедиться в том, что признак Лейбница неприменим к следующим рядам:

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1} \right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^{n-1}} - \dfrac{1}{3^{2n-1}} \right)$.

   Выяснить их поведение.

Задания для индивидуальной работы.

1.-2. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость знакочередующиеся ряды.

3. Установите сходимость знакочередующегося ряда и вычислите его сумму с точностью $\varepsilon = 0,001$.
4. Оцените погрешность, возникающую при замене суммы ряда суммой его первых пяти членов.

I.	II.
1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{3n+2}{n\sqrt{n}+1}$;	1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2n+3}{n^4+5}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n^2+2n+3}{4^n}$;	2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n}{6n^2+7}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{4n+1}{6^n}$;	3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{3n+2}{n\,!}$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n \cdot 3^n}{(2n+1) \cdot 7^n}$;	4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n^3+3}{7^n}$;
Отв.: 1. сх.усл.; 2. сх. абс.; 3. 0,633; 4. 0,003.	Отв.: 1. сх. абс.; 2. сх. усл.; 3. 2,368; 4. 0,002.

III.	IV.
1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n^2+4}$;	1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n^6+3}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{3n+2}{5^n}$;	2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{3n+2}{\sqrt{n^4+n}}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+6}{n!}$;	3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^4\sqrt{n}}$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n\sqrt{n+3}}{5^n}$.	4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{5n+3}{n^3+4}$.
Отв.: 1. сх. усл.; 2. сх. абс.; 3. 4,161; 4. 0,001.	Отв.: 1. сх. абс.; 2. сх.усл.; 3. 1,800; 4. 0,15.

II. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

2.1. Область сходимости функциональных и степенных рядов. Действия над степенными рядами.

Дан функциональный ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \qquad (1)$$

Множество всех точек *x*, при которых ряд сходится, называется его областью сходимости, а функция

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k(x) \qquad (2)$$

- суммой ряда.

В простейших случаях для определения области сходимости функционального ряда можно применять к нему известные признаки сходимости, считая x фиксированным.

Степенным называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots, \qquad (3)$$

где a_n $(n=0,1,2,\ldots)$ - заданные постоянные числа, коэффициенты ряда. Если $x_0=0$, ряд принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_n x^n+\ldots \qquad (4)$$

Радиусом сходимости ряда (4) является число R такое, что при $|x| < R$, ряд сходится, а при $|x| > R$ - расходится. Интервал $(-R;\ R)$ называется в этом случае интервалом сходимости ряда (4). При $x = \pm R$ ряд (4) может сходиться или расходиться.

Аналогично определяется радиус и интервал сходимости для ряда (3): если при $|x - x_0| < R$ ряд сходится, а при $|x - x_0| > R$ - расходится, то R – радиус его сходимости, $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ - интервал сходимости ряда (3).

Радиус сходимости степенного ряда находится с помощью признака Даламбера или радикального признака Коши.

Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n;$$

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} + C.$$

Эти ряды имеют тот же интервал сходимости, что и исходный ряд (3).

Задания для аудиторной работы.

Найти область сходимости следующих рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{nx}}$; 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{ln^n x}{n}$;

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-2}{1-2x}\right)^n$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^n}{(x+2)^n}$; 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$; 8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^n}{3^n \sqrt{(n+1)^3}}$;

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{(2n+1) \cdot 5^n}$.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(0,2)^n}{(n+1)\cdot(4n+3)}$ с точностью до 0,01.

11. Оценить погрешность при замене $S \approx S_n$. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^2}$

с точностью до 0,001.

Пример.

Оценить погрешность при замене суммы ряда его частичной суммой. Найти сумму ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n^3}$ с точностью до 0,001.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n \cdot n^3}$ с точностью до 0,001.

Решение.

а) Дан знакоположительный ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2 \cdot 2^3} + \frac{1}{3^3 \cdot 3^3} + \frac{1}{3^4 \cdot 4^3} + \ldots + \frac{1}{3^n \cdot n^3} + \frac{1}{3^{n+1}(n+1)^3} + \ldots$$

По признаку Даламбера легко проверить, что ряд сходится, т.е. имеет конечную сумму *S*. Чтобы вычислить эту сумму приближенно с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$, надо найти число *n* из условия $S - S_n = R_n < \varepsilon$, т.е. $R_n < 0{,}001$.

Выпишем остаток ряда и его оценим.

$$R_n = \frac{1}{3^{n+1}(n+1)^3} + \frac{1}{3^{n+2}(n+2)^3} + \frac{1}{3^{n+3}(n+3)^3} + \ldots <$$

$$< \frac{1}{3^{n+1}(n+1)^3} + \frac{1}{3^{n+2}(n+1)^3} + \frac{1}{3^{n+3}(n+1)^3} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{(n+1)^3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\right) = \frac{1}{3^{n+1}(n+1)^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3^n \cdot 3(n+1)^3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2 \cdot 3^n (n+1)^3}.$$

Подбором решаем неравенство $\dfrac{1}{2 \cdot 3^n (n+1)^3} < \dfrac{1}{1000}$.

$2 \cdot 3^n (n+1)^3 > 1000; \quad 3^n (n+1)^3 > 500.$

Пусть $n = 2 \qquad 3^2 \cdot 3^3 = 3^5 = 243 < 500;$

$n = 3 \qquad 3^3 \cdot 4^3 = 12^3 = 1728 > 500.$

$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n \cdot n^3} \approx S_3$, каждое слагаемое считаем до 4-х знаков после запятой, затем сумму округляем до тысячных.

$S_3 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9 \cdot 8} + \dfrac{1}{3^6} = 0{,}3333 + 0{,}0139 + 0{,}0014 = 0{,}3486.$

$S = 0{,}349.$

б) В знакочередующемся ряду ошибка при замене $S \approx S_n$ не превосходит первого из отброшенных членов.

Вычислим сумму ряда с точностью до 0,001, каждое слагаемое берем с четырьмя знаками после запятой, после сложения округлим результат до 0,001.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n \cdot n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{72} + \frac{1}{729} - \frac{1}{81 \cdot 64} + \ldots \approx\sim 0,3333 - 0,0139 + 0,0014 -$$
$$- 0,0002 + 0,0000 = 0,3206.$$

$S = 0,321 \pm 0,001.$

Задания для индивидуальной работы.

1.-3. Найти область сходимости функционального (степенного) ряда.
4. Используя правила почленного дифференцирования и интегрирования степенных рядов, докажите следующие равенства:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot nx^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$,

где $|x| < 1$.
5. С помощью полученных соотношений найдите суммы рядов.

I. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\frac{x}{3^n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} x^n$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(6n+1)^2} \cdot (x-3)^n$; 4. а); 5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot n}{5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^{n-1}}$. Отв.: 1. $\|x\| < +\infty$; 2. $-4 < x < 4$; 3. $2 \le x < 4$.	II. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-n \sin x}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n (n+1)} \cdot x^n$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 3} (x-2)^n$; 4. б); 5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{7^{n-1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{7^n}$. Отв.: 1. $2k\pi < x < (2k+1)\pi$; 2. $-3 < x < 3$; 3. $1 \le x < 3$.
III. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-3}{1-3x}\right)^n$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2^n} x^n$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n(n^3+1)} (x+2)^n$; 4. в);	IV. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) 5^n \cdot \ln(n+1)}$;

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{6^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n+1)}{6^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{6^{n-1}}$. Отв.: 1. $\lvert x \rvert > 1$; 2. $\lvert x \rvert < 2$; 3. $-3 \le x \le -1$.	3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n+1)}{n^3+4}(x+4)^n$; 4. а); 5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n+1)}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^{n-1}}$. Отв.: 1. $x \in R$; 2. $-5 \le x < 5$; 3. $-5 \le x \le -3$.

2.2. Разложение функций в степенные ряды Тейлора и Маклорена.

Дана функция $f(x)$ бесконечно дифференцируемая в окрестности точки x_0. Рядом Тейлора функции $f(x)$ называется степенной ряд вида

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots \quad (1)$$

Ряд (1) сходится к функции $f(x)$ в интервале $(x_0-h,\, x_0+h)$, если остаток ряда Тейлора $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!}(x-x_0)^k$ стремится к 0 при $n \to \infty$ для всех $x \in (x_0-h,\, x_0+h)$.

Если $x_0 = 0$, то получаем ряд Маклорена для $f(x)$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \quad . \qquad (2)$$

Основные разложения в ряд Маклорена, их интервалы сходимости:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots, \quad -1 < x < 1;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad -1 < x < 1;$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad -1 < x < 1.$$

Задания для аудиторной работы.

1. Разложить функцию $f(x)=x^5-4x^4+2x^3+3x^2+2x-6$ по степеням бинома $x+1$.

   Представить данные функции их рядом Маклорена, указать область сходимости полученных рядов:

2. e^{-x^2}; 3. $x\cos 2x$; 4. $\dfrac{3x+5}{x^2-3x+2}$; 5. $\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

5. Разложить в ряд по степеням $x+2$ функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+7}$.

6. Разложить функцию $f(x)=\ln(x+2)$ в ряд по степеням а) x; б) $x+1$.

Задания для индивидуальной работы.

1. Разложите заданные функции в ряд Маклорена, укажите интервал сходимости полученного ряда.
2. Разложите функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0, найдите область сходимости полученного ряда.

I. 1. а) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$; б) $f(x)=\cos\dfrac{2x^3}{3}$; 2. $f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2-2x+2}$, $x_0=1$. Отв.: 1. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+2}, \lvert x\rvert<1$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 2^{2n}x^{6n}}{3^{2n}(2n)!}, \lvert x\rvert<\infty$; 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}(x-1)^{2n}, \quad 0\le x\le 2$.	II. 1. а) $f(x)=\dfrac{2}{1-3x^2}$; б) $f(x)=e^{4x}$; 2. $f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2-4x+3}$, $x_0=-2$. Отв.: 1. а) $2\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n x^{2n}, \lvert x\rvert<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4^n x^n}{n!}, \lvert x\rvert<\infty$ 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{6\cdot 3^n}-\dfrac{1}{10\cdot 5^n}\right)(x+2)^n, -5<x<1$
III. 1. а) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x+6}$; 2. $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4}$, $x_0=2$. Отв.: 1. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{2^n\cdot n!}, \lvert x\rvert<\infty$;	IV. 1. а) $f(x)=x\cos\sqrt{x}$; б) $f(x)=\dfrac{x}{x+4}$; 2. $f(x)=\ln(5x+3)$, $x_0=-\dfrac{2}{5}$. Отв.: 1. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(2n)!}, \ 0\le x<\infty$

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{6^{n+1}},\ \lvert x \rvert < 6$;	б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{4^{n+1}},\ \lvert x \rvert < 4$;
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{2n} \dfrac{(x-2)^{2n}}{(2n)!},\ \lvert x \rvert < \infty$	2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} 5^n}{n} \left(x+\dfrac{2}{5}\right)^n,\ \ -\dfrac{7}{5} < x \le \dfrac{3}{5}$.

2.3. Приложения степенных рядов.

С помощью рядов можно

а) вычислить значения тригонометрических функций, логарифмов чисел, корней;

б) вычислить определенные интегралы;

в) решить задачу Коши для дифференциальных уравнений. Частное решение ДУ ищется или методом неопределенных коэффициентов, или в виде разложения в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$.

Задачи для аудиторной работы.

Вычислить определенные интегралы с точностью до 0,001

1. $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx$; 2. $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{dx}{1+x^6}$.

