Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»
Кафедра высшей математики

Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных.

Практикум по дисциплине «Высшая математика»
для студентов технических специальностей.

Брест 2006

УДК 519. 2 (076)

Практикум составлен в соответствии с рабочей программой курса «Высшая математика» для технических специальностей. В нем содержатся материалы по линейной алгебре, аналитической геометрии, введению в математический анализ, дифференциальному исчислению функций одной и нескольких переменных.

Предлагаемое пособие предназначено для проведения практических занятий в аудитории и выдачи блоков домашних заданий студентам для индивидуального выполнения.

Составители: ***Лизунова И.В., доцент***
Денисович О.К., ассистент
Остапчук Е.М., ассистент

Рецензент: Савчук В.Ф., зав. кафедрой информатики прикладной математики БрГУ им. А.С. Пушкина, к.ф.-м.н., доцент.

© Учреждение образования «Брестский государственный технический университет» 2006

Глава 1. Элементы линейной алгебры.

1.1 Определители.
Свойства определителей. Вычисление определителей второго и третьего порядков. Вычисление определителей n – го порядка.

1.1 Определителем n – го порядка называется число Δ_n, записываемое в виде квадратной таблицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и вычисляемое согласно ниже указанным правилам. Числа $a_{ij}\left(i,j=\overline{1,n}\right)$ называются элементами определителя. Индекс i указывает номер строки, а j – номер столбца определителя, на пересечении которых находится элемент a_{ij}. Любую строку или столбец определителя будем называть рядом. Главной диагональю определителя называется совокупность элементов a_{11}, a_{22}, a_{33}, …, a_{nn}. Побочную диагональ определителя образует совокупность элементов a_{1n}, a_{2n-1}, …, a_{n1}.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель (n-1) – го порядка, полученный из определителя n – го порядка, вычеркиванием i - й строки и j – го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется произведение $A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}M_{ij}$.

Например, в определителе $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$ минором M_{21} является определитель, составленный из элементов, оставшихся после вычеркивания второй строки и первого столбца: $M_{21}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$; соответственно алгебраическим дополнением A_{21} будет число $A_{21}=\left(-1\right)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$.

Свойства определителей

1. Значение определителя не изменится после замены всех его строк соответствующими столбцами, и наоборот;

2. если поменять местами два параллельных ряда определителя, то он изменит знак на противоположный;
3. определитель с двумя одинаковыми параллельными рядам равен нулю;
4. если все элементы некоторого ряда определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя. Отсюда следует, что если элементы какого – либо ряда умножить на число, то определитель умножится на это число;
5. если все элементы какого – либо ряда определителя равны нулю, то определитель также равен нулю;
6. определитель, у которого элементы двух параллельных рядов соответственно пропорциональны, равен нулю;
7. если каждый элемент какого – либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором – из вторых слагаемых;
8. определитель не изменится, если ко всем элементам какого – либо его ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженные на одно и то же произвольное число;
9. сумма произведений элементов любого ряда определителя и их алгебраических дополнений не зависит от номера ряда и равна этому определителю

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} ;$$

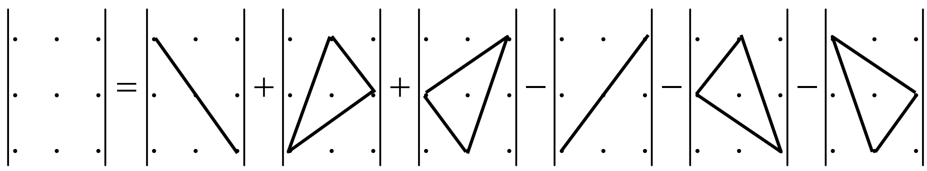
10. сумма всех произведений элементов какого – либо ряда определителя и алгебраических дополнений соответствующих элементов другого параллельного ряда равна нулю.

Определителем второго порядка называется число вычисленное по правилу: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Определитель третьего порядка можно находить по правилу “треугольников” (правило (Саррюса):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Вычисление проводится по схеме:



Первое из трех слагаемых, входящих в сумму со знаком “+”, есть произведение элементов главной диагонали, второе и третье – произведение элементов, находящихся в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Три слагаемых, входящих в сумму со знаком “-”, определяются аналогично, но относительно второй (побочной) диагонали.

Вычисление определителя 3-го порядка можно свести к вычислению трех определителей 2-го порядка, предварительно разложив определитель 3-го порядка по одному из рядов (свойство 9).

***Пример*:** Вычислить определитель разложением по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3(-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= 3(5\cdot 2 - 3\cdot 4) - 2(2\cdot 2 - 3\cdot 3) + 1\cdot(2\cdot 4 - 5\cdot 3) = -3.$$

Рассмотрим вычисление определителей n-го порядка $(n > 3)$.

Метод приведения определителя к треугольному виду (с помощью элементарных преобразований) заключается в том, что все элементы, расположенные по одну сторону одной из диагоналей, равны нулю. В этом случае определитель равен произведению элементов его диагонали.

Пример. Вычислить определитель методом приведения к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

При нахождении значения определителя были выполнены следующие операции: первую строку, умноженную на – 1, сложили со второй, третьей, четвертой строками; вторую строку умножили на – 2, на – 3 и сложили соответственно с третьей и четвертой строками; третью строку умножили на – 3 и сложили с четвертой строкой.

Метод эффективного понижения порядка (или метод рекуррентных соотношений) состоит в том, что определитель n – го порядка выражают через определители того же вида, но более низкого порядка разложением по строке или столбцу.

Пример. Вычислить определить $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение

Умножим третий столбец определителя на 3 и прибавим к первому, затем умножим на – 2 и прибавим ко второму (см. свойство 8). Тогда в первой строке все элементы, кроме одного, будут нулями. Разложим полученный определитель по элементам первой строки (свойство 9) и вычислим его:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -14 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -14 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(-56+18) = 38.$$

Пример. Вычислить, используя свойства определителей:

$$\begin{vmatrix} a & a^2+1 & (a+1)^2 \\ b & b^2+1 & (b+1)^2 \\ c & c^2+1 & (c+1)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^2+1 & (a^2+1)+2a \\ b & b^2+1 & (b^2+1)+2b \\ c & c^2+1 & (c^2+1)+2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^2+1 & a^2+1 \\ b & b^2+1 & b^2+1 \\ c & c^2+1 & c^2+1 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a & a^2+1 & 2a \\ b & b^2+1 & 2b \\ c & c^2+1 & 2c \end{vmatrix} = 0+0=0.$$

Так как третий столбец данного определителя можно представить в виде суммы двух столбцов, определитель можно представить в виде суммы двух определителей (свойство 7). Второй и третий столбцы одинаковы в первом определители, а во втором определителе третий столбец пропорционален первому, следовательно, оба эти определителя равны нулю (свойства 3 и 6).

Задания для аудиторных занятий.

1. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2x & 2xy \\ 1 & y \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

2. Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ -y-3 & x-2 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} \sin 2x & \sin x \\ \cos x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0$

Ответы: а) $(2;-3)$; б) $\frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in z$.

3. Вычислить определители и сформулировать соответствующее свойство:

1. а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$;

2. а) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 9 \end{vmatrix}$;

3. а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

4. а) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -8 & -20 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 4 & 0 & -8 \\ 5 & 3 & -10 \end{vmatrix}$;

5. а) $3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$, б) $2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$;

6. а) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 6 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$;

7. а) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -9 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix}$.

4. Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} x+2 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & x-1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$, б) $\begin{vmatrix} -3 & x-1 & 1 \\ x+2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 6$.

Ответы: а) $-\frac{5}{3}$; 2, б) 1.

5. Решить неравенство:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \le 4$, б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ x+2 & 0 & 1 \\ -2 & 3-x & 1 \end{vmatrix} < 0$.

Ответы: а) $\left(-\infty; -\frac{36}{5}\right]$, б) $\left(-\sqrt{23}; \sqrt{23}\right)$.

6. Вычислить определители четвертого порядка:

1. а) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

Ответы: а) 48, б) 1.

2. а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

Ответы: а) 160, б) 900.

7. Вычислить определители приведением к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} -n & 1-n & 2-n & \dots & -2 & -1 \\ 1-n & 2-n & 3-n & \dots & -1 & 0 \\ 2-n & 3-n & 4-n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

б) $\left.\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots 1-n \end{vmatrix}\right\} n$

Ответы: а) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, б) 0.

Задания для индивидуального выполнения.