Найти неопределенные интегралы в виде степенного ряда, указать их область сходимости

3. $\int \dfrac{e^x - 1}{x} dx$; 4. $\int \dfrac{\ln(1+x)}{x} dx$.

Записать пять ненулевых членов разложения в степенной ряд решения задачи Коши для дифференциальных уравнений

5. $y' = e^y + xy,\quad y(0) = 0$.

6. $y'' = x^2 + y,\quad y(0) = -1,\quad y'(0) = 1$.

7. $y'' + \dfrac{2}{x} y' + y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$.

Задания для индивидуальной работы.

1. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислите определенный интеграл с точностью до 0,001.
2. Найдите неопределенный интеграл в виде ряда, укажите интервал его сходимости.
3. Запишите пять ненулевых членов ряда решения задачи Коши дифференциальных уравнений.

I. 1. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}\,dx$; 2. $\int \dfrac{\cos x-1}{x^2}dx$; 3. $y'=1+x+x^2-2y^2,\ y(1)=1$. Отв.: 1. 0,508; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)(2n)\,!},\ \lvert x\rvert<\infty$; 3. $y=1+(x-1)-0,5(x-1)^2+$ $+0,333(x-1)^3+0,167(x-1)^4-$ $-0,5(x-1)^5+\ldots$	II. 1. $\int\limits_0^{1/3} \sqrt{1+x^4}\,dx$; 2. $\int \dfrac{\sin x-x-x^3}{x^2}dx$; 3. $y'=2x^2+y^3,\ y(1)=1$. Отв.: 1. 0,334; 2. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}}{2n\cdot(2n-1)\,!}-\dfrac{7x^4}{24},\ \lvert x\rvert<\infty$; 3. $y=1+3(x-1)+6,5(x-1)^2+$ $+16,167(x-1)^3+48,125(x-1)^4+\ldots$.
III. 1. $\int\limits_0^{0,25} e^{-x^2}dx$; 2. $\int \sqrt{1+x^3}\,dx$; 3. $y'=4y+2xy^2-e^{3x},\ y(0)=2$. Отв.: 1. 0,245; 2. $x+\dfrac{x^4}{8}+\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n\cdot n\,!\,(3n+1)}\times$ $\times x^{3n+1},\ \lvert x\rvert<1$; 3. $y=2+7x+16,5x^2+39,167x^3+$ $+95,542x^4+\ldots$.	IV. 1. $\int\limits_0^{0,5} \sin x^3dx$; **2.** $\int \dfrac{dx}{1+x^5}$ **;** **3.** $y'=y\cos x+x^2,\quad y(0)=2$**.** Отв.: 1. 0,016; 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{5n+1}}{5n+1},\ \lvert x\rvert<1$; 3. $y=2+2x+x^2+0,333x^3-$ $-0,167x^4+\ldots$.

2.4. Ряды Фурье для 2π-периодических функций. Ряды Фурье для четных и нечетных функций.

Рядом Фурье 2π-периодической функции $f(x)$ называется тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (1)$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,1,\ 2,...) \qquad (2)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,...) \qquad (3)$$

Теорема Дирихле.

Если функция с периодом 2π кусочно-дифференцируема в промежутке $[-\pi;\pi]$, то ее ряд Фурье сходится в любой точке x_0, причем $S(x_0)=f(x_0)$, если x_0 - точка непрерывности $f(x)$ и $S(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ в точке разрыва функции.

Если $f(x)=f(x+2\pi)$ и $f(-x)=f(x),\quad x\in(-\pi;\pi)$, то ряд Фурье по косинусам кратных дуг имеет вид $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, где $a_n=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,1,\ 2,...)$ Если $f(x)=f(x+2\pi)$ и $f(-x)=-f(x),\quad x\in(-\pi;\pi)$, то ряд Фурье со синусам кратных дуг имеет вид $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, где $b_n=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$.

Справедливы равенства:

$$\sin\pi n=0;\quad \cos\pi n=(-1)^n;\quad \int\sin nx\,dx=-\frac{1}{n}\cos nx;\quad \int\cos nx\,dx=\frac{1}{n}\sin nx;$$

$$\int(Ax+B)\cos x\,dx=\frac{Ax+B}{n}\sin nx+\frac{A}{n^2}\cos nx;$$

$$\int(Ax+B)\sin x\,dx=-\frac{Ax+B}{n}\cos nx+\frac{A}{n^2}\sin nx.$$

Задания для аудиторной работы.

Разложить в ряд Фурье 2π-периодические функции. Построить графики функции и суммы ряда

1. $f(x)=\begin{cases} ax, & если\ -\pi<x<0, \\ bx, & если\ \ 0\le x<\pi. \end{cases}$

   Рассмотреть случаи а) $a\ne b$; б) $a=b$; в) $b=-a$.
2. $f(x)=x^2,\ \ x\in[-\pi;\pi]$. С помощью полученного разложения вычислить суммы числовых рядов

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

3. Функцию $f(x)=1-\dfrac{x}{\pi}$, заданную на интервале $(0;\pi)$, разложить в ряд по: а) синусам кратных дуг; б) косинусам кратных дуг. Построить графики $y=f(x)$ и $y=S(x),\ \ x\in R$.

Задания для индивидуальной работы.

1. Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$. Постройте графики $y=f(x)$ и $y=S(x),\ \ x\in R$.

2. Решите свой вариант заданий 1 и 2 из аттестационной работы № 5.

I. 1. $f(x)=\begin{cases} 0, & если\ -\pi<x\le 0, \\ \dfrac{\pi x}{4}, & если\ \ 0<x<\pi. \end{cases}$ Отв.: $\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+$ $+\dfrac{\pi}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}.$	II. 1. $f(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{x}{\pi}, & если\ -\pi\le x<0, \\ 1-\dfrac{x}{\pi}, & если\ \ 0\le x<\pi. \end{cases}$ Отв.: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$
III. 1. $f(x)=\begin{cases} \pi, & если\ -\pi\le x<0, \\ \pi-x, & если\ \ 0<x<\pi. \end{cases}$	IV. 1. $f(x)=\begin{cases} 0, & если\ -\pi\le x<0, \\ x^2, & если\ \ 0\le x<\pi. \end{cases}.$

Отв.: $\frac{3\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+$ $+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx.$	Отв.: $\frac{\pi^2}{6}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}+$ $+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}-$ $-\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}.$

2.5. Ряды Фурье для $2l$-периодических функций. Неполные ряды Фурье.

Если функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$'в промежутке $[-l;l]$ или непрерывна, или имеет конечное число точек разрыва первого рода, то во всех точках непрерывности справедливо разложение

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,...)$, (1)

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3...). \qquad (2)$$

В точках разрыва $S(x_1)=\frac{f(x_1-0)+f(x_1+0)}{2}$.

В случае разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье в произвольном промежутке $[a,a+2l]$ длиной *2l* пределы интегрирования в формулах (1) и (2) следует заменить соответственно на *a* и *a+2l*.

Если $f(x)=f(x+2l)$ и $f(-x)=f(x)$, $x\in(-l;l)$, то ряд по косинусам имеет вид: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{e}$, где

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,...).$$

Если $f(x)=f(x+2l)$ и $f(-x)=-f(x)$, $x\in(-l;l)$, то ряд по синусам имеет вид: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$, где

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3...).$$

Задания для аудиторной работы

1. Разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию $y = 1 - \frac{x}{2}$, заданную на отрезке $[0;2]$. Построить графики функции и суммы ряда для $x \in R$.
2. Разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 2 - x, & \text{если } 1 < x < 2, \ l = 2. \end{cases}$$

Пользуясь полученным разложением, вычислить суммы числовых рядов

а) $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots$

б) $1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} \ldots + \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(2n+1)^2} + \ldots$

Задания для индивидуальной работы

1. 1. Разложите в ряд Фурье $2l$- периодическую функцию $f(x)$, заданную на интервале $(0;l)$ а) по синусам , б) по косинусам кратных дуг. Построить графики $y = f(x)$ и $y = S(x)$.
2. Решите свой вариант задания № 5 из аттестационной работы № 5.

I. 1. $f(x) = 1 - x,\ x \in (0;2),\ l = 2$ Отв.: а) $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}}{(2n-1)^2}$; б) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}$.	II. 1. $f(x) = x(1-x),\ x \in (0;1),\ l = 1$ Отв.: а) $\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{n^2}$; б) $\frac{16}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{(2n-1)^3}$.
III. 1. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{если } 1 < x < \frac{3}{2},\ l = \frac{3}{2}. \end{cases}$	IV. 1. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le x \le 1, \\ x, & \text{если } 1 < x < 3,\ l = 3. \end{cases}$

Отв.: $a)\ \frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi n}\sin\frac{2n\pi}{3}+\frac{3}{\pi^2 n^2}\times\right.$ $\left.\times\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-1\right)\right)\cos\frac{2n\pi x}{3};$ $б)\ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi n^2}\sin\frac{2\pi n}{3}-\frac{1}{n}\cos\frac{2\pi n}{3}\right)\times$ $\times\sin\frac{2\pi nx}{3}.$	Отв.: $a)\ \frac{5}{3}+\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n-\cos\frac{n\pi}{3}\right)\times$ $\times\cos\frac{n\pi x}{3};$ $б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-6(-1)^n}{n\pi}-\frac{6}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}\right)\times$ $\times\sin\frac{n\pi x}{3}.$

III. Элементы теории функций комплексной переменной.

3.1. Понятие области. Кривые на комплексной области.

Комплексное число $z = x + i\,y$, где x и y – действительные числа, $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, изображается точкой комплексной плоскости с координатами (x, y).

Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$. $\mathbb{C} + (z = -\infty) = \overline{\mathbb{C}}$.

Областью D называется открытое связное множество точек $z \in \mathbb{C}$.

Число $\bar{z} = x - i\,y$ - сопряженное числу z. $x = \operatorname{Re} z$ - действительная часть z, $y = \operatorname{Im} z$ - мнимая часть z.

$|\,z\,| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\arg z = \varphi$, $\cos\varphi = \frac{x}{|\,z\,|}$, $\sin\varphi = \frac{y}{|\,z\,|}$.

$z = x + i\,y$ - алгебраическая форма записи комплексного числа,

$z = |\,z\,|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - тригонометрическая форма,

$z = |\,z\,|\,e^{i\varphi}$ - показательная форма записи комплексного числа.

Уравнение $z = x(t) + i\,y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ - непрерывные функции действительного аргумента t, определяет некоторую кривую на плоскости z.

$x = x(t),\ y = y(t)$ - параметрические уравнения этой линии.

Задания для аудиторной работы.

Построить на комплексной плоскости область, заданную неравенствами

1. $|z-1|\le 1,\ |z+1|>2$.

2. $|z-2|+|z+2|\le 5$.

3. $z\cdot\bar{z}\le 2,\ \operatorname{Re} z<1,\ \operatorname{Im} z>-1$.

4. $|z+i|>1,\ -\dfrac{\pi}{4}\le \arg z<0$

5. $|z|-3\operatorname{Im} z\le 6$.

6. $|z-i|\le 1,\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg(z-i)<\dfrac{\pi}{4}$

Определить вид кривой

7. $z=3e^{it}-\dfrac{1}{2e^{it}}$.

8. $z=t^2+4t+20-i(t^2+4t+4)$.

9. $\operatorname{Im}\left(\overline{z^2-\bar{z}}\right)=2-\operatorname{Im} z$.

10. $|z-2|=|1-2\bar{z}|$.

11. $z=\dfrac{1+i}{1-t}+\dfrac{t(2-4i)}{1-t}$.

Задания для индивидуальной работы.

1. Построить область D, заданную неравенствами.
2. Определить вид кривой по заданному уравнению, $t\in\mathbb{R}$.

<table>
<tr>
<td>I.
1. а) $|z-1-i|\le 1,\ \operatorname{Im} z>1, \operatorname{Re} z\ge 1$;
б) $3|z|-\operatorname{Re} z>12$.
2. а) $z=-2e^{it}+\dfrac{1}{e^{it}}$;
б) $z=\dfrac{2+t}{2-t}+i\dfrac{1+t}{1-t}$.
Отв.: 2. а) $x=-\cos t,\ y=-3\sin t$;
б) $y=\dfrac{3x-1}{3-x}$.</td>
<td>II.
1. а) $|z-2-i|\ge 1,\ 1\le \operatorname{Re} z\le 3,\ 0<\operatorname{Im} z\le 3$
б) $|z|<2,\ -\dfrac{\pi}{4}\le arg(z-1)\le\dfrac{\pi}{4}$.
2. а) $z=\dfrac{1}{\cos t}+i\,2tg\,t$;
б) $z=\dfrac{1+t}{1-t}+i\dfrac{2+t}{2-t}$.
Отв.: 2. а) $y^2=4(x^2-1)$;
б) $y=\dfrac{3x+1}{x+3}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>III.
3. а) $|z-2|-|z+2|>3$;
б) $1<z\cdot\bar{z}<2, \operatorname{Re} z>0,$
$0\le \operatorname{Im} z\le 1$.
4. а) $\operatorname{Re}\left(z^2-\bar{z}\right)=0$;
б) $z=2ch3t-2i\,sh3t$.</td>
<td>IV.
3. а) $|2z|>|1+z^2|$
б) $|z-i|<1,\ arg\,z\ge\dfrac{\pi}{4}$.
4. а) $z^2+\bar{z}^2=1$;
б) $z=t-2+i(t^2-4t+5)$.</td>
</tr>
</table>

Отв.: 2. а) $x^2-x-y^2=0$; б) $9x^2-4y^2=36$.	Отв.: 2. а) $2(x^2-y^2)=1$; б) $y=x^2+1$.

3.2. Основные элементарные функции комплексной переменной. Образ области *D* при отображении $w=f(z)$.

Если каждой точке $z\in D$ по определенному правилу *f* поставлено в соответствие комплексное число $w=u+iv$, то говорят, что в области *D* определена функция комплексной переменной $z=x+iy$ и пишут $w=f(z)$.

Если $z=x+iy$, $w=u+iv$, то $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

Основные элементарные функции:

1. степенная $w=z^n=(x+iy)^n$, $n\in\mathbb{N}$.
2. Показательная $w=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$.

   Обладает всеми свойствами действительной показательной функции, имеет период $T=2\pi i$.
3. Тригонометрические функции

   $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ периодические с $T=2\pi$.

   Справедливы основные формулы для действительных тригонометрических функций.

   Функции не являются ограниченными, т.е. $|\sin z|\le 1$ или $|\sin z|>1$, $|\cos z|\le 1$ или $|\cos z|>1$.
4. Гиперболические функции

   $shz=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$, $ch\,z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$.

Справедливы соотношения

$sh z=-i\sin(iz)$, $ch z=\cos(iz)$, $\sin z=\sin x\cdot ch\,y+i\cos x\cdot sh\,y$,

$\cos z=\cos x\cdot ch\,y-i\sin x\cdot sh\,y$,

$tg\,z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$, $ctg\,z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$, $th z=\dfrac{sh z}{ch z}$, $cth z=\dfrac{ch z}{sh z}$.

Функции z^n, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $sh z$, $ch z$ однозначные, непрерывные для $\forall z\in\overline{\mathbb{C}}$.

5. Логарифмическая функция $w=Ln z$.

   $Ln z=\ln|z|+i\arg z+i2k\pi$, $k\in Z$.

   Функция бесконечнозначная, определена и непрерывна для $\forall z\in\overline{\mathbb{C}}$, кроме $z=0$.

6. Общая степенная функция $w = z^{\alpha} = e^{\alpha \, Ln\, z}$.
7. Общая показательная функция $w = a^{z} = e^{z\, Ln\, a}$.
8. Обратные тригонометрические функции

$$w = Arc\sin z = -i\, Ln\left(i\,z + \sqrt{1-z^2}\right).$$

$$w = Arc\cos z = -i\, Ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right).$$

$$w = Arctg\ z = \frac{1}{2i} Ln\, \frac{1+i\,z}{1-i\,z}.$$

$$w = Arcctg\ z = -\frac{1}{2i} Ln\, \frac{1+i\,z}{i\,z-1}.$$

Функции 6-8 бесконечнозначные. Функция $\sqrt{1-z^2}$ - двузначная.

Дана некоторая область *D* и функция $w = f(z)$. $z \in D$, $w \in E$.

Область *D* ограничена некоторым контуром *C*, который обходится в направлении против часовой стрелки.

Зная уравнение границы $z = z(t)$, находим ее образ $w = f(z(t))$, получаем линию C'.

На кривой *C* выбираем 3 точки и находим их образы, таким способом установим направление на контуре C'. Область *E* будет оставаться слева при обходе контура C'. Для проверки возьмем внутреннюю точку $z_0 \in D$, тогда точка $w_0 = f(z_0)$ также должна быть внутри области *E*.

Пример 1. Найти i^{1+i}, $Arc\sin 3$, $Ln(12+5i)$.

$$i^{1+i} = e^{(1+i)\, Ln\, i} = e^{(1+i)(\ln|i| + i\arg i + 2k\pi i)} = e^{(1+i)\left(i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i\right)} = e^{(i-1)\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} =$$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right) =$$

$$= i\, e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$Arc\sin 3 = -i\, Ln(3i \pm i\sqrt{8}) = -i\, Ln\left(\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)i\right) =$$

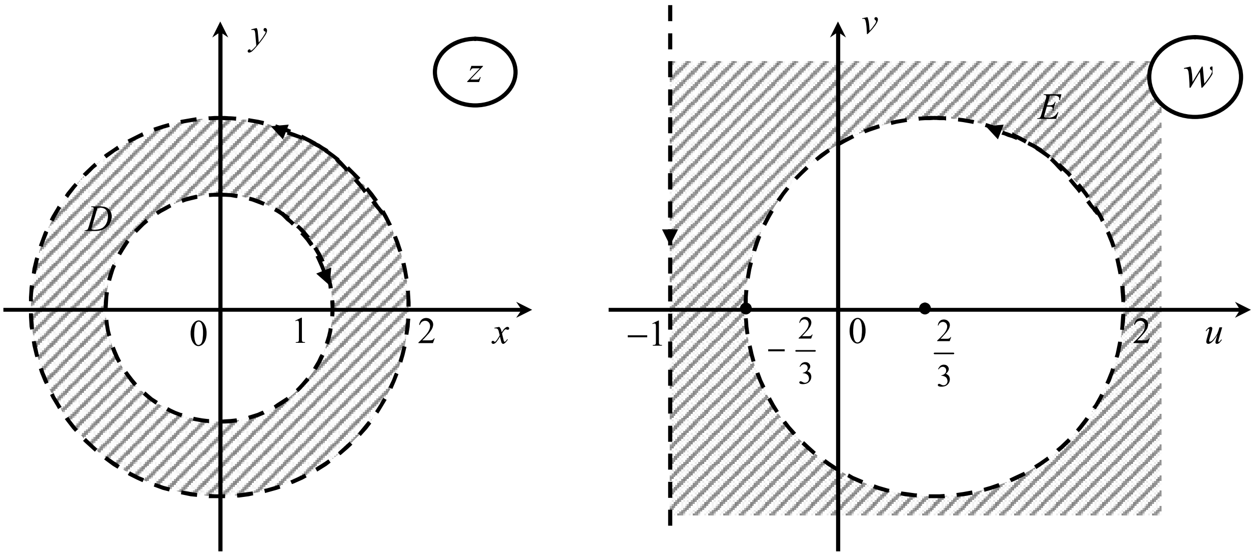
$$= -i\left(\ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

$$Ln(12+5i) = \ln|12+5i| + i\arg(12+5i) + i\,2k\pi = \left| \begin{array}{l} |12+5i| = \\ = \sqrt{144+25} = 13, \end{array} \right.$$

$$\left. \arg(12+5i) = arctg\frac{5}{12} \right| = \ln 13 + i\left(arctg\frac{5}{12} + 2k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2. Найти образ области $D:\left(1<\left|z\right|<2\right)$ при отображении $w=\dfrac{2}{z-1}$.

Изобразим на комплексной плоскости z область D – круговое кольцо между окружностями $\left|z\right|=1$ и $\left|z\right|=2$, не включая самих окружностей.



В соответствии с принципом сохранения границ найдем образ линии

$$\left|z\right|=1 \text{ или } z=e^{i\varphi},\ 0\le\varphi\le 2\pi .$$

$$w=\frac{2}{e^{i\varphi}-1}=\frac{2}{\cos\varphi+i\sin\varphi-1}=\frac{2(\cos\varphi-1-i\sin\varphi)}{\left(\left(\cos\varphi-1\right)+i\sin\varphi\right)(\cos\varphi-1-i\sin\varphi)}=$$

$$=\frac{2(\cos\varphi-1-i\sin\varphi)}{\cos^2\varphi-2\cos\varphi+1+\sin^2\varphi}=\frac{2(\cos\varphi-1-i\sin\varphi)}{2\left(1-\cos\varphi\right)}=-1-i\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}=$$

$$=-1-i\frac{2\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}}{2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}=-1-i\,ctg\frac{\varphi}{2},$$

$$w=u+iv \qquad u=-1, \qquad v=-ctg\frac{\varphi}{2}, \qquad \varphi\in[0;2\pi].$$

В плоскости w имеем прямую. Окружность единичного радиуса переходит в прямую. На окружности берем 3 точки. При обходе границы область D должна оставаться слева.

$z=1(\varphi=0)$	$z=-i\left(\varphi=-\dfrac{\pi}{2}\right)$	$z=-1(\varphi=-\pi)$
$v=+\infty$ $(\varphi\to 0-0)$	$v=1$	$v=0$

Находим образ окружности $z = 2e^{i\varphi}$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

$$w = \frac{2}{2e^{i\varphi} - 1} = \frac{2}{(2\cos\varphi - 1) + 2i \cdot \sin\varphi} = \frac{2(2\cos\varphi - 1 - 2i\sin\varphi)}{(2\cos\varphi - 1)^2 + 4\sin^2\varphi} = \frac{4\cos\varphi - 2}{5 - 4\cos\varphi} -$$

$$-i\frac{4\sin\varphi}{5 - 4\cos\varphi}.$$

Параметрические уравнения образа окружности радиуса 2:

$$\begin{cases} u = \dfrac{4\cos\varphi - 2}{5 - 4\cos\varphi}, \\ v = -\dfrac{4\sin\varphi}{5 - 4\cos\varphi}, \end{cases} \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Избавимся от параметра φ.

$$\begin{cases} (5 - 4\cos\varphi)u = 4\cos\varphi - 2, \\ (5 - 4\cos\varphi)v = -4\sin\varphi, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u + 2 = (4 + 4u)\cos\varphi, \\ \sin\varphi = -\dfrac{1}{4}(5 - 4\cos\varphi)\, v, \end{cases}$$

$$\cos\varphi = \frac{5u + 2}{4(u + 1)}; \;\; \sin\varphi = -\frac{1}{4}\left(5 - \frac{5u + 2}{u + 1}\right)v = -\frac{1}{4}\,\frac{5u + 5 - 5u - 2}{u + 1}v = -\frac{3}{4}\,\frac{v}{u + 1}.$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{5u + 2}{4(u + 1)}, \\ \sin\varphi = -\dfrac{3}{4}\dfrac{v}{u + 1}. \end{cases} \qquad \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1, \qquad \frac{(5u + 2)^2}{16(u + 1)^2} + \frac{9v^2}{16(u + 1)^2} = 1.$$

$$(5u + 2)^2 + 9v^2 = 16(u + 1)^2,$$

$$25u^2 + 20u + 4 + 9v^2 = 16u^2 + 32u + 16,$$

$$9u^2 - 12u + 9v^2 - 12 = 0, \quad 3u^2 - 4u + 3v^2 - 4 = 0,$$

$$3 \cdot \left(u^2 - \frac{4}{3}u + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) + 3v^2 = 4, \quad 3 \cdot \left(u - \frac{2}{3}\right)^2 + 3v^2 = 4 + \frac{4}{3}.$$

$\left(u - \dfrac{2}{3}\right)^2 + v^2 = \dfrac{16}{9}$ - окружность с центром в точке $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$ радиуса $\dfrac{4}{3}$.