1. Для данного определителя найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i2}, a_{2j}. Вычислить определитель: а) по правилу “треугольников”; б) разложив его по элементам какого – либо ряда:

I	а) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$ $i=2$, $j=3$	б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ $i=1$, $j=2$
II	а) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ $i=1$, $j=1$	б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ $i=2$, $j=1$
III	а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$ $i=3$, $j=1$	б) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$ $i=2$, $j=1$

IV	а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ $i=2,\ j=3$	б) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ $i=1,\ j=2$

2. Решить уравнение:

I	а) $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4 \\ -x & -3 \end{vmatrix}=0$	б) $\begin{vmatrix} x+3 & x+1 \\ x-1 & x-2 \end{vmatrix}=0$
II	а) $\begin{vmatrix} 3-x & x+2 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix}=6$	б) $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 1-y & x-2 \end{vmatrix}=-4$
III	а) $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 7-y & x+4 \end{vmatrix}=-34$	б) $\begin{vmatrix} \sin 2x & -\sin 3x \\ \cos 2x & \cos 3x \end{vmatrix}=0$
IV	а) $\begin{vmatrix} 2x+1 & 0 \\ y^2 & 2x \end{vmatrix}=5$	б) $\begin{vmatrix} 6x^3 & x+4 \\ 10x & 0 \end{vmatrix}=1$

3. Вычислить определитель четвертого порядка:

I	а) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$	б) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$
II	а) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$	б) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$
III	а) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$	б) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$
IV	а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$	б) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

Ответы: 3. **I** а) 18, б) 4; **II** а) 18; б) 20; **III** а) 27, б) 17; **IV** а) –6, б) 150.

1.2 Матрицы.
Операции над матрицами. Обратная матрица.
Элементарные преобразования матрицы. Понятие ранга матрицы.

Матрицей порядка $m \times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из *mn* чисел a_{ij}, называемых элементами матрицы, расположенных в *m* строках и *n* столбцах, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Обозначения матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; A_{mxn};\ \left[a_{ij}\right],\ \left(\mathrm{a_{ij}}\right)\ \left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right).$$

Если *m*=*n*, то матрица *называется квадратной*. *Диагональной матрицей называется* квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали (т.е. с индексами $i \neq j$) равны нулю. *Единичной (обозначается Е) называется* диагональная матрица с единицами на главной диагонали. *Нулевой называется* матрица, все элементы которой равны нулю.

Над матрицами можно осуществлять следующие операции: сложение, умножение на число, умножение матриц.

Суммой матриц $A = \left[a_{ij}\right]$ и $B = \left[b_{ij}\right]$ одинакового размера называется матрица $C = \left[c_{ij}\right]$ того же размера, причем $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall\ i, j$.

Произведением матрицы $A = \left[a_{ij}\right]$ $\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$ на число $\alpha \in R$ называется матрица $C = \left[c_{ij}\right]$ $\left(i = \overline{1,m}; j = 1,n\right)$, причем $c_{ij} = \alpha a_{ij}$, $\forall ij$.

Матрицы A_{mxp} и B_{pxn} называются согласованными, если число столбцов матрицы A_{mxp} равно числу строк матрицы B_{pxn}.

Произведением матрицы $A = \left[a_{ij}\right]$ $\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,p}\right)$ на согласованную матрицу $B = \left[b_{ij}\right]$ $\left(i = \overline{1,p}; j = \overline{1,n}\right)$ называется матрица $C = \left[c_{ij}\right]$ $\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$, причем $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка *n*: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Если определитель матрицы A_{nxn} отличен от нуля $(\det A \neq 0)$, то матрица называется невырожденной.

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице *A*, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$, где *E* – единичная матрица n – го порядка.

Теорема. Если *A* невырожденная квадратная матрица порядка *n*, то для нее существует обратная матрица, которую можно найти по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы *A*.

Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие операции:

1) умножение строки (столбца) матрицы на число;
2) прибавление к строке (столбу) другой строки (столбца), умноженной на произвольное число;
3) перестановка двух строк (столбцов) матрицы.

Рангом (r_A) матрицы *A* называют наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля.

Теорема. Ранг матрицы, полученной из данной с помощью элементарных преобразований, равен рангу данной матрицы.

При вычислении ранга матрицы используют метод приведения матрицы к трапециевидной форме, метод окаймляющих миноров и другие.

Примеры. Найти ранги матриц:

$$\text{а)} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{б)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & -4 \\ 5 & -2 & 8 & -5 \end{bmatrix}.$$

Решение

а) С помощью элементарных преобразований приведем матрицу к трапециевидной форме. Прибавим ко второй строке первую:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Вторую строку умножим на –1 и прибавим к третьей:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Получим трапециевидную матрицу, ранг которой равен 2.

б) Для вычисления ранга матрицы воспользуемся методом окаймляющих миноров. Среди миноров 2-го порядка есть отличные от нуля, например, $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Все окаймляющие миноры 3-го порядка равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 16 + 2 - 6 - 12 = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 5 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 20 + 2 - 10 - 12 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5 & -2 & 8 \end{vmatrix} = -32 - 6 + 30 + 8 = 0.$$

Следовательно, ранг матрицы равен 2.

Базисным минором матрицы называется всякий отличный от нуля определитель, порядок которого равен рангу данной матрицы.

Задания для аудиторных занятий.

1. Даны матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Найти $2A + 4B - 3C$.

Ответ: $\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ -10 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Найти произведение матриц:

а) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -6 & 7 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$,

г) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, д) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Ответы: а) $\begin{bmatrix} -1 & 21 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 6 & -18 & 21 \\ -2 & 6 & -7 \\ 4 & -12 & 14 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} -18 \end{bmatrix}$, г) $\begin{bmatrix} -6 & -7 & 15 \\ 3 & 11 & -7 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$,

д) $\begin{bmatrix} -11 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

3. Проверить, имеет ли место равенство $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

   Ответ: равенство выполняется.

4. Для данных A и $f(x)$ найти $f(A)$:

   $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$.

   Ответ: $\begin{bmatrix} 18 & -15 \\ 0 & 48 \end{bmatrix}$.

5. Для данных матриц найти обратные матрицы:

а) $A = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Проверить, что $AA^{-1} = E$.

Ответы: а) $\begin{bmatrix} 5/63 & -1/63 \\ 1/21 & 4/21 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$

6. Найти матрицу X из уравнений:

а) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$; б) $X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

в) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Ответ: а) $\begin{bmatrix} 1 & 13/5 \\ -1 & -7/10 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} 5/4 & 57/8 \\ 3/2 & -7/4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$.

7. Найти ранг матрицы и указать какой – либо базисный минор:

а) $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 8 & -3 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}$;г) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$.

Ответы: а) $r = 3$, б) $r = 3$, в) $r = 3$, г) $r = 3$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Для данных A и $f(x)$ найти $f(A)$:

I	$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $f(x) = 3x^2 - x + 5$
II	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$
III	$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
IV	$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$

2. Даны две матрицы A и B. Найти: а) AB, б) BA, в) A^{-1}, г) AA^{-1}, д) $A^{-1}A$.

I	$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
II	$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
III	$A=\begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
IV	$A=\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Найти ранг матрицы и указать один из базисных миноров:

I	а) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$	б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	в) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
II	а) $\begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$	б) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$	в) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$
III	а) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$	б) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$	в) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
IV	а) $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$	б) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$	в) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Ответы:

1. **I** $\begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 29 \end{bmatrix}$, **II** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, **III** $\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, **IV** $\begin{bmatrix} 14 & 6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$.

2.

I	а) $\begin{bmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -2 & -28 & 14 \\ 3 & 10 & -1 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} -1 & 6 & -7 \\ 18 & -18 & 22 \\ 4 & 9 & -12 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} 1/7 & 1/8 & 5/28 \\ -1/7 & 0 & 4/7 \\ -1/7 & 1/8 & 1/3 \end{bmatrix}$, г) Е, д) Е;
II	а) $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -1 & 9 & 27 \\ -2 & 7 & 33 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 26 & 31 & 3 \\ 11 & 17 & 10 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} -5/3 & 8/3 & -2 \\ 4/3 & -7/3 & 2 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \end{bmatrix}$, г) Е, д) Е;
III	а) $\begin{bmatrix} 11 & -7 & -2 \\ 15 & -13 & 8 \\ 9 & -9 & -2 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} -8 & 4 & -12 \\ -14 & 12 & -28 \\ 6 & 2 & -8 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} -1/50 & 1/25 & 9/50 \\ 4/25 & 9/50 & 3/50 \\ -1/10 & 1/5 & -1/10 \end{bmatrix}$, г) Е, д) Е;
IV	а) $\begin{bmatrix} -3 & -4 & 27 \\ 6 & 15 & 27 \\ 4 & -6 & 23 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 15 & 21 & 1 \\ -4 & 28 & 20 \\ -12 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} -3/23 & 3/23 & -1/23 \\ 7/46 & 9/92 & 3/92 \\ -11/46 & -1/92 & 31/92 \end{bmatrix}$, г) Е, д) Е.

3.

I	а) 2, б) 2, в) 3;	**III**	а) 2, б) 2, в) 3;
II	а) 2, б) 2, в) 3;	**IV**	а) 2, б) 2, в) 3.