Берем точки на окружности $|z| = 2$. Находим их образы.

z	2	$2\,i$	-2	$-2\,i$
w	2	$-\frac{2}{5} - i\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{5} + i\frac{4}{5}$

$$w_2=\frac{2}{2i-1}=\frac{-2(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{-2(1+2i)}{5}=-\frac{2}{5}-i\frac{4}{5}.$$

$$w_4=\frac{2}{-2i-1}=\frac{-2(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}=-\frac{2}{5}+i\frac{4}{5}.$$

Отмечаем на плоскости *w*. Область *E* остается слева при обходе ее границ.

Задания для аудиторной работы.

Представить в алгебраической форме следующие комплексные числа.

1. $ch\left(2+\frac{\pi}{4}i\right)$; 2. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}+i\right)$; 3. $tg\frac{\pi}{2}i$; 4. $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{-6i}$;

5. $Ln(-1-i)$; 6. $Arctg\frac{12-5i}{13}$.

Найти образ области *D* при отображении $w=f(z)$.

7. *D* – треугольник с вершинами $z_1=0,\ z_2=1,\ z_3=i,\ w=\left(1+2i\right)\left(1-3z\right)$.

8. $D:(0<\operatorname{Re}z<1),\ \ w=z^{-1}$.

9. $D:(1\le\operatorname{Re}z\le 2,\ \ 0\le\operatorname{Im}z\le 1{,}5\pi),\ \ w=e^z$.

Задания для индивидуальной работы.

1-3. Представьте в алгебраической форме следующие комплексные числа.
4. Найдите образ области *D* при отображении $w=f(z)$.

I 1. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-i\right)$; 2. $Ln\left(1+\sqrt{3}i\right)$; 3. $Arc\cos i$; 4. *D* – треугольник с вершинами $z_1=-i,\ z_2=2+i,\ z_3=-3$, $w=\left(2-i\right)z+3i+5$.	II 1. $sh\left(1-\frac{\pi}{2}i\right)$; 2. $Ln\left(\sqrt{3}-i\right)$; 3. $(-1-i)^{4i}$; 4. $D:\left(1\le\lvert z\rvert\le 2,-\frac{\pi}{4}\le\arg z\le\frac{\pi}{4}\right)$, $w=z^2$.
III 1. $ch(2+\pi i)$; 2. $Ln(4-4i)$; 3. $(4-3i)^i$; 4. $D:\left(0<\arg z<\frac{\pi}{4}\right),\ w=\frac{1}{z}$.	IV 1. $\sin\left(\frac{\pi}{6}-3i\right)$; 2. $Ln(-3+4i)$; 3. $Arctg\frac{3+2i\sqrt{3}}{7}$; 4. $D:(0\le\operatorname{Re}z\le 1,\ 0\le\operatorname{Im}\le 1)$, $w=z^2$.

3.3. Производная функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Аналитические и гармонические функции.

Пусть функция $w = f(z)$ однозначно определена для $\forall z \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$. Если при $\forall \Delta z \to 0$ существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z),$$

то он называется производной функции $f(z)$ в точке *z*, а функция – дифференцируемой в точке *z*.

Для того, чтобы функция $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ в точке $z = x + i\,y$ была дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы функции $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$ были дифференцируемыми в точке (x,y) и удовлетворяли условиям Коши-Римана $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Тогда $f'(z) = u'_x + i\,v'_x = v'_y(x,y) - i\,u'_y(x,y)$.

Функция $f(z)$, дифференцируемая в точке *z* и некоторой ее окрестности, называется аналитической в этой точке. Если $f(z)$ - аналитическая для $\forall z \in D$, то она аналитическая в области *D*.

Для аналитических функций справедливы основные правила и таблица производных, аналогичные правилам и таблице для действительных дифференцируемых функций.

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r e^{i\varphi}$ и $f(z) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + i\,v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, то условия Коши-Римана имеют вид

$$\frac{\partial u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial r}$$

и $f'(z)$'записывается так $f'(z) = \dfrac{r}{z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + i\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) = \dfrac{1}{z}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} - i\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right)$.

Дана аналитическая функция $w = u(x,y) + i\,v(x,y)$, для нее выполнены условия Коши-Римана. Тогда функции $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$ будут гармоническими, т.е. они удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Гармонические функции *u* и *v*, удовлетворяющие условиям Коши-Римана, называются сопряженными.

Если $u=u(x,y)$ задана, то $v(x,y)$ можно найти по формуле

$$v=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(-u'_y(x,y)\,dx+u'_x(x,y)\,dy\right).$$

Если известна $v=v(x,y)$, то $u=u(x,y)$ определим так

$$u=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(v'_y(x,y)\,dx-v'_x(x,y)\,dy\right).$$

Задачи для аудиторной работы.

Выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими хотя бы в одной точке. Найти $w'=f'(z)$.

1. $w=(2-3i)z^2-iz-i$; 2. $w=i\cos z$; 3. $w=z^2\bar{z}$;

4. $w=|z|\cdot\operatorname{Re}z$; 5. $w=\dfrac{z-i}{z+i}$; 6. $w=\bar{z}\cdot\operatorname{Im}z$.

Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$, если

7. $v=x^2-y^2+2x+1,\quad f(0)=i$.

8. $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}+x,\quad f(1)=2$.

9. $u=1-e^x\sin y,\quad f(0)=1+i$.

Геометрический смысл $|f'(z_0)|$ и $\arg f'(z_0)$.

Пусть $f(z)$ - аналитическая в точке z_0, причем $f'(z_0)\neq 0$. Тогда $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту «растяжения» в точке z_0 плоскости z на плоскость w при отображении $w=f(z)$: если $|f'(z_0)|>1$, то имеет место растяжение, при $|f'(z_0)|<1$ - сжатие.

Аргумент $f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к гладкой кривой γ на плоскости z, проходящую через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $w_0=f(z_0)$ к образу Γ этой кривой на плоскости w при отображении $w=f(z)$. Если $\varphi=\arg f'(z_0)>0$, то поворот происходит против часовой стрелки, а при $\varphi<0$ - по часовой стрелке.

Найти коэффициент растяжения k и угол поворота φ в точке z_0 при отображении $w=u(x,y)+iv(x,y)$.

10. $u(x,y)=3x^2y-y^3,\quad v(x,y)=3xy^2-x^3,\quad z_0=1-i$.

11. $u(x,y)=e^{1+y}\cos x,\quad v(x,y)=-e^{1+y}\sin x,\quad z_0=\dfrac{\pi}{4}+i$.

12. $u(x,y)=x^3-3xy^2+3x,\quad v(x,y)=3x^2y-y^3+3y-1,\quad z_0=-1+i$.

Задания для индивидуальной работы.

1-3. Выясните, какие функции являются аналитическими (найти $w'=f'(z)$), а какие нет.

4. Найдите коэффициент растяжения и угол поворота в точке z_0 при отображении $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$.

5. Восстановите аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ по заданной действительной или мнимой части.

I 1. $w=(2+5i)z-iz^2+3i$; 2. $w=ze^z$; 3. $w=z\cdot\mathrm{Re}(z^2-2z)$; 4. $u(x,y)=x^3-3xy^2+x^2-y^2$; $v(x,y)=3x^2y-y^3+2xy,\ z_0=\dfrac{2i}{3}$; 5. $v=3x^2y-y^3,\ f(0)=1$. Отв.: 4. $k=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$; $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$. 5. $w=z^3+1$.	II 1. $w=(3+4i)z^2+7iz+6$; 2. $w=\sin 2z$; 3. $w=z\cdot\mathrm{Im}(3z-z^2)$; 4. $u(x,y)=x^2+2x-y^2$; $v(x,y)=2xy+2y,\ z_0=i$. 5. $u=e^{-y}\cos x+x,\ f(0)=1$. Отв.: 4. $k=2\sqrt{2}$; $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. 5. $w=z+e^{iz}$.
III 1. $w=3iz^2+(5-6i)z+8$; 2. $w=\cos 4z$; 3. $w=\lvert z\rvert\cdot(z^2-7i)$; 4. $u(x,y)=e^{-1-y}\cos x$, $v(x,y)=e^{-1-y}\sin x,\ z_0=\pi-i$. 5. $u=x^2-y^2+x,\ f(0)=0$. Отв.: 4. $k=1$; $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$. 5. $w=z^2+z$.	IV 1. $w=(1-4i)z^2-(2-5i)z+6i$; 2. $w=ch(2z+1)$; 3. $w=\bar{z}\cdot e^z$; 4. $u(x,y)=e^{1+2y}\cos 2x$, $v(x,y)=-e^{1+2y}\sin 2x,\ z_0=\dfrac{\pi}{6}$. 5. $v=3x^2y-y^3-y,\ f(0)=0$. Отв.: 4. $k=2e$; $\varphi=\dfrac{7\pi}{6}$. 5. $w=z^3-z$.

3.4. Интегралы от непрерывных и аналитических функций. Интегральная формула Коши. Формулы для производных.

а) В односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ заданы непрерывная функция $f(z)$ и гладкая ориентированная кривая $\gamma = \cup AB$.

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{z}_k)\Delta z_k, \quad \lambda = \max_{1\le k\le n}\left|\Delta z_k\right|. \tag{1}$$

Вычисление интеграла от функции $f(z)$ по дуге γ сводится к вычислению двух криволинейных интегралов от действительных функций.

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma} \big(u(x,y)+iv(x,y)\big)(dx+i\,dy) = \int_{\gamma} \big(u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy\big) +$$

$$+i\int_{\gamma} \big(v(x,y)\,dx - u(x,y)\,dy\big) = \left| \begin{array}{ll} \gamma: z = z(t) & \\ \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} & \alpha \le t \le \beta \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} \Big(u\big(x(t),\, y(t)\big)\cdot x'(t) -$$

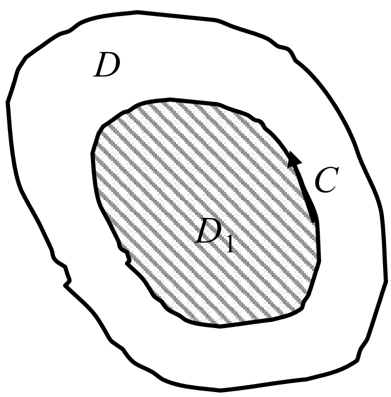
$$-v\big(x(t),\, y(t)\big)\cdot y'(t)\Big)\,dt + i\int_{\alpha}^{\beta} \Big(v\big(x(t),\, y(t)\big)\cdot x'(t) + u\big(x(t),\, y(t)\big)\cdot y'(t)\Big)\,dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))\cdot z'(t)\,dt.$$

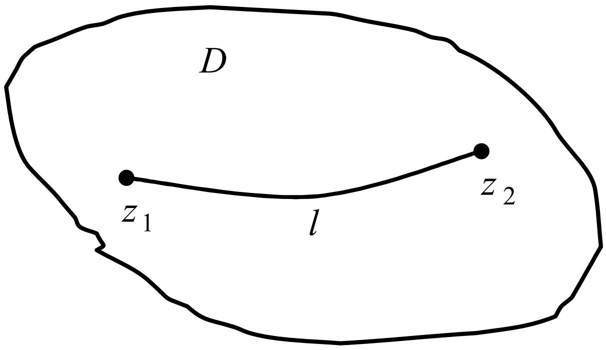
Интеграл (1) обладает свойствами криволинейного интеграла функции действительного переменного.

б) *Основная теорема Коши*. Если $f(z)$ - аналитическая в некоторой односвязной области D функция, то $\int f(z)dz$ по любому замкнутому контуру С, целиком лежащему в D, равен 0.

$$\oint_C f(z)\,dz = 0, \quad f(z) \text{ - аналитическая в } \overline{D}_1 = D_1 \cup C.$$



в) Если $f(z)$ - *аналитическая функция* для $\forall z \in D$, контур l – разомкнутый, целиком лежит в *D*, то интеграл $\int\limits_l f(z)dz$ не зависит от пути *l*, соединяющего точки z_1 и z_2.



$$\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1).$$

$F(z)$ - первообразная для $f(z)$, $F'(z) = f(z)$.

г) Пусть $f(z)$ - аналитическая функция для $\forall z \in D, z = a \in D$. Тогда справедлива *интегральная формула Коши*: $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f(z)}{z-a}dz = f(a)$. Обычно ее записывают так: заменим *z* на *t*, *a* на *z*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(t)}{t-z}dt = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \,\overline{\in}\, D. \end{cases}$$

Доказано, что аналитическая в $\overline{D}$ функция $f(z)$ имеет в этой области производные всех порядков

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt, \quad n \ge 1.$$

Задания для аудиторной работы.

Вычислить следующие интегралы от непрерывных или аналитических функций:

1. $\int\limits_\gamma \bar{z}^2 dz$, γ - отрезок прямой между точками $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$.
2. $\int\limits_\gamma z \cdot \bar{z}\, dz$, $\gamma : \left(|z| = 1, \ \mathrm{Im}\, z \le 0\right)$.
3. $\int\limits_\gamma (\sin iz + z)dz$, $\gamma : \left(|z| = 1, \ \mathrm{Re}\, z \ge 0\right)$.

4. $\int\limits_{\gamma} (3z^2 + 2z)\, dz$, γ - дуга параболы $y = x^2$ между точками $z = 1 + i$ и $z = 0$.

5. $\int\limits_{0}^{i} z \cos z\, dz$.

6. $\int\limits_{1}^{i} \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$ по дуге окружности $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \ge 0$, $\operatorname{Re} z \ge 0$.

Вычислить интегралы с помощью интегральной формулы Коши или формул для производных.

7. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{2 + \sin z}{z(z + 2i)} dz$.

8. $\oint\limits_{|z-\pi|=1} \frac{(z^2 + \pi)^2}{i \sin z} dz$.

9. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz} - 1}{z^3} dz$.

10. $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z+1|=3} \frac{3z^2 + 2z + 4}{(z^2 + 4) \cdot \sin \frac{z}{2}} dz$.

11. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{3z^4 - 2z^3 + 5}{z^4} dz$.

12. $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z + 1}{z(z - \pi)} dz$.

13. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2 + 9)(z + 9)}$.

14. $\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{z\, dz}{(z-2)^3 (z+4)}$.

Задания для индивидуальной работы.

1. Вычислите интеграл от непрерывной функции $f(z)$.

2.-5. Вычислите интегралы с помощью основной теоремы Коши, интегральной формулы Коши, формулы Ньютона-Лейбница.

I	II
1. $\int\limits_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz$, γ - граница области $(1 \le \lvert z \rvert \le 2,\ \operatorname{Re} z \ge 0)$ 2. $\int\limits_{\gamma} (z^3 + \cos z) dz$, $\gamma : (\lvert z \rvert = 1,\ \operatorname{Re} z \ge 0)$.	1. $\int\limits_{\gamma} z \cdot \operatorname{Im} z^2 dz$, γ - дуга параболы $y = x^2$ между точками $z = 0$ и $z = 1 + i$ 2. $\int\limits_{\gamma} (3 - 2z^2 + \sin z) dz$, $\gamma : (\lvert z \rvert = 2,\ \operatorname{Im} z \ge 0)$.

3. $\int_0^i z\sin z\,dz$. 4. $\oint_\gamma \frac{2dz}{z^2(z-1)}$, $\gamma:\left(\lvert z-1-i\rvert=\frac{5}{4}\right)$. 5. $\oint_{\lvert z-1\rvert=1} \frac{\cos\frac{\pi}{4}z}{(z^2-1)^2}dz$. Отв.: 1. $4i$; 2. 0; 3. $-\frac{i}{e}$; 4. $4\pi i$; 5. $\frac{-\pi i\sqrt{2}}{16}(\pi+4)$.	3. $\int_{1+i}^{2i} \left(z^3+z\right)e^{z^2/2}\,dz$. 4. $\oint_{\lvert z-3\rvert=1} \frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}dz$. 5. $\oint_{\lvert z-1\rvert=3} \frac{z}{z^2-2z+3}dz$. Отв.: 1. $-\frac{6}{35}+i$; 2. 0; 3. $2\sin 1+\cos 1-5e^{-2}+i(\sin 1-2\cos 1)$; 4. $\frac{4i}{\pi}$; 5. $2\pi i$.
III 1. $\int_\gamma z\,\mathrm{Re}\,z^2dz$, $\gamma:(\lvert z\rvert=1,$ $-\pi\le\arg z\le 0)$. 2. $\int_\gamma (z^3+e^z)dz$, $\gamma:\left(\lvert z\rvert=2\right)$. 3. $\int_0^i ze^z\,dz$. 4. $\oint_{\lvert z-i\rvert=1,5} \frac{dz}{z(z^2+4)}$. 5. $\oint_{\lvert z-1\rvert=0,5} \frac{e^{iz}dz}{(z^2-1)^2}$. Отв.: 1. $\frac{\pi}{2}i$; 2. 0; 3. $1-\cos 1-\sin 1+i(\cos 1-\sin 1)$; 4. $\frac{\pi i}{4}$; 5. $\frac{\pi}{2}\left(\left(\sin 1-\cos 1\right)-i\left(\cos 1+\sin 1\right)\right)$.	IV 1. $\int_\gamma \frac{\bar{z}}{z}dz$, $\gamma:\left(1\le\lvert z\rvert\le 2,\ \mathrm{Im}\,z\ge 0\right)$. 2. $\int_\gamma (\sin 3z-3z^2)dz$, $\gamma:\left(\lvert z\rvert=3\right)$. 3. $\int_{3i}^{6i} \left(z+3\right)e^{z/3}\,dz$. 4. $\oint_{\lvert z+1,5\rvert=1} \frac{\cos^2 z+3}{2z^2+\pi z}\,dz$. 5. $\oint_{\lvert z-2\rvert=1} \frac{e^{1/z}}{(z^2-4)^2}dz$. Отв.: 1. 0; 2. 0; 3. $9(\sin 1-2\sin 2)+9i(2\cos 2-\cos 1)$; 4. $-6i$; 5. $-\frac{3}{64}\sqrt{e}$.

3.5. Числовые ряды в комплексной плоскости. Разложение функции $f(z)$ в ряды Тейлора и Лорана.

Числовой комплексный ряд имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + i b_n). \tag{1}$$

Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} C_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} C_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называются соответственно действительной и мнимой частью ряда (1).

Сходимость ряда (1) эквивалентна одновременной сходимости двух рядов с действительными членами: его действительной и мнимой части.

Ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + i b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}}.$$

Т.к. $\sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}} \le |a_n| + |b_n|$, то ряд (1) сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся абсолютно ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

При исследовании на сходимость ряда (1) применяем все достаточные признаки сходимости действительных рядов с положительными членами.

Степенной комплексный ряд имеет вид

$$C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \ldots + C_n(z-a)^n + \ldots, \tag{2}$$

$C_k - (k = 0,1,2,\ldots) \in \mathbb{C}$ - коэффициенты ряда, $a \in \mathbb{C}$.

Из теоремы Абеля следует, что существует круг абсолютной сходимости ряда (2): $|Z - a| < R$. К ряду из модулей применяем признак Даламбера или радикальный признак Коши и находим R – радиус сходимости.

Если $f(z)$ - аналитическая функция в точке $z = a$, то ее можно представить рядом Тейлора

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$, абсолютно сходящимся при $|z - a| < R$.

Основные разложения и области их сходимости:

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,$ сходится абсолютно при $|z| < \infty$;

$\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$ сходится абсолютно при $|z| < \infty$;

$$sh\, z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad ch\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$ сходится абсолютно при $|z| < \infty$;

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$ сходится абсолютно при $|z| < 1$;

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \qquad |z| < 1.$$

Если $f(z)$ - функция, аналитическая в некоторой окрестности точки a, кроме самой точки, то ее можно представить рядом Лорана

$$f(z) = \ldots + \frac{C_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{C_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \ldots +$$

$$+C_n(z-a)^n + \ldots,$$

абсолютно сходящимся при $r < |z-a| < R$,

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(t)(t-a)^{n-1} dt; \quad n \geq 1, \qquad C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt; \quad n \geq 0,$$

где $\gamma : |z-a| = \rho$, где $r < \rho < R$.

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ - правильная часть ряда Лорана; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}$ - главная часть разложения.

При разложении элементарных функций в ряд Лорана используют основные разложения.

Задания для аудиторной работы.

Исследовать сходимость числовых комплексных рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + i\, \frac{n}{3^n} \right)$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos 3n}{n^3} + \frac{\sin 4n}{n^4} \cdot i \right)$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + i\, \frac{2n-1}{3n+1} \right)$.

Найти круг сходимости степенных комплексных рядов:

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} (z - 2 + i)^n$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!\,(4+3i)^n}{(2n+1)!} z^n$.

Найти комплексную форму ряда Фурье для $2l$ - периодических функций $f(x)$:

6. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x < 0, \\ e^{-2x}, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$ 7. $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -2 < x \leq 0, \\ 1, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ & l = 2. \end{cases}$

Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в кольце K:

8. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$, $K:\ 2<|z|<3$.

9. $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$, $K:\ 0<|z-2|<1$.

10. $f(z)=\dfrac{2}{(z-1)(z-3)}$, $K:\ 3<|z-1|<+\infty$.

Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в окрестности точки z_0

11. $f(z)=e^{\frac{z}{z-3}}$, $z_0=3$.
12. $f(z)=\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z}$, $z_0=0$.

13. $f(z)=\ln\dfrac{z-1}{z-2}$, $z_0=\infty$.
14. $f(z)=\cos\dfrac{i}{z^2}+\dfrac{z}{z-1}$, $z_0=0$.

Задания для индивидуальной работы.