1.3. Системы линейных уравнений.
Формулы Крамера. Матричный метод. Метод Гаусса. Решение произвольных систем.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (1.1)$$

где a_{ij}, b_i $\left(i = \overline{1,n}, \overline{1,n}\right)$ - действительные числа, причем для каждого i имеется хотя бы одно a_{ij} отличное от нуля.

Решением системы (1.1) называется такой набор чисел $\left(c_1, c_2, ..., c_n\right)$, что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных (c_1, вместо x_1, …, c_n вместо x_n) каждое из уравнений системы обращается в тождество. Если система (1.1) имеет хотя бы одно решение, она называется совместной; система, не имеющая ни одного решения, называется несовместной. Система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения. Если $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$, то система называется однородной, в противном случае она называется неоднородной.

Если определитель n – го порядка $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$ (определитель системы (1.1)) не равен нулю, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера:

$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, …, $x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, где Δ_1 - определитель, полученный из Δ заменой элементов a_{11}, a_{21}, …, a_{n1} соответствующими свободными членами b_1, b_2, …, b_n; аналогично получаются определители Δ_2, Δ_3, …, Δ_n. Если $\Delta = 0$, а среди определителей Δ_1, Δ_2, …, Δ_n есть не равный нулю, то система не имеет решений.

Матрица $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$ называется матрицей системы (1.1) (или основной матрицей); $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$ - матрица - столбец неизвестных; $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}$ - матрица – столбец свободных членов. Тогда систему (1.1) можно записать в виде $AX=B$.

Теорема. Если определитель матрицы A $\Delta(A)\neq 0$, то система (1.1) имеет единственное решение, которое находится по формуле

$$X=A^{-1}B \qquad (1.2)$$

Решить систему (1.1) матричным способом – это значит найти ее решения в виде (1.2).

Рассмотрим решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_{1,} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_{2,} \\ .... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_{m,} \end{cases} \qquad (1.3)$$

методом Гаусса.

Основная матрица системы $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$, расширенная матрица системы $\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$.

Если ранг основной матрицы системы $r_A \leq n$, то расширенная матрица системы $\tilde{A}$ с помощью элементарных преобразований строк и перестановки столбцов всегда может быть приведена к виду:

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1r+1} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\
0 & 1 & \dots & \tilde{a}_{2r} & \tilde{a}_{2r+1} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{rr+1} & \dots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_m
\end{array}\right]
$$

Полученная матрица является расширенной матрицей системы:

$$
\begin{cases}
x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1r}x_r + \tilde{a}_{1r+1}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\
\qquad x_2 + \dots + \tilde{a}_{22}x_r + \tilde{a}_{2r+1}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad x_r + \tilde{a}_{2r+1}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{rn}x_n = \tilde{b}_r, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \tilde{b}_{r+1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \tilde{b}_m,
\end{cases} \qquad (1.4)
$$

которая эквивалентна системе (1.3). Если хотя бы одно из чисел $\tilde{b}_{r+1}$, $\tilde{b}_{r+2}$, …, $\tilde{b}_m$ отлично от нуля, то система (1.4) и, следовательно, система (1.3) несовместны. Если $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_{r+2} = \dots = \tilde{b}_m = 0$, то система (1.3) совместна, а из системы (1.4) можно последовательно выразить в явном виде базисные неизвестные x_1, x_2, …, x_r через свободные неизвестные x_{r+1}, …, x_n, т.е. решить систему (1.3).

Если $r = n$, то решение системы (1.3) единственное.

Пример. Решить систему методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

Решение

В расширенной матрице $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & | & 1 \\ 3 & -1 & 1 & | & 2 \\ 5 & 2 & 5 & | & 3 \\ 1 & -4 & -3 & | & 1 \end{bmatrix}$ переставим первую и четвертую строки $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & | & 1 \\ 3 & -1 & 1 & | & 2 \\ 5 & 2 & 5 & | & 3 \\ 2 & 3 & 4 & | & 1 \end{bmatrix}$. Умножив первую строку на – 3, прибавим ко второй, умножив ее на – 5, прибавим к третьей строке, умножив на – 2 прибавим к четвертой строке.

В результате получим матрицу: $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & | & 1 \\ 0 & 11 & 10 & | & -1 \\ 0 & 22 & 20 & | & -2 \\ 0 & 11 & 10 & | & -1 \end{bmatrix}$. Третью строку умножим на $\frac{1}{2}$: $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & | & 1 \\ 0 & 11 & 10 & | & -1 \\ 0 & 11 & 10 & | & -1 \\ 0 & 11 & 10 & | & -1 \end{bmatrix}$. Умножив вторую строку на – 1 и прибавив ее к третьей и четвертой строкам, получим матрицу: $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & | & 1 \\ 0 & 11 & 10 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$.

Минор $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$, отсюда $r_A = r_{\tilde{A}} = 2$, т.е. система совместима. Исходная система равносильна системе $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1, \\ \quad 11x_2 + 10x_3 = -1. \end{cases}$

Возьмем минор $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 11 \end{vmatrix}$ в качестве базисного. Тогда x_1 и x_2 - базисные неизвестные, x_3 - свободное неизвестное. Перенесем слагаемые с x_3 в правую часть уравнения: $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 3x_3 + 1, \\ \quad 11x_2 = -10x_3 - 1. \end{cases}$

Полагая $x_3 = c$, $c \in R$ получаем: $x_1 = \frac{7-7c}{11}$, $x_2 = -\frac{10c+1}{11}$.

То есть, исходная система имеет бесконечно много решений: $\left(\frac{7-7c}{11}; -\frac{10c+1}{11}; c\right)$, $c \in R$.

Теорема Кронекера – Капелли. Для того чтобы система (1.3) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы. Если $r_A \neq r_{\tilde{A}}$, то система (1.3) несовместна. Если $r_A = r_{\tilde{A}} = r$ и $r < n$, то система имеет бесконечно много решений (см. пример); при $r = n$ она имеет единственное решение.

Задания для аудиторных занятий

1. Решить системы матричным способом и по формулам Крамера.

   а) $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 = 8, \\ 5x_1 + 3x_2 = 19; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

   Ответы: а) (2;3), б) (1;1;1)

2. Решить методом Гаусса:

   а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7, \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7; \end{cases}$

   в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

   Ответы: а) (1;1;1), б) нет решений, в) $\left(2c+2; \frac{4-c}{5}; \frac{16c+11}{5}; c\right)$ $c \in R$.

3. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее:

   $$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

   Ответ: $(3;2;1)$.

4. Решить однородные системы:

а) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ 5x_1+5x_2-x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0, \\ 4x_1-2x_2-x_3=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3=0, \\ 4x_1+3x_2+2x_3=0. \end{cases}$

Ответы: а) $(0;0;0)$, б) $(c;2c;0)$, $c\in R$, в) $(c;-2c;c)$, $c\in R$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса:

I	а) $\begin{cases} 4x_1-9x_2+5x_3=1, \\ 7x_1-4x_2+x_3=11, \\ 3x_1+5x_2-4x_3=5; \end{cases}$	б) $\begin{cases} 4x_1-x_2=-6, \\ 3x_1+2x_2+5x_3=-14, \\ x_1-3x_2+4x_3=-19. \end{cases}$
II	а) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+2x_3=5, \\ 3x_1+4x_2-7x_3=2, \\ 5x_1+x_2-5x_3=9; \end{cases}$	б) $\begin{cases} 5x_1+2x_2-4x_3=-16, \\ 3x_1 \qquad +3x_3=-6, \\ 2x_1-3x_2+x_3=9. \end{cases}$
III	а) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=2, \\ x_1+5x_2-3x_3=4, \\ 2x_1-x_2+4x_3=5; \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=-9, \\ 4x_1-x_2+5x_3=-2, \\ \qquad 3x_2-7x_3=-6. \end{cases}$
IV	а) $\begin{cases} 2x_1+8x_2-7x_3=0, \\ 2x_1-5x_2+6x_3=1, \\ 4x_1+3x_2-x_3=7. \end{cases}$	б) $\begin{cases} 7x_1+4x_2-x_3=13, \\ 3x_1+2x_2+3x_3=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3=-10. \end{cases}$

Ответы:

I	а) нет решений	б) $(-1;2;-3)$
II	а) нет решений	б) $\left(-\frac{150}{67};-\frac{329}{67};-\frac{84}{67}\right)$
III	а) нет решений	б) $(-1;-2;0)$
IV	а) нет решений	б) $(0;3;-1)$

2. Решить однородные системы линейных алгебраических уравнений:

I	а) $\begin{cases} x_1+7x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-5x_2+x_3=0, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=0; \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=0, \\ 5x_1+4x_2-6x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=0. \end{cases}$
II	а) $\begin{cases} 8x_1+x_2-3x_3=0, \\ x_1+5x_2+x_3=0, \\ 4x_1-7x_2+2x_3=0; \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=0, \\ 7x_1-5x_2+3x_3=0, \\ 5x_1-4x_2-x_3=0. \end{cases}$
III	а) $\begin{cases} 6x_1+5x_2-4x_3=0, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+3x_3=0; \end{cases}$	б) $\begin{cases} 5x_1+x_2-6x_3=0, \\ 4x_1+3x_2-7x_3=0, \\ x_1-2x_2+x_3=0. \end{cases}$
IV	а) $\begin{cases} 5x_1-4x_2+2x_3=0, \\ \qquad 3x_2-2x_3=0, \\ 4x_1+x_2-3x_3=0. \end{cases}$	б) $\begin{cases} 5x_1+8x_2-5x_3=0, \\ 7x_1+5x_2-x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=0. \end{cases}$