1. Найдите круг сходимости степенного ряда.
2. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в конце K.
3. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

I	II
1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3n+2}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}\left(z+2-i\right)^n$. 2. $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2+2z-8}$, $K:\ 2<\|z+2\|<4$. 3. $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-1}$, $z_0=1$. Отв.: 1. $\|z+2-i\|<2$; 2. $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^n}{(z+2)^{n+1}}-\dfrac{1}{6}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2)^n}{4^n}$; 3. $\sin 1+\dfrac{\cos 1}{z-1}-\dfrac{\sin 1}{2!(z-1)^2}-$ $-\dfrac{\cos 1}{3!(z-1)^3}+\ldots$, $0<\|z-1<\infty\|$.	1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)}{(4+i)^n}\left(z-3+i\right)^n$. 2. $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $K:\ 1<\|z\|<2$. 3. $f(z)=\ln\dfrac{z-3}{z}$, $z_0=\infty$ Отв.: 1. $\|z-3+i\|<\sqrt{17}$. 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}$; 3. $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n\cdot z^n}$, $\|z\|>3$.

III	IV
1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n+4}{(4+3i)^n}(z+1-2i)^n$.	1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n+4}{\left(\sqrt{3}+i\right)^n}(z+3-2i)^n$.
2. $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$, $K:\ 2<\lvert z-1\rvert<\infty$.	2. $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$, $K:\ 1<\lvert z\rvert<2$.
3. $f(z)=z\,e^{\frac{z}{z-4}}$, $z_0=4$.	3. $f(z)=z\cos\dfrac{1}{z-2}$, $z_0=2$.
Отв.: 1. $\lvert z+1-2i\rvert<5$;	Отв.: 1. $\lvert z+3-2i\rvert<2$;
2. $\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{5}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(z-1)^{n+1}}$;	2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}$;
3. $e+e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+2)\cdot 4^{n+1}}{(z-4)^n}, \lvert z-4\rvert>0$.	3. $2+(z-2)-\dfrac{1}{2!(z-2)}-\dfrac{1}{1!(z-2)^2}+$ $+\dfrac{1}{4!(z-2)^3}+\dfrac{2}{4!(z-2)^4}-...;$ $\lvert z-2\rvert>0$.

3.6. Классификация особых точек. Вычеты.

Точка $z=a$, в которой нарушаются условия аналитичности функции $f(z)$, называется *особой* точкой этой функции.

Если в окрестности точки $z=a$ нет других особых точек, то $z=a$ - *изолированная* особая точка.

Изолированные особые точки бывают 3 видов:

1. $z=a$ - устранимая особая точка, если $f(a)=$ нет, $\lim\limits_{z\to a} f(z)=C_0$. В ряду Лорана отсутствуют отрицательные степени $z-a$.
2. $z=a$ - полюс k – го порядка, если $f(a)=$ нет, $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$. В ряду Лорана есть конечное число отрицательных степеней, младшая из которых $(z-a)^{-k}$.
3. $z=a$ - существенно особая точка, если $f(a)=$ нет, $\lim\limits_{z\to a} f(z)=$ нет. В ряду Лорана бесконечное множество отрицательных степеней $z-a$.

Вычетом $f(z)$ в точке $z=a$ называется коэффициент C_{-1} при $(z-a)^{-1}$ в ряду Лорана, т.е. $\underset{z=a}{\mathrm{Res}}\, f(z)=C_{-1}$.

Если $z=a$ - нуль $k-$го порядка, то $\underset{z=a}{\mathrm{Res}}\, f(z)=0$.

Если $z=a$ - полюс $k-$го порядка, то

$$\underset{z=a}{\mathrm{Res}}\, f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\Big((z-a)^k f(z)\Big)^{(k-1)}, \quad k\ge 1.$$

<u>*Основная теорема о вычетах*</u>:

Если $f(z)$ - аналитическая функция в односвязной области *D*, ограниченной контуром *C*, за исключением точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{\mathrm{Res}}\, f(z).$$

<u>*Вторая теорема о вычетах:*</u>

Если $f(z)$ - функция, аналитическая в расширенной комплексной плоскости, за исключением конечного числа точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{\mathrm{Res}}\, f(z)+\underset{z=\infty}{\mathrm{Res}}\, f(z)=0.$$

Следовательно $\underset{z=\infty}{\mathrm{Res}}\, f(z)=-\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{\mathrm{Res}}\, f(z), \quad z_k\in\mathbb{C}, \quad k=\overline{1,n}$.

Задания для аудиторной работы.

Исследовать характер особой точки z_0. Найти вычеты функции $f(z)$ в точке z_0.

1. $f(z)=\dfrac{e^z-1}{\sin\pi z},\ z_0=0$.

2. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4},\ z_0=0$.

3. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4},\ z_0=-1$.

4. $f(z)=\cos\dfrac{1}{\pi+z},\ z_0=-\pi$.

5. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)},\ z_0=2\pi$.

6. $f(z)=\dfrac{\sin 4z-4z}{e^z-1-z},\ z_0=0$.

Вычислить интегралы с помощью вычетов

7. $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2(z+1)}dz$.

8. $\displaystyle\oint_{\gamma}\frac{z\,dz}{(z-1)^2(z+2)},\quad \gamma: x^{2/3}+y^{2/3}=3^{2/3}$.

9. $\displaystyle\oint_{|z-i|=1}\frac{e^z}{z^4+2z^2+1}dz$.

10. $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{\sin z\,dz}{z^2(z^2-4)}$.

Задания для индивидуальной работы.

1. Исследуйте характер особой точки z_0, найдите вычет функции $f(z)$ в этой точке.

2.-3. Вычислите интегралы с помощью вычетов.

I 1. $f(z)=\dfrac{e^{z+i}}{z+i},\ z_0=-i$. 2. $\displaystyle\oint\limits_{\mid z\mid=2}\frac{e^{z}dz}{z^2(z^2-9)}$. 3. $\displaystyle\oint\limits_{\mid z-i\mid=3}\frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz$. Отв.: 1. 1; 2. $-\dfrac{2}{9}\pi i$; 3. $2\pi i(1-e^{-1})$.	II 1. $f(z)=\dfrac{1+\cos z}{z-\pi},\ z_0=\pi$. 2. $\displaystyle\oint\limits_{\mid z\mid=3}\frac{\sin\pi z\,dz}{(z^2-1)^2},\quad \gamma:\frac{x^2}{4}+y^2=1$. 3. $\displaystyle\oint\limits_{\mid z-1\mid=2}\frac{\cos^{z}/2}{z^2-4}dz$. Отв.: 1. 0; 2. $-\pi^2 i$; 3. $\dfrac{\pi i}{2}\cos 1$.
III 1. $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z},\ z_0=0$. 2. $\displaystyle\oint\limits_{\mid z\mid=4}\frac{z^2+1}{z^2+2z-3}dz$. 3. $\displaystyle\oint\limits_{\mid z-2\mid=1{,}5}\frac{\sin iz}{z^2-4z+3}dz$. Отв.: 1. $-\dfrac{1}{6}$; 2. $-4\pi i$; 3. $\pi(sh1-sh3)$.	IV 1. $f(z)=\dfrac{1}{e^{z}-1}-\dfrac{1}{z},\ z_0=0$. 2. $\displaystyle\oint\limits_{\gamma}\frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^3}$, . $\gamma: x^2+y^2-4x=0$. 3. $\displaystyle\oint\limits_{\mid z+1\mid=1}\frac{e^{2z}dz}{z^2-1}$. Отв.: 1. –0,5; 2. 0; 3. $-\pi i e^{-2}$.

3.7. Вычисление определенных и несобственных интегралов с помощью вычетов.

Основная теорема о вычетах позволяет свести вычисление $\oint\limits_{C} f(z)dz$ к вычислению вычетов подынтегральной функции $f(z)$ относительно изолированных особых точек, расположенных внутри контура *C*.

Этим методом можно вычислить определенный интеграл вида

$$I=\int\limits_{0}^{2\pi} R(\sin t,\cos t)\,dt,$$

где *R* – рациональная функция от $\sin t$ и $\cos t$.

Замена $z = e^{it}$ переводит отрезок $[0; 2\pi]$ изменения переменной t в окружность $|z| = 1$. При этом

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}; \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}; \; dt = \frac{dz}{iz}$$

и данный интеграл I переходит в интеграл от комплексной переменной z по замкнутому контуру $|z| = 1$.

$$I = \oint\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}; \frac{z^2 + 1}{2z}\right) \cdot \frac{dz}{iz} = \oint\limits_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),$$

где $z_k \in (|z| < 1)$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Отметим два типа *несобственных интегралов* по бесконечному промежутку, к которым можно применить теорию вычетов.

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}\limits_{z=z_k} f(z)$, где $z_k \in (\operatorname{Im} z > 0)$, $k = \overline{1, n}$, если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям:

1) она аналитическая на действительной оси $x \in \mathbb{R}$;
2) имеет конечное число изолированных особых точек z_k, $k = \overline{1, n}$, принадлежащих верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$;
3) на бесконечности имеет нуль второго и выше порядка.

б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} F(x)dx = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}\limits_{z=z_k} e^{itz} F(z)$, где $t > 0$, $z_k \in (\operatorname{Im} z > 0)$, $k = \overline{1, n}$, если выполнены условия:

1) $F(z)$ - аналитическая на действительной оси функция;
2) имеет в верхней полуплоскости конечное число особых точек;
3) $\lim\limits_{z \to \infty} F(z) = 0$.

Задания для аудиторной работы.

Вычислить интегралы

1. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dt}{13 - 5\cos t}$.
2. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dt}{(3 + \sin t)^3}$.
3. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dt}{(5 - 4\cos t)^2}$.
4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 2}{x^4 + x^2 + 12} dx$.
5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x - 1}{(x^2 + 4)^2} dx$.
6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$.
7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 - 8x + 20} dx$.
8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{2ix}}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$.

Задания для индивидуальной работы.

1. Вычислить определенный интеграл с помощью вычетов.
2.-3. Вычислить несобственные интегралы с помощью вычетов.

I	II
1. $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{5-3\cos t}$. 2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$. 3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{xe^{2ix}}{x^2-10x+26}dx$. Отв.: 1. $\dfrac{4\pi}{5}$; 2. $\dfrac{\pi}{288}$; 3. $\pi e^{-2}\left(5\cos 5-\sin 5+\right.$ $\left.+i\left(\cos 5-5\sin 5\right)\right)$.	1. $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{4+\sin t}$. 2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$. 3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2e^{2ix}}{x^4+13x^2+36}dx$. Отв.: 1. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{15}}$; 2. $\dfrac{2\pi}{27}$; 3. $0{,}2\pi\left(3e^{-3}-2e^{-2}\right)$.
III	IV
1. $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{(2+\sin t)^2}$. 2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}dx$. 3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2e^{2ix}}{(x^2+1)(x^2+25)}dx$. Отв.: 1. $\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; 2. $\dfrac{17}{2}\pi$; 3. $\dfrac{\pi}{24}(5e^{-10}-e^{-2})$.	1. $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{(5-3\cos t)^2}$. 2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$. 3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{xe^{3ix}}{x^2+4x+8}dx$. Отв.: 1. $\dfrac{3\pi}{32}$; 2. $\dfrac{2\pi}{675}$; 3. $\pi e^{-6}\left(\sin 6-\cos 6+\right.$ $\left.+i\left(\cos 6+\sin 6\right)\right)$.

IV. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

4.1. Преобразование Лапласа. Теоремы линейности и подобия. Теорема запаздывания в оригинале.

Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ действительного аргумента называется функция $F(p)$ комплексной переменной, определяемая формулой

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt\ . \tag{1}$$

Функция $f(t)$, удовлетворяющая условиям:

1. $f(t)=0$, если $t<0$;
2. при $t>0$, $f(t)$ - непрерывна, за исключением, может быть, конечного числа точек разрыва первого рода;
3. при возрастании t $\left|f(t)\right|\le M\,e^{\alpha t}$, M и $\alpha=const$;

называется *оригиналом*, а функция $F(p)$, соответствующая ей по формуле (1), называется *изображением*.

Соответствие между оригиналом и изображением записывают так:

$$F(p)=L(f(t))\ .$$

Приведем изображения некоторых функций-оригиналов:

$f(t)$	1	e^{at}	t^n	$\cos wt$	$\sin wt$	$ch\ wt$	$sh\ wt$
$F(p)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1}{p-a}$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\dfrac{p}{p^2+w^2}$	$\dfrac{w}{p^2+w^2}$	$\dfrac{p}{p^2-w^2}$	$\dfrac{w}{p^2-w^2}$

Теорема линейности. Для $\forall$ *const* A и B справедливо равенство

$L(A\,f(t)+B\varphi(t))=A\,L\,f(t)+B\,L\varphi(t)=A\,F(p)+B\,\Phi(p)$.

Теорема подобия. Если $L(f(t))=F(p)$ и λ - некоторая положительная *const*, то $L(f(\lambda t))=\dfrac{1}{\lambda}F\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)$.

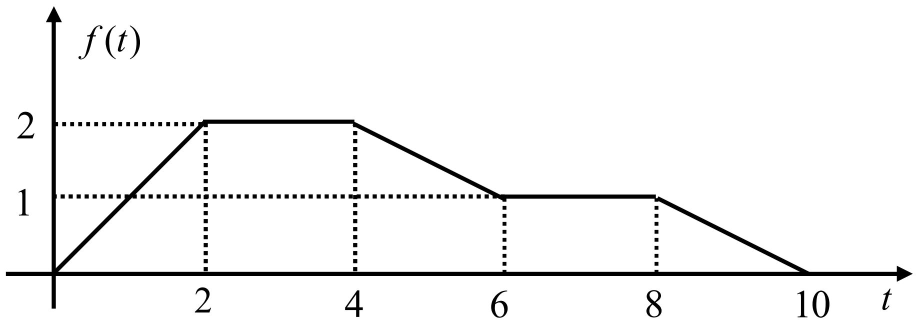
Теорема запаздывания в оригинале. Если $L\,f(t)=F(p)$ и τ - любое положительное число, то $L(f(t-\tau)\eta(t-\tau))=e^{-p\tau}F(p)$, т.е. включение оригинала с запаздыванием на τ соответствует умножению изображения на $e^{-p\tau}$.

Задания для аудиторной работы.

Найти изображения для следующих оригиналов:

1. $f(t)=(3t^4-2t^3+t^2-7)\ \eta(t)$;
2. $f(t)=(5\cos t-3\sin t)\ \eta(t)$;

3. $f(t) = (e^{-7t} + 4sh7t - 2ch7t)\eta(t)$;
4. $f(t) = \cos^2 8t \cdot \eta(t)$;
5. $f(t) = sh^3 t \cdot \eta(t)$;
6. $f(t) = ((t-1)^2 + 4(t-1) + 6)) \cdot \eta(t-1)$;
7. $f(t) = (t^2 - 4t) \cdot \eta(t-2)$;
8. $f(t) = \sin 2(t-3) \cdot \eta(t-3)$;
9. $f(t) = (t^3 - 6t^2 + 4t - 8) \cdot \eta(t-1)$.
10. Записать единым аналитическим выражением функцию $f(t)$, заданную графически. Найти ее изображение



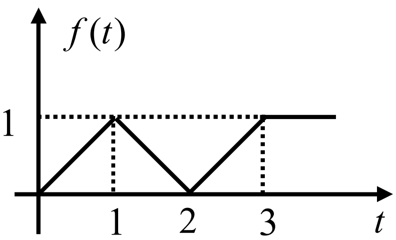
Задания для индивидуальной работы.

Найдите изображения для следующих оригиналов.

<table>
<tr><td>

I

1. $f(t) = (3e^{it} - 4\sin t + 7\cos t) \cdot \eta(t)$
2. $f(t) = \sin 6t \cdot \cos 4t \cdot \eta(t)$.
3. $f(t) = (t^2 - t + 2) \cdot \eta(t-1)$.
4. $f(t) = (2t^2 - 6t) \cdot \eta(t-3)$.
5.



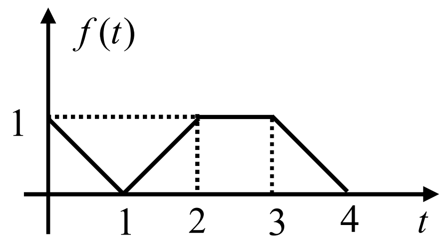
Отв.: 1. $\frac{10p - 4 + 3i}{p^2 + 1}$;

2. $\frac{6p^2 + 120}{(p^2 + 100)(p^2 + 4)}$;

</td><td>

II

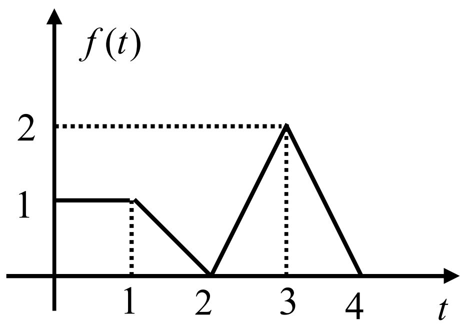
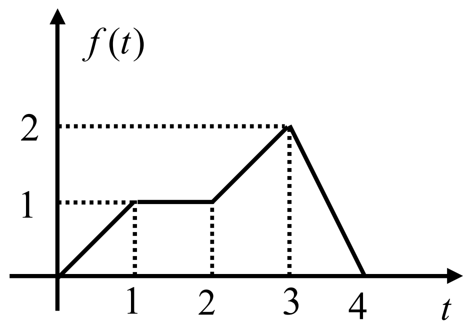
1. $f(t) = (4e^{3t} + 2sh3t - 6sh3t) \cdot \eta(t)$
2. $f(t) = \sin 8t \cdot \sin 2t \cdot \eta(t)$.
3. $f(t) = (t^2 + 2t + 5) \cdot \eta(t-3)$.
4. $f(t) = (t^2 + 1) \cdot \eta(t-1)$.
5.



Отв.: 1. $\frac{18 - 2p}{p^2 - 9}$;

2. $\frac{32p}{(p^2 + 100)(p^2 + 36)}$;

</td></tr>
</table>

3. $\dfrac{2p^2+p+2}{p^3}e^{-p}$; 4. $\dfrac{6p+4}{p^3}e^{-3p}$; 5. $\dfrac{1}{p^2}(1-e^{-p})(1-e^{-p}+e^{-2p})$.	3. $\dfrac{20p^2+8p+2}{p^3}e^{-3p}$; 4. $\dfrac{2(p^2+p+1)}{p^3}e^{-p}$; 5. $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p^2}(1-e^{-p})(1-e^{-p}+e^{-3p})$.
III 1. $f(t)=(2e^{2it}+3\cos 2t-4\sin 2t)\times$ $\times\eta(t)$. 2. $f(t)=\sin 4t\cdot\cos 10t\cdot\eta(t)$; 3. $f(t)=(t^2-4t+3)\cdot\eta(t-2)$; 4. $f(t)=(t^2+5t+6)\cdot\eta(t-1)$; 5.  Отв.: 1. $\dfrac{5p-8+4i}{p^2+4}$; 2. $\dfrac{4p^2-336}{(p^2+196)(p^2+36)}$; 3. $\dfrac{2-p^2}{p^3}e^{-2p}$; 4. $\dfrac{6p^2+7p+2}{p^3}e^{-p}$; 5. $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p^2}(e^{-p}-3e^{-2p}+4e^{-3p}+2e^{-4p})$	IV 1. $f(t)=5(e^{-2t}+2sh2t+3ch2t)\times$ $\times\eta(t)$. 2. $f(t)=\cos 5t\cdot\cos 3t\cdot\eta(t)$; 3. $f(t)=(t^2+t+2)\cdot\eta(t-3)$; 4. $f(t)=(t^2-7t+6)\cdot\eta(t-2)$; 5.  Отв.: 1. $\dfrac{8p-6}{p^2-4}$; 2. $\dfrac{p(p^2+34)}{(p^2+64)(p^2+4)}$; 3. $\dfrac{14p^2+7p+2}{p^3}e^{-3p}$; 4. $\dfrac{2-3p-4p^2}{p^3}e^{-2p}$; 5. $\dfrac{1}{p^2}(1-e^{-p}+e^{-2p}-3e^{-3p}+2e^{-4p})$

4.2. Теорема смещения в изображении. Дифференцирование оригинала и изображения.

Теорема смещения в изображении. Если $L(f(t)) = F(p)$ и λ - *const*, то $L(e^{\lambda t} f(t)) = F(p-\lambda)$.

Отсюда следуют формулы:

$$L(e^{\lambda t}\cos wt)) = \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2 + w^2}; \qquad L(e^{\lambda t}\sin wt)) = \frac{w}{(p-\lambda)^2 + w^2};$$

$$L(e^{\lambda t}\, ch\, wt)) = \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2 - w^2}; \qquad L(e^{\lambda t}\, sh\, wt)) = \frac{w}{(p-\lambda)^2 - w^2};$$

$$L(e^{\lambda t}\cdot t^n) = \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}, \quad n \ge 1.$$

Теорема о дифференцировании оригинала. Пусть функция $f(t)$ n раз непрерывно дифференцируема на $(0;+\infty)$ и $f^{(n)}(t)$ является оригиналом. Тогда:

а) функции $f(t),\ f'(t),\ f''(t),\ ...,\ f^{(n-1)}(t)$ также оригиналы;

б) существуют $\lim\limits_{t\to 0+0} f(t) = f(+0),\quad \lim\limits_{t\to 0+0} f'(t) = f'(+0),\ ...,$

$\lim\limits_{t\to 0+0} f^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(+0)$;

в) если $L(f(t)) = F(p)$, то

$$L f^{(n)}(t) = p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - ... - f^{(n-1)}(+0).$$

При $n=1$ $\quad L f'(t) = pF(p) - f(+0)$,

При $n=2$ $\quad L f''(t) = p^2 F(p) - p f(+0) - f'(+0)$.

Если $f(t)$ и ее любые производные непрерывны при $t = 0$, то $L(f^{(n)}(t)) = p^n F(p)$, т.е. операция дифференцирования оригинала заменяется операцией умножения изображения на p.

Теорема о дифференцировании изображения.

$L((-t) f(t) = F'(p),\quad L((-t)^2 f(t) = F''(p), ...,\quad L((-t)^n f(t) = F^{(n)}(p)$, так как известно, что $F(p)$ в области существования является функцией аналитической.

Задания для аудиторной работы.

Найти изображения для следующих оригиналов

1. $f(t) = cht\cdot\sin t$; 2. $f(t) = ch\,t\cdot sh\,t$; 3. $f(t) = -t\cos wt$;

4. $f(t) = e^{4t}\cos t$; 5. $f(t) = t\cdot e^{-at}$; 6. $f(t) = t^2 e^{5t}$;

7. $f(t) = e^{2(t-1)}\cos 3(t-1)\cdot\eta(t-1)$.

Найти изображения для функций $f(t)$ и $f'(t)$

8. $f(t) = t\cdot\sin t + \cos t$; 9. $f(t) = e^{-t}\sin^2 t$;

10. $f(t) = \frac{1}{2}\left(ch\,t\sin t + sh\,t\cos t\right)$.