Ответы:

I	а) $(0;0;0)$	б) $\left(4c;-\frac{7}{2}c;c\right)$, $c\in R$
II	а) $(0;0;0)$	б) $\left(-\frac{17}{3}c;-\frac{22}{3}c;c\right)$, $c\in R$
III	а) $(0;0;0)$	б) $(c;c;c)$, $c\in R$
IV	а) $(0;0;0)$	б) $\left(-\frac{17}{31}c;\frac{30}{31}c;c\right)$, $c\in R$

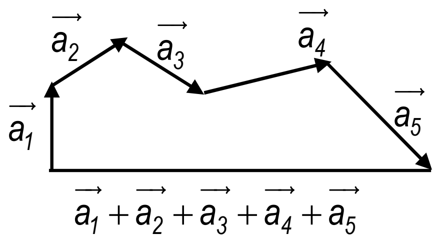
1.4. Векторы в пространстве R^3.

Линейным операции над векторами. Линейная зависимость и независимость векторов. Разложение вектора по базису. Деление отрезка в данном отношении. Скалярное произведение векторов.

Вектор $\vec{a}$ - это направленный отрезок. Координатами вектора $\vec{a}$ называются его проекции на оси координат Ox, Oy, Oz: $\vec{a} = \left(x_a; y_a; z_a\right)$. Если точка $A\left(x_1; y_1; z_1\right)$ - начало, а точка $B\left(x_2; y_2; z_2\right)$ - конец вектора, то $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right)$. Длина вектора (или модуль вектора) определяется формулой $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$.

К линейным операциям над векторами относятся: умножение вектора на число и сложение векторов.

Суммой векторов $\vec{a}_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ называется вектор, обозначаемый $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$, начало которого находится в начале первого вектора $\vec{a}_1$, а конец – в конце последнего вектора $\vec{a}_n$ ломанной линии, составленной из последовательности слагаемых векторов (правило замыкания ломанной):



Произведение вектора $\vec{a}$ на число $\alpha \in R$ называется вектор $\alpha\vec{a}$, модуль которого равен $\left|\alpha\vec{a}\right| = \left|\alpha\right|\left|\vec{a}\right|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\alpha > 0$, и противоположено ему, если $\alpha < 0$.

Чтобы сложить векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$, заданные координатами, надо сложить их соответствующие координаты, а при умножении вектора на число, надо каждую его координату умножить на это число.

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ называется вектор $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i$, где α_i - некоторые числа. Если векторы $\vec{a}_i$ определяются координатами x_i; y_i; z_i, то для координат вектора $\vec{a}$ имеем: $\vec{a} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i \right)$.

Если для системы n векторов $\vec{a}_i$ равенство $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{a}_i = 0$ верно только в случае, когда $\alpha_i = 0$, то эта система называется линейно независимой; если же равенство выполняется для α_i, хотя бы одно из которых отлично от нуля, то система векторов $\vec{a}_i$ называется линейно зависимой.

Три упорядоченных линейно независимых вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ в пространстве R^3 называются базисом.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов всегда образует базис. Любой вектор $\vec{a} \in R^3$ можно разложить по базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, т.е. представить в виде: $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, где *x, y, z* являются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Базис называется ортонормированным, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Такой базис обозначается $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Отношением, в котором точка *M* делит отрезок M_1M_2, называется число λ, удовлетворяющее равенству $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$. Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты точки $M(x; y; z)$ задаются равенствами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda},\ \text{где } \lambda \neq -1.$$

Деление отрезка M_1M_2 будет внутренним, если $\lambda > 0$ и внешним, если $\lambda < 0$. При $\lambda = 1$ точка $M(x; y; z)$ середина отрезка M_1M_2:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей данных векторов на косинус угла между ними: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$, $\alpha = \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$, $0 \le \alpha \le \pi$.

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (перестановочность);
2. $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ (распределительность);
3. $\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\vec{b}\right)$ (сочетательность по отношению к скалярному множителю);
4. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ (скалярный квадрат вектора $\vec{a}$ равен квадрату его модуля);
5. $\vec{a}\vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$ (или $\vec{a} = 0$, или $\vec{b} = 0$). В частности: $\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 0$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a}=(x_a;y_a;z_a)$, $\vec{b}=(x_b;y_b;z_b)$, то в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ $\vec{a}\vec{b}=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b$.

Если α - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{x_ax_b+y_ay_b+z_az_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}$.

В частности, если α, β, γ - углы образованные вектором $\vec{a}$ соответственно с осями координат Ox, Oy, Oz, то

$\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\vec{i}}{|\vec{a}|}=\dfrac{x_a}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{\vec{a}\vec{j}}{|\vec{a}|}=\dfrac{y_a}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}}$,

$\cos\gamma=\dfrac{\vec{a}\vec{k}}{|\vec{a}|}=\dfrac{z_a}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}}$, которые называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

Из определения скалярного произведения следует, что $np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{x_ax_b+y_ay_b+z_az_b}{\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}$.

Работа A постоянной силы $\vec{F}$ при перемещении тела вдоль вектора $\vec{S}$ вычисляется по формуле: $A=\vec{F}\vec{S}=|\vec{F}||\vec{S}|\cos\left(\widehat{\vec{F},\vec{S}}\right)$.

Задания для аудиторных занятий

1. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить их линейные комбинации: а) $2\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-3\vec{b}$; в) $\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$.
2. Даны векторы $\vec{a}=(3;-2;6)$ и $\vec{b}=(-2;1;0)$. Найти координаты векторов: а) $2\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$; б) $\dfrac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$; в) $2\vec{a}+3\vec{b}$.

   Ответы: а) $\left(\dfrac{20}{3};-\dfrac{13}{3};12\right)$; б) $\left(3;-\dfrac{5}{3};2\right)$; в) $(0;-1;12)$.
3. Найти координаты единичного вектора $\vec{e}$, направленного по биссектрисе угла, образуемого векторами $\vec{a}=(2;-3;6)$ и $\vec{b}=(-1;2;-2)$.

   Ответ: $\vec{e}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{42}};\dfrac{5}{\sqrt{42}};\dfrac{4}{\sqrt{42}}\right)$.

4. В некотором базисе векторы заданы координатами: $\vec{a}=(1;1;2)$; $\vec{e}_1=(2;2;-1)$; $\vec{e}_2=(0;4;8)$; $\vec{e}_3=(-1;-1;3)$. Убедиться, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образуют базис и найти в нем координаты вектора $\vec{a}$.
Ответ: $\vec{a}=(1;0;1)$
5. Даны две вершины $A(2;-3;-5)$, $B(-1;3;2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $E(4;-1;7)$. Найти координаты остальных вершин параллелограмма.
Ответ: $C(6;1;19)$, $D(9;-5;12)$.
6. Отрезок, ограниченный точками $A(-1;8;-3)$ и $B(9;-7;2)$ разделен точками M_1, M_2, M_3, M_4 на пять равных частей. Найти координаты точек M_1 и M_2.
Ответ: $M_1(1;5;-2)$, $M_3(5;-1;0)$.
7. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. Вычислить: $\vec{a}^2$; $(\vec{a}+\vec{b})^2$; $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$.
Ответы: 9; 13; -61.
8. Даны векторы $\vec{a}=(4;-2;-4)$, $\vec{b}=(6;-3;2)$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}$; $\vec{a}^2(\vec{a}+\vec{b})^2$; $(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$; $np_{2\vec{a}-3\vec{b}}(\vec{a}+\vec{b})$.
Ответы: 22; 36; -200; $-\dfrac{121}{\sqrt{129}}$.
9. Даны вершины треугольника ABC: $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$. Вычислить внешний угол при вершине B.
Ответ: $\dfrac{3\pi}{4}$.
10. Под действием силы $\vec{F}=(5;4;3)$ тело переместилось из начала вектора $\vec{S}=(2;1;-2)$ в его конец. Вычислить работу A силы $\vec{F}$ и угол φ между направлением силы и перемещения.
Ответы: $A=8$; $\cos\varphi\approx 0{,}38$; $\varphi\approx 1{,}18$ рад. или $\varphi\approx 67^\circ 40'$.

Задания для индивидуального выполнения

1. По координатам точек *A, B, C* для векторов $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{BC}$. Найти: а) $(2\vec{a}-\vec{b})(\vec{b}-\vec{c})$, б) $np_{\vec{c}}(\vec{a}-2\vec{b})$; в) $\cos\varphi$, $\varphi=\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)$.

2. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.
3. Дан треугольник $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$. Определить точку $D(x;y)$ пересечения биссектрисы внутреннего угла *A* с противолежащей стороной *BC*.
4. Проверить, будут ли ортогональны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
5. Даны две силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, приложенные к точке *A*. Вычислить работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку *B.*

I	1) $A(4;6;7)$, $B(2;-4;1)$, $C(-3;-4;2)$
	2) $\vec{a}=(-1;4;3)$, $\vec{b}=(3;2;-4)$, $\vec{c}=(-2;-7;1)$, $\vec{d}=(6;20;-3)$
	3) $A(0;0)$, $B(4;-3)$, $C(12;5)$
	4) $\vec{a}=(-1;3;0)$, $\vec{b}=(3;1;7)$
	5) $\vec{P}=(2;-1;-3)$, $Q=(3;2;-1)$, $A(-1;4;-2)$, $B(2;3;-1)$
II	1) $A(3;5;4)$, $B(4;2;-3)$, $C(-2;4;7)$
	2) $\vec{a}=(5;7;-2)$, $\vec{b}=(-3;1;3)$, $\vec{c}=(1;-4;6)$, $\vec{d}=(14;9;1)$
	3) $A(0;0)$, $B(0;7)$, $C(3;4)$
	4) $\vec{a}=(2;4;5)$, $\vec{b}=(-1;3;0)$
	5) $\vec{P}=(3;2;-4)$, $Q=(-4;4;-3)$, $A(1;-4;3)$, $B(4;0;-2)$
III	1) $A(-3;-5;6)$, $B(3;5;-4)$, $C(2;6;4)$
	2) $\vec{a}=(1;-3;1)$, $\vec{b}=(-2;-4;3)$, $\vec{c}=(0;-2;3)$, $\vec{d}=(-8;-10;13)$
	3) $A(0;0)$, $B(0;-7)$, $C(3;-4)$
	4) $\vec{a}=(5;4;7)$, $\vec{b}=(0;-7;4)$
	5) $\vec{P}=(7;3;-4)$, $Q=(3;-2;2)$, $A(-5;0;4)$, $B(4;-3;5)$
IV	1) $A(6;5;-4)$, $B(-5;-2;2)$, $C(3;3;2)$
	2) $\vec{a}=(4;5;1)$, $\vec{b}=(1;3;1)$, $\vec{c}=(-3;-6;7)$, $\vec{d}=(19;33;0)$
	3) $A(0;0)$, $B(-4;3)$, $C(1;2\sqrt{2})$
	4) $\vec{a}=(-3;7;2)$, $\vec{b}=(-1;3;0)$
	5) $\vec{P}=(7;-6;2)$, $Q=(-6;2;-1)$, $A(3;-6;1)$, $B(6;-2;7)$

Ответы:

I	1) а) 136; б) $-\dfrac{28}{13}\sqrt{26}$; в) $\cos\varphi=\dfrac{72}{\sqrt{35}\sqrt{174}}$.
	2) $\vec{d}=(1;1;-2)$.
	3) $D\left(\dfrac{56}{9};-\dfrac{7}{5}\right)$.
	4) $\vec{a}\perp\vec{b}$.
	5) 10.
II	1) а) 141; б) $-\dfrac{198}{\sqrt{140}}$; в) $\cos\varphi=-\dfrac{23}{\sqrt{59}\sqrt{35}}$.
	2) $\vec{d}=\left(\dfrac{452}{215};-\dfrac{161}{215};\dfrac{267}{215}\right)$.
	3) $D\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{21}{4}\right)$
	4) не являются ортогональными.
	5) 56.
III	1) а) 312; б) $-\dfrac{32}{\sqrt{66}}$; в) $\cos\varphi=\dfrac{160}{\sqrt{236}\sqrt{150}}$.
	2) $\vec{d}=(-2;3;2)$.
	3) $D\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{23}{4}\right)$.
	4) $\vec{a}\perp\vec{b}$.
	5) 85.
IV	1) а) 329; б) $-\dfrac{55}{\sqrt{89}}$; в) $\cos\varphi=\dfrac{83}{7\sqrt{206}}$.
	2) $\vec{d}=\left(\dfrac{117}{57};\dfrac{310}{57};-\dfrac{61}{57}\right)$.
	3) $D\left(-\dfrac{7}{8};\dfrac{10\sqrt{2}+9}{8}\right)$.
	4) не являются ортогональными.
	5) –7.

1.5. Векторное и смешанное произведения векторов. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов. Приложения векторного и смешанного произведений векторов. Полярная система координат.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ или $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ и удовлетворяющий следующим трем условиям:

1. длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах , т.е. $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$, $\varphi=\left(\vec{a},\vec{b}\right)$;
2. вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$;
3. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку, т.е. кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ по второму вектору $\vec{b}$ происходит против хода часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\vec{c}$.

Свойства векторного произведения:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$ (антиперестановочность);
2. $\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\lambda\vec{b}$ (сочетательность по отношению к скалярному множителю);
3. $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (распределительность);
4. $\vec{a}\times\vec{b}=0$, если $\vec{a}\ ||\ \vec{b}$ (или $\vec{a}=0$, или $\vec{b}=0$).

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a}=\left(x_a;y_a;z_a\right)$, $\vec{b}=\left(x_b;y_b;z_b\right)$, то $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}y_a & z_b\\ y_b & z_b\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}x_a & z_a\\ x_b & z_b\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_a & y_a\\ x_b & y_b\end{vmatrix}\right)$.

С помощью векторного произведения можно вычислить момент $\vec{M}$ силы $\vec{F}$, приложенной в точке *B* относительно точки *A*: $\vec{M}=\overrightarrow{AB}\times\vec{F}$.

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

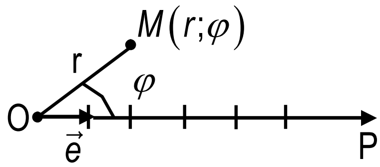
Геометрически модуль смешанного произведения – это число равное объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ как на ребрах и имеющих общее начало.

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - компланарны.

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими координатами: $\vec{a}=(x_a;y_a;z_a)$, $\vec{b}=(x_b;y_b;z_b)$, $\vec{c}=(x_c;y_c;z_c)$, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$.

Полярная система координат задается точкой *O,* называемой полюсом, лучом *OP*, называемым полярной осью, и единичным вектором $\vec{e}$ того же направления что и луч *OP.*

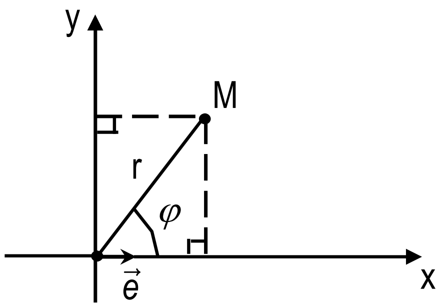
Положение точки *M* на плоскости определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса и углом φ, образованным отрезком *OM* с полярной осью, рассматриваемым в положительном направлении (против хода часовой стрелки).



Числа r и φ называются полярными координатами точки *M*: r - называется полярным радиусом, φ - полярным углом. Полярный радиус r изменяется в промежутке $[0;+\infty)$, а полярный угол φ в промежутке $[0;2\pi)$ (или $(-\pi;\pi]$).

Если совместить полярную систему координат с декартовой системой координат: совместить полюс *O* с началом координат системы *xOy*, а полярную ось – с положительной полуосью *Ox*, то связь между декартовыми и полярными координатами точки устанавливается формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (1.5)$$



Из системы (1.5) .получим равенства:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\,,\ \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ tg\varphi=\frac{y}{x} \qquad (1.6).$$

При определении полярного угла φ следует учитывать знаки x и y и то, что $0 \le \varphi < 2\pi$.

Пример 1. Найти полярные координаты точки M с прямоугольными координатами $\left(-\sqrt{3};-1\right)$.

Решение

Имеем $x=-\sqrt{3}$, $y=-1$, $r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+\left(-1\right)^2}=2$, $tg\varphi=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Точка M лежит в третьей четверти, следовательно, с учетом того, что $0 \le \varphi < 2\pi$, получаем $\varphi=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7\pi}{6}$. Итак, $M\left(2;\frac{7\pi}{6}\right)$.

Формулы (1.5) и (1.6) дают возможность переходить от уравнений линий, заданных в декартовых координатах, к уравнениям в полярных координатах и наоборот.

Пример 2. Найти уравнение линии $r=2\cos\varphi$ в декартовой системе координат.

Решение

Так как $r=\sqrt{x^2+y^2}$, а $\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ или $x^2+y^2=2x$. Полученное уравнение можно привести к виду $\left(x-1\right)^2+y^2=1$. Это уравнение окружности с центром в точке $C\left(1;0\right)$ радиуса $R=1$.

Пример 3. Составить таблицу значений функции $r=\cos 3\varphi$ и построить ее график.

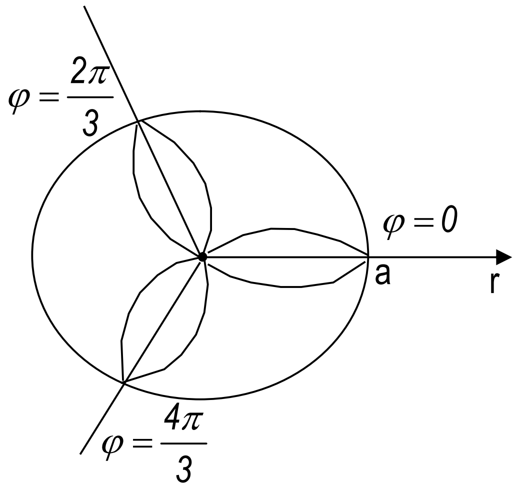
Решение

Пусть $a=1$; период функции $T=\frac{2\pi}{3}$. При $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]$ значения функции неотрицательны. Составим таблицу значений функции для $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$ с шагом $h=\frac{\pi}{12}=15^\circ$.

φ	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$
r	0	0,87	1	0,87	0

График для $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$ представляет собой кривую, похожую на “лепесток розы”, симметричный относительно луча $\varphi=0$. В силу периодичности функции

$\cos 3\varphi$ для $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]$ получаем такие же лепестки, симметричные относительно лучей $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ соответственно. Все “лепестки розы” располагаются внутри окружности радиуса *a*:



Задания для аудиторных занятий

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Вычислить: а) $|\vec{a} \times \vec{b}|$; б) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$; в) $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$.

   Ответы: а) 12; б) 24; в) 60.
2. Даны векторы $\vec{a} = (3;-1;-2)$, $\vec{b} = (1;2;-1)$. Найти координаты векторов: а) $\vec{a} \times \vec{b}$, б) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$, в) $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$.

   Ответы: а) $(5;1;7)$; б) $(10;2;14)$; в) $(20;4;28)$.
3. Вычислить площадь треугольника *ABC*, если известно, что $A(1;2;0)$, $B(3;0;3)$, $C(5;2;6)$.

   Ответ: $2\sqrt{13}$.
4. Сила $\vec{F} = (2;2;9)$ приложена к точке $A(4;2;-3)$. Вычислить величину и направляющие косинусы момента $\vec{M}$ этой силы относительно точки $B(2;4;0)$.

   Ответ: $|\vec{M}| = 28$, $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$, $\cos\beta = -\frac{6}{7}$, $\cos\gamma = \frac{2}{7}$.
5. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a} = (-1;2;4)$ и $\vec{b} = (2;-4;-8)$.

   Ответ: да.

6. Даны вершины пирамиды $A(2;0;4)$, $B(0;3;7)$, $C(0;0;6)$, $S(4;3;5)$. Вычислить ее объем *V* и высоту *H*, опущенную на грань *ACS.*

   Ответ: $V = 2$, $H = 2\sqrt{3}$.

7. Компланарны ли следующие векторы:

   а) $\vec{a} = (2;3;1)$, $\vec{b} = (1;-1;3)$, $\vec{c} = (-1;9;-11)$;

   б) $\vec{a} = (3;-2;1)$, $\vec{b} = (2;1;2)$, $\vec{c} = (3;-1;-2)$.

   Ответы: а) компланарны, б) некомпланарны.

8. Лежат ли точки $A(1;2;-1)$, $B(4;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(6;1;3)$ в одной плоскости?

   Ответ: лежат.

9. Построить точки, заданные полярными координатами: $M_1\left(2;\dfrac{\pi}{6}\right)$, $M_2\left(1;\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $M_3\left(3;\dfrac{5\pi}{4}\right)$, $M_4\left(2;\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $M_5\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, $M_6(4;0)$, $M_7\left(3;\dfrac{7\pi}{4}\right)$. Найти декартовы координаты этих точек.

   Ответы: $M_1\left(\sqrt{3};1\right)$, $M_2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_3\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2};-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_4\left(-\sqrt{3};1\right)$, $M_5\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$, $M_6(4;0)$, $M_7\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2};-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

10. Точки заданы декартовыми координатами $A\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$, $B(0;-3)$, $C\left(\sqrt{3};1\right)$. Построить эти точки и найти их полярные координаты.

    Ответы: $A\left(2;\dfrac{7\pi}{4}\right)$, $B\left(3;\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $C\left(2;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

11. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах. Записать эти уравнения в декартовых координатах.

    1. $r = 5$, 2. $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, 3. $r = a\varphi$ (спираль Архимеда),

    4. $r = 6\cos\varphi$, 5. $r = 10\sin\varphi$, 6. $r\cos\varphi = 2$,

    7. $r = \dfrac{4}{1-\cos\varphi}$ (парабола), 8. $r = a(1-\cos\varphi)$ (кардиоида),

    9. $r = a\sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза),

    10. $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (лемниската Бернулли).

12. Составить в полярных координатах уравнения следующих линий:
    1. Прямых, параллельных полярной оси и отстающих от нее на расстоянии 5;

2. Окружности радиуса $R = 4$ с центром на полярной оси и проходящей через полюс;
3. Окружностей радиусом $R = 3$, касающихся полярной оси в полюсе.

   Ответы: 1) $r\sin\varphi = \pm 5$, 2) $r = 8\cos\varphi$, 3) $r = \pm 6\sin\varphi$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Даны три силы $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ приложенные к точке *A*. Вычислить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки *B*.

I	$\vec{P} = (2;0;4)$, $\vec{Q} = (1;2;-1)$, $\vec{R} = (3;5;1)$, $A(1;2;3)$, $B(4;3;5)$
II	$\vec{P} = (-3;-4;0)$, $\vec{Q} = (-3;5;2)$, $\vec{R} = (5;6;4)$, $A(3;4;-2)$, $B(5;7;9)$
III	$\vec{P} = (5;-1;4)$, $\vec{Q} = (0;2;7)$, $\vec{R} = (-5;2;6)$, $A(-2;3;-7)$, $B(5;6;8)$
IV	$\vec{P} = (-3;4;1)$, $\vec{Q} = (2;-2;1)$, $\vec{R} = (-3;0;2)$, $A(-2;0;3)$, $B(4;0;5)$

Ответы:

I	$\left\|\vec{M}\right\| = 5\sqrt{13}$, $\cos\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \dfrac{5}{\sqrt{13}}$.
II	$\left\|\vec{M}\right\| = \sqrt{4026}$, $\cos\alpha = -\dfrac{59}{\sqrt{4026}}$, $\cos\beta = -\dfrac{16}{\sqrt{4026}}$, $\cos\gamma = \dfrac{17}{\sqrt{4026}}$.
III	$\left\|\vec{M}\right\| = \sqrt{14638}$, $\cos\alpha = -\dfrac{6}{\sqrt{14638}}$, $\cos\beta = -\dfrac{119}{\sqrt{14638}}$, $\cos\gamma = \dfrac{21}{\sqrt{14638}}$.
IV	$\left\|\vec{M}\right\| = 4\sqrt{74}$, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{74}}$, $\cos\beta = -\dfrac{8}{\sqrt{74}}$, $\cos\gamma = \dfrac{3}{\sqrt{74}}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках *A*, *B*, *C* и *D*. Вычислить площадь грани *ABC* и объем пирамиды.

I	$A(-4;-2;-3)$, $B(2;5;7)$, $C(6;3;-1)$, $D(6;-4;1)$
II	$A(4;2;3)$, $B(-5;-4;2)$, $C(5;7;-4)$, $D(6;4;-7)$
III	$A(3;5;3)$, $B(-3;2;8)$, $C(-3;-2;6)$, $D(7;8;-2)$
IV	$A(-8;7;3)$, $B(-3;4;1)$, $C(3;0;5)$, $D(-1;2;-2)$

Ответы:

I	$S_{ABC} = 2\sqrt{665}$, $V = 116$

II	$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{7826}$, $V=\frac{16}{3}$
III	$S_{ABC}=\sqrt{349}$, $V=\frac{26}{3}$
IV	$S_{ABC}=\sqrt{273}$, $V=5$

3. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Являются ли векторы $2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{b}+2\vec{c}$ компланарны?

I	$\vec{a}=(-1;2;4)$, $\vec{b}=(-3;0;6)$, $\vec{c}=(-2;3;5)$
II	$\vec{a}=(2;-3;5)$, $\vec{b}=(-1;3;0)$, $\vec{c}=(5;3;4)$
III	$\vec{a}=(2;2;4)$, $\vec{b}=(-3;0;5)$, $\vec{c}=(-2;1;3)$
IV	$\vec{a}=(1;2;6)$, $\vec{b}=(-5;4;2)$, $\vec{c}=(0;3;7)$

Ответы:

I	некомпланарны
II	некомпланарны
III	компланарны
IV	компланарны

4. Построить кривые, заданные уравнениями в полярной системе координат.