Задания для индивидуальной работы

Выполнить свой вариант заданий № 1 и № 2 из аттестационной работы № 6.

4.3. Обратное преобразование Лапласа. Свертка оригиналов. Теорема Бореля.

Сверткой оригиналов $f(t)$ и $\varphi(t)$ называется интеграл вида

$$\int_0^t f(u)\varphi(t-u)\,du = f*\varphi \qquad (1)$$

Свойства свертки:

1. переместительность $f*\varphi = \varphi * f$;
2. ассоциативность $(f*\varphi)*\psi = f*(\varphi*\psi)$;
3. линейность $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)*\varphi = \alpha_1(f_1*\varphi) + \alpha_2(f_2*\varphi),\quad \alpha_1, \alpha_2 = const$.

Теорема Бореля об умножении изображений.

Если $L(f(t)) = F(p)$ и $L(\varphi(t)) = \Phi(p)$, то свертке оригиналов соответствует произведение изображений

$$L(f(t)*\varphi(t)) = F(p)\cdot\Phi(p) \qquad (2)$$

Обратное преобразование Лапласа

$f(t) = L^{-1}F(p) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp$ - формула Меллина.

С учетом формулы Меллина и леммы Жордана получают формулу для нахождения оригинала с помощью вычетов

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k} F(p)e^{pt}. \qquad (3)$$

Если $F(p)$ - рациональная функция , т.е. $F(p) = \dfrac{\Phi(p)}{\Psi(p)}$, где $\Phi(p)$ и $\Psi(p)$ - известные многочлены и $p = p_k$ - простые полюсы, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi(p_k)}{\Psi'(p_k)}e^{p_k t} \qquad (4)$$

Задания для аудиторной работы.

По известному изображению $F(p)$ найдите оригинал $f(t)$:

1. $F(p)=\dfrac{1}{p^{10}}$; 2. $F(p)=\dfrac{1}{(p-3)^5}$; 3. $F(p)=\dfrac{3}{(p-2)^2+9}$;

4. $F(p)=\dfrac{P}{p^2-25}$; 5. $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2+2p}$; 6. $F(p)=\dfrac{p-2}{p^2-4p-5}$;

7. $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{(p+1)^3}$; 8. $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+1)}$;

9. $F(p)=\dfrac{5p+8}{p^4-13p^2+36}$; 10. $F(p)=\dfrac{4p}{(p^2+16)(p^2+25)}$.

Задания для индивидуальной работы.

Найдите оригинал по данному изображению:

1. с помощью теории Бореля (2);

2.-3. С помощью вычетов (формулы (3)-(4).

4. Решите свой вариант задания № 3 из аттестационной работы № 6.

I 1. $F(p)=\dfrac{4}{p^2(p^2+16)}$; 2. $F(p)=\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$; 3. $F(p)=\dfrac{p}{p^4+5p^2+4}$; Отв.: 1. $\dfrac{t}{4}-\dfrac{1}{16}\sin 4t$; 2. $\dfrac{13}{17}e^{2t}-e^{-2t}\left(\dfrac{13}{17}\cos t-\dfrac{16}{17}\sin t\right)$; 3. $\dfrac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$.	II 1. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$; 2. $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$; 3. $F(p)=\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$; Отв.: 1. $0{,}2(3\sin 3t-2\sin 2t)$; 2. $-0{,}5e^{-t}+0{,}5e^{-2t}\left(\cos t+3\sin t\right)$; 3. $1-e^{-t}\cdot\cos\sqrt{2}t$.
III 1. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+64)^2}$; 2. $F(p)=\dfrac{2p+1}{(p+1)(p^2+2p+3)}$; 3. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$;	IV 1. $F(p)=\dfrac{3}{p(p^2-9)}$; 2. $F(p)=\dfrac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}$; 3. $F(p)=\dfrac{p}{p^4-5p^2+4}$;

Отв.: 1. $\frac{t}{16}\sin 8t$; 2. $e^{-t}\left(-0{,}5+0{,}5\cos\sqrt{2}\,t+\right.$ $\left.+\sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,t\right)$; 4. $e^{-t}(1-t^2)$.	Отв.: 1. $\frac{1}{6}(-2+e^{-3t}+e^{3t})$; 2. $e^{2t}\left(-4+4\cos t-3\sin t\right)$; 3. $\frac{1}{3}(ch\ 2t-ch\ t)$.

4.4. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений и систем линейных дифференциальных уравнений операционным методом

Требуется найти решение $y(t)$ линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(t), \qquad (1)$$

($f(t)$ - оригинал) удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0)=y_0,\ \ y'(0)=y_0',\ \ \ y''(0)=y_0'',\ldots,\ \ \ y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)}\ . \qquad (2)$$

К обеим частям уравнения (1) применяем преобразование Лапласа, учитывая, что

$$L(y(t))=Y(p),\ L(f(t)=F(p),\ L(y'(t))=pY(p)-y_0,\ L(y''(t))=p^2Y(p)-$$

$$-py_0-y_0',\ldots,L(y^{(n)}(t))=p^nY(p)-p^{n-1}y_0-p^{n-2}y_0'-\ldots-p\,y_0^{(n-2)}-y_0^{(n-1)},$$

получим операторное уравнение вида

$$(p^n+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+\ldots+a_{n-1}p+a_n)\,Y(p)+Q(p)=F(p), \qquad (3)$$

где $Q(p)$ - некоторый многочлен, коэффициенты которого зависят от начальных данных (2).

Из уравнения (3) находим операторное решение

$$Y(p)=\frac{F(p)-Q(p)}{Z(p)},\ \text{ где }\ Z(p)=p^n+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+\ldots+a_n\ .$$

Переходим от изображений к оригиналам, получаем решение задачи Коши уравнения (1) с условиями (2) $y(t)=L^{-1}Y(p)$.

Аналогично решаются системы ЛДУ с постоянными коэффициентами. После преобразования системы по Лапласу получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций, решаем ее. Затем переходим от изображений к оригиналам.

Задания для аудиторной работы.

Найти решение задачи Коши для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений:

1. $y'' + y' - 2y = -2(t+1), \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 1$.

2. $y'' + y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = -1, \ y'(0) = 0$.

3. $y'' + 4y = \sin 2t, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1$.

4. $\ddot{x} + x = f(t), \ x(0) = \dot{x}(0) = 0, \ \textit{где} \ f(t) = \begin{cases} \cos t, & \textit{если} \ 0 \le t \le \pi, \\ 0, & \textit{если} \ t > \pi. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + 2, \\ \dot{y} = 4y + 1, \end{cases} \qquad x(0) = 2, \ y(0) = 1.$

6. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \ y(0) = 1.$

7. $\begin{cases} \ddot{x} - \dot{y} = e^t, \\ \dot{x} + \ddot{y} - y = 0, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \ y(0) = -1, \ \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0.$

8. $\begin{cases} \ddot{x} - \dot{y} = f_1(t), \\ x + \dot{y} = f_2(t), \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 0, \ \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0,$

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \textit{при} \quad 0 \le t < \pi, \\ 0 & \textit{при} \quad t \ge \pi, \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} t & \textit{при} \quad 0 \le t < \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - t & \textit{при} \quad \dfrac{\pi}{2} \le t \le \pi, \\ 0 & \textit{при} \quad t \ge \pi. \end{cases}$$

Задания для индивидуальной работы.

Найдите решения задачи Коши для
1. дифференциального уравнения,
2. системы линейных ДУ.
3. Решите свой вариант задания № 4 из АР № 6.

I 1. $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t}\cos 3t,$ $y(0) = 5,\ \ y'(0) = 1.$ 2. $\begin{cases} x' = -2x + 5y + 1, \\ y' = x + 2y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 2.$ Отв.: 1. $y = e^{-t}\left(5\cos 3t + \left(2 + \frac{t}{3}\right)\times\right.$ $\left.\times\sin 3t\right);$ 2. $\begin{cases} x = \frac{1}{3}\left(6e^{3t} - 5e^{-3t} - 1\right), \\ y = \frac{1}{3}\left(6e^{3t} + e^{-3t} - 1\right). \end{cases}$	II 1. $y'' - 9y = \sin t - \cos t,$ $y(0) = -3,\ \ y'(0) = 2.$ 2. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x - y + 9, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ \ y(0) = 0.$ Отв.: 1. $y = 0{,}1(\cos t - \sin t - 12e^{3t} -$ $-13e^{-3t});$ 2. $\begin{cases} x = \frac{1}{3}\left(8e^{3t} + 7e^{-3t} - 12\right), \\ y = \frac{1}{3}\left(e^{3t} - 7e^{-3t} + 3\right). \end{cases}$
III 1. $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t},$ $y(0) = 2,\ \ y'(0) = 6.$ 2. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -5x - 3y + 2, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ \ y(0) = 0.$ Отв.: 1. $y = 4e^{t} - 8e^{2t} + 6e^{3t};$ 2. $\begin{cases} x = \frac{1}{4}\left(11e^{2t} - e^{-2t} - 2\right), \\ y = \frac{1}{4}\left(-11e^{2t} + 5e^{-2t} + 6\right). \end{cases}$	IV 1. $y'' - 2y' = e^{t}(t^2 + t - 3),$ $y(0) = 2,\ \ y'(0) = 2.$ 2. $\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2, \\ y' = 3x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ \ y(0) = 2.$ Отв.: 1. $y = e^{2t} + e^{t}(1 - t - t^2);$ 2. $\begin{cases} x = \frac{1}{16}\left(25e^{6t} - 21e^{-2t} - 4\right), \\ y = \frac{1}{16}\left(15e^{6t} + 21e^{-2t} - 4\right). \end{cases}$

Литература

1. Воробьев Н.Н. Теория графов. - СПб.: Лань, 2002.-408с.
2. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике. – Мн. : ТетраСистемс, 2000. – 640 с.
3. Гладкий И.И., Сидоревич М.П., Тузик Т.А. Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления: методические указания для студентов технических специальностей. – Брест: БГТУ, 2000. – 87 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. – М. : Высш. шк., 1997. – 416 с.
5. Ершова В.В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление. – Мн. : Выш. шк., 1976. – 256 с.
6. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Мн. : Выш. шк., 1985. Ч. III. –208 с. 1987. Ч. IV. – 240 с., 1988. Ч. V. – 254 с.
7. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М. : Наука, 1972. – 416 с.
8. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М. : Наука, 1981. – 368 с.
9. Кузнецов А.В., Сакович В.А. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование. – Мн. : Выш. шк., 1995. – 383 с.
10. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. – М. : Высш. шк., 2001. – 445 с.
11. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. – М. : Наука, 1985. – 576 с.
12. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / Под ред. А.П. Рябушко. Ч. 3. – Мн. : Выш. шк., 1991. – 288 с.
13. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М. : Наука, 1981. – 368 с.
14. Тузик А.И. Высшая математика. Ряды. – Брест: БГТУ, 2003. –123 с.
15. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях. – М. : Высш. шк., 1983. – 176 с.

Учебное издание

Составители: Тузик Татьяна Александровна,
Журавель Мария Григорьевна.

Ряды. Теория функций комплексной переменной. Преобразование Лапласа.

Задачи и упражнения

Редактор: Т.В. Строкач
Ответственный за выпуск: Т.А. Тузик
Технический редактор: А.Д. Никитчик
Компьютерный набор: Д.Н. Мищирук

Подписано к печати 14.09.04. Формат 60x84/16. Бумага «Чайка».
Усл. п. л. 3,25. Уч. изд. л. 3,5. Тираж 158 экз. Заказ № 889.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.