I	а) $r=2\sin 2\varphi$, б) $r=2(1-\cos\varphi)$, в) $r=\frac{1}{2-\sin\varphi}$
II	а) $r=2\cos 2\varphi$, б) $r=3(1+\sin\varphi)$, в) $r=\frac{2}{2-\cos\varphi}$
III	а) $r=2\sin 2\varphi$, б) $r=3(1+\cos\varphi)$, в) $r=\frac{2}{1-\cos\varphi}$
IV	а) $r=2\cos 2\varphi$, б) $r=3(1-\sin\varphi)$, в) $r=\frac{2}{1+\cos\varphi}$

1.6. Линейное преобразование в R^3.
Собственные значения и собственные векторы. Преобразование матрицы линейного преобразования при переходе к другому базису.

Пусть в действительном линейном пространстве V_n задано линейное преобразование f. Если вектор $\vec{b}$, отличный от нуля, переводится преобразованием f в вектор, коллинеарный самому вектору $\vec{b}$: $f\vec{b} = \lambda\vec{b}$ (1.7), где λ – некоторое действенное число, то вектор $\vec{b}$ называется собственным вектором преобразования f, а число λ – собственным значением этого преобразования, причем говорят, что собственный вектор $\vec{b}$ относится к собственному значению λ.

Так как вектор $\vec{b} \neq 0$, то число λ определяется для вектора $\vec{b}$ однозначно. Нулевой вектор не считается собственным вектором преобразования f, хотя он удовлетворяет условию (1.7), причем для любого λ.

Если преобразование f задается квадратной матрицей порядка *n*, $A = \left[a_{ij}\right]$, с действительными элементами, а λ – некоторое неизвестное число, то матрица $\left[A - \lambda E\right]$, где *E* – единичная матрица порядка *n*, называется характеристической матрицей матрицы *A*. Уравнение $\left|A - \lambda E\right| = 0$ называется характеристическим уравнением матрицы *A*. Корни этого уравнения называются собственными значениями матрицы.

Собственные векторы матрицы *A* находят следующим образом:

1. определяют собственные значения матрицы *A.* Если собственных значений нет, то не существует и собственных векторов. Собственными значениями для действительного линейного пространства являются только действительные корни характеристического уравнения.
2. Записывают матричное равенство $\left[A - \lambda E\right]X = 0$ в координатной форме:

$$\begin{cases} \left(a_{11} - \lambda\right)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + \left(a_{22} - \lambda\right)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + \left(a_{nn} - \lambda\right)x_n = 0. \end{cases}$$

Полагают λ равным одному из собственных значений λ_i и находят ненулевое решение $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, ..., $\alpha_n^{(i)}$ этой системы. Тогда вектор $\vec{x}^{(i)} = \left(\alpha_1^{(i)};\alpha_2^{(i)};\ldots;\alpha_n^{(i)}\right)$ является собственным вектором собственного значения λ_i. Если система имеет бесконечно много решений, то и существует бесконечно много собственных векторов.

При нахождении матрицы линейного преобразования, переводящего векторы $\vec{a}_i$ в векторы $\vec{b}_i$, $i=\overline{1,n}$, рассматривают матричное уравнение $A=CB^{-1}$, где A – искомая матрица. Столбцы матрицы C и B состоит из координат векторов $\vec{a}_i$ и $\vec{b}_i$ соответственно.

Если даны два базиса $\vec{e}_i$, $i=\overline{1,n}$, $\vec{e}'_i$, $i=\overline{1,n}$ и матрица A линейного преобразования в базисе $\vec{e}_i$, $i=\overline{1,n}$, то по матричному равенству $A'=T^{-1}AT$ находится матрица линейного преобразования в базисе $\vec{e}'_i$, $i=\overline{1,n}$. Матрица T – это матрица перехода от базиса $\vec{e}_i$, $i=\overline{1,n}$ к базису $\vec{e}'_i$, $i=\overline{1,n}$, в которой столбцы состоят из соответствующих координатных строк векторов $\vec{e}'_i$, $\vec{e}'_2$, $\vec{e}'_3$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Рассмотрим в n – мерном линейном пространстве два базиса $\vec{e}_1$, …, $\vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1$, …, $\vec{e}'_n$. Мы можем либо $\vec{e}'_1$, …, $\vec{e}'_n$ выразить через $\vec{e}_1$, …, $\vec{e}_n$:

$$\vec{e}'_1=\alpha_{11}\vec{e}_1+\ldots+\alpha_{1n}\vec{e}_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\vec{e}'_n=\alpha_{n1}\vec{e}_1+\ldots+\alpha_{nn}\vec{e}_n,$$

либо, наоборот, $\vec{e}_1$, …, $\vec{e}_n$ выразить через $\vec{e}'_i$, …, $\vec{e}'_n$

$$\vec{e}_1=\beta_{11}\vec{e}'_1+\ldots+\beta_{1n}\vec{e}'_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\vec{e}_n=\beta_{n1}\vec{e}'_1+\ldots+\beta_{nn}\vec{e}'_n.$$

Матрица T, составленная из коэффициентов α_{ij}, есть матрица перехода от базиса $\vec{e}_1$, …, $\vec{e}_n$ к базису $\vec{e}'_1$, …, $\vec{e}'_n$, а матрица S, составленная из коэффициентов β_{ij}, является матрицей обратного перехода от базиса $\vec{e}'_1$, …, $\vec{e}'_n$ к базису $\vec{e}_1$, …, $\vec{e}_n$.

Пример 1. Рассмотрим трехмерное действительное линейное пространство с базисом $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Векторы $\vec{e}'_1=5\vec{e}_1-\vec{e}_2-2\vec{e}_3$, $\vec{e}'_2=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2$, $\vec{e}'_3=-2\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$ также составляют базис в этом пространстве. Найти координаты вектора $\vec{a}=\vec{e}_1+4\vec{e}_2-2\vec{e}_3$ в базисе $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$, $\vec{e}'_3$.

Решение

Матрица $T=\begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ является матрицей перехода от базиса $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ к базису $\overrightarrow{e_1'}$, $\overrightarrow{e_2'}$, $\overrightarrow{e_3'}$, откуда $T^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{bmatrix}$. Поэтому вектор $\vec{a}=\overrightarrow{e_1}+4\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}$ в базисе $\overrightarrow{e_1'}$, $\overrightarrow{e_2'}$, $\overrightarrow{e_3'}$ будет представлен координатами $(1;4;-1)\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}=(-13;6;-27)$ т.е. $\vec{a}=-13\overrightarrow{e_1'}+6\overrightarrow{e_2'}-27\overrightarrow{e_3'}$.

Пример: Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования действительного пространства, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$.

Решение

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0$, $\lambda^2(\lambda-1)=0$.

Следовательно, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=0$ - собственные значения матрицы A. Для определения собственных векторов записывают систему уравнений:

$$\begin{cases} (4-\lambda)x_1-5x_2+2x_3=0, \\ 5x_1+(-7-x)x_2+3x_3=0, \\ 6x_1-9x_2+(4-\lambda)x_3=0. \end{cases} \qquad (1.8)$$

Подставляя в систему (1.8) $\lambda_1=1$, получим систему:

$$\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3=0, \\ 5x_1-8x_2+3x_3=0, \\ 6x_1-9x_2+3x_3=0, \end{cases}$$

которая эквивалентна системе $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3=0, \\ x_2-x_3=0. \end{cases}$

Решая последнюю систему находим $x_1=t$, $x_2=t$, $x_3=t$, $t\in R$.

Таким образом, собственными векторами, соответствующими собственному значению $\lambda_1 = 1$, являются векторы $\vec{x}^{(1)} = (t;t;t)$, $t \in R$, $t \neq 0$. Подставляя в систему (1.8), $\lambda = 0$, имеем систему: $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0, \\ 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases}$ откуда

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ -3x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = t$, $t \in R$, $t \neq 0$, получим, что $x_1 = \dfrac{1}{3}t$, $x_2 = \dfrac{2}{3}t$, $x_3 = t$. Собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 0$, имеем вид $\vec{x}^{(2)} = \left(\dfrac{1}{3}t, \dfrac{2}{3}t, t\right)$, $t \in R$, $t \neq 0$.

Задания для аудиторных занятий.

1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей A.

   а) $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

   Ответ:

   а) $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 11$; $\vec{x}^{(1)} = \left(-\dfrac{8}{5}t;t\right)$, $t \neq 0$, $t \in R$; $\vec{x}^{(2)} = (t;t)$, $t \neq 0$, $t \in R$.

   б) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$; $\vec{x} = (-t;-t;t)$, $t \neq 0$, $t \in R$.

2. Выяснить, является ли линейным преобразование f, переводящее любой вектор $\vec{x} = (\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$ в вектор $\vec{Y}$, заданный координатами в том же базисе, что и вектор $\vec{x}$. Если преобразование линейное, то найти его матрицу:

   а) $\vec{Y} = (5\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3; \alpha_2 - \alpha_3; \alpha_2)$. Ответ: да, $\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   б) $\vec{Y} = (\alpha_1 + 4\alpha_3; \alpha_2 + 4; \alpha_1 + 5\alpha_2)$. Ответ: нет.

3. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего векторы $\vec{a}_1=(2;3;5)$, $\vec{a}_2=(0;1;2)$, $\vec{a}_3=(1;0;0)$ в векторы $\vec{b}_1=(1;1;1)$, $\vec{b}_2=(1;1;-1)$, $\vec{b}_3=(2;1;2)$.

Ответ: $\begin{bmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего вектор $\vec{x}$ в вектор $\vec{Y}=\vec{x}\times\vec{a}$ в ортонормированном базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, если $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$.

Ответ: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Линейное преобразование в базисе $\vec{a}_1=(8;-6;7)$, $\vec{a}_2=(-16;7;-13)$, $\vec{a}_3=(9;-3;7)$ имеет матрицу $A=\begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}$. Найти матрицу данного преобразования в базисе $\vec{b}_1=(1;-2;1)$, $\vec{b}_2=(3;-1;5)$, $\vec{b}_3=(2;1;2)$.

Ответ: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей *A*.

I	а) $A=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	б) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}$
II	а) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$	б) $A=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$

III	а) $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$	б) $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$
IV	а) $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$	б) $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$

2. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ в векторы $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$, если:

1) $\vec{a}_1=(2;0;3)$, $\vec{a}_2=(4;1;5)$, $\vec{a}_3=(3;1;2)$, $\vec{b}_1=(1;2;-1)$, $\vec{b}_2=(4;5;-2)$, $\vec{b}_3=(1;-1;1)$;

2) $\vec{a}_1=(3;4;5)$, $\vec{a}_2=(2;1;2)$, $\vec{a}_3=(-4;-2;-3)$, $\vec{b}_1=(4;5;3)$, $\vec{b}_2=(2;3;2)$, $\vec{b}_3=(-1;-2;-1)$;

3) $\vec{a}_1=(1;1;1)$, $\vec{a}_2=(1;2;3)$, $\vec{a}_3=(1;3;6)$, $\vec{b}_1=(0;1;1)$, $\vec{b}_2=(1;0;1)$, $\vec{b}_3=(1;1;0)$;

4) Даны два базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$ линейного пространства и матрица A линейного преобразования в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Найти матрицу этого преобразования в базисе $\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$, если $\vec{e_1'}=\vec{e_2}-2\vec{e_1}$, $\vec{e_2'}=2\vec{e_1}-4\vec{e_2}$, $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$.

Ответы:

I	1.	а) $\lambda_1=\lambda_2=3$, $\vec{x}=(t;t)$, $t\neq 0$, $t\in R$. б) $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$, $\vec{x}^{(1)}=(0;0;t)$, $\vec{x}^{(2)}=(3t;-6t;20t)$, $t\neq 0$, $t\in R$.
	2.	а) $\lambda_1=\lambda_2=3$, $\vec{x}=(t;t)$, $t\neq 0$, $t\in R$. б) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=7$, $\lambda=-7$, $\vec{x}^{(1)}=(0;2t;t)$, $\vec{x}^{(2)}=(7t;5t;6t)$, $\vec{x}^{(3)}=(0;5t;6t)$, $t\neq 0$, $t\in R$.
	3.	а) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$, $\vec{x}_1^{(1)}=(t;-4t)$, $\vec{x}^{(2)}=(t;-t)$, $t\neq 0$, $t\in R$ б) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$, $\vec{x}=(3t;t;t)$, $t\neq 0$, $t\in R$.
	4.	а) $\lambda_1=7$, $\lambda_2=-2$, $\vec{x}^{(1)}=(t;t)$, $\vec{x}^{(2)}=(4t;-5t)$, $t\neq 0$, $t\in R$ б) $\lambda_1=3$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$, $\vec{x}^{(1)}=(t;2t;2t)$, $\vec{x}^{(2)}=(t;2t;t)$, $t\neq 0$, $t\in R$.

Глава 2. Основы аналитической геометрии.

2.1. Прямая на плоскости.
Различные виды уравнений прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой. Взаимное расположение двух прямых. Угол между двумя прямыми.

Приведем различные виды уравнений прямой на плоскости:

1. Общее уравнение прямой:

$$Ax+By+C=0, \quad (2.1)$$

где *A*, *B*, *C* – некоторые действительные числа, $A^2+B^2\neq 0$.

Вектор $\vec{n}=(A;B)$ перпендикулярен к прямой (2.1) и называется нормальным вектором прямой: В частности если $B\neq 0$, то разрешив уравнение (2.1) относительно *y*, получим уравнение вида

$$y=kx+b, \quad (2.2)$$

где $k=-\dfrac{A}{B}$, $b=-\dfrac{C}{B}$.

Уравнение (2.2) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом *k*. Угловой коэффициент $k=tg\alpha$, где α - угол наклона прямой к оси *Ox*, отсчитываемый в положительном направлении. Число b равно величине отрезка, отсекаемого прямой на оси *Oy*.

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом *k*, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

4. Параметрические уравнения: $\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \end{cases}$ где $\vec{a}=(m;n)$ - направляющий вектор прямой, а точка $M_0(x_0;y_0)$ принадлежит прямой.

5. Канонические уравнения прямой: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$.

Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой (2.1) вычисляется по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Углом между двумя прямыми называется наименьший из углов, на который надо повернуть первую прямую до совпадения со второй.

Если прямые заданы общими уравнения $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то косинус угла φ между ними находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Если прямые заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}$.

Условия параллельности в первом случае имеет вид $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, во втором - $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности, соответственно, - $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ и $1 + k_1k_2 = 0$.

Задания для аудиторных занятий.

1. По данным уравнениям построить прямые, найти их угловые коэффициенты и отрезки, отсекаемые на осях координат:
   а) $2x - y + 3 = 0$;   б) $5x + 2y - 8 = 0$;   в) $3x + 8y + 16 = 0$;   г) $3x - y = 0$.
2. Записать уравнения прямых, на которых лежат стороны равнобедренной трапеции, зная, что основания ее равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с большим основанием угол 60°. Большее основание лежит на оси абсцисс, а ось симметрии трапеции – на оси ординат.
   Ответ: $y = 0$, $y = 2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$.
3. Сила $\vec{F} = (2;5)$ приложена к точке $M_0(-1;2)$. Записать уравнение прямой, вдоль которой направлена эта сила.
   Ответ: $5x - 2y + 9 = 0$.
4. Записать уравнения прямых, которые проходят через точку $A(3,-1)$ и параллельны: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) биссектрисе первого координатного угла; г) прямой $y = 3x + 9$.
   Ответ: а) $y = -1$; б) $x = 3$; в) $y = x + 4$; г) $y = 3x - 10$.
5. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1;3)$ и $B(4;5)$.
   Ответ: $2x - 5y + 17 = 0$.
6. Луч света направлен по прямой $y = \frac{2}{3}x - 4$. Найти координаты точки *M* встречи луча с осью *Ox* и уравнение отраженного луча.
   Ответ: $M(6;0)$, $y = -\frac{2}{3}x + 4$.
7. Точка $A(-2;3)$ лежит на прямой, перпендикулярной к прямой $2x - 3y + 8 = 0$. Записать уравнение этой прямой.
   Ответ: $3x + 2y = 0$.
8. Точка $A(2;-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь квадрата.
   Ответ: 5.

9. Дано уравнение стороны ромба $x+3y-8=0$ и уравнение его диагонали $2x+y+4=0$. Записать уравнения остальных сторон ромба, зная, что точка $A(-9;-1)$ лежит на стороне, параллельной данной.

   Ответ: $x+3y+12=0$, $3x-y-4=0$, $3x-y+16=0$.
10. Составить уравнение биссектрисы того угла между прямыми $x-7y=1$ и $x+y=-7$, внутри которого лежит точка $A(1;1)$.

    Ответ: $3x-y+17=0$.
11. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(-4;2)$ и уравнения двух медиан: $3x-2y+2=0$ и $3x+5y-12=0$.

    Ответ: $2x+y-8=0$, $x-3y+10=0$, $x+4y-4=0$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Даны вершины треугольника *ABC:* $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ Найти:

   а) уравнение стороны *AB*;
   б) уравнение высоты *CH*;
   в) уравнение медианы AM;
   г) точку *N* пересечение медианы *AM* и высоты *CH;*
   д) уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*;
   е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

I	$A(2;5)$, $B(-3;1)$, $C(0;4)$;
II	$A(-5;1)$, $B(8;-2)$, $C(1;4)$;
III	$A(-1;-3)$, $B(0;7)$, $C(-2;4)$;
IV	$A(7;0)$, $B(1;4)$, $C(-8;-4)$.

2. **I**. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x-2y=0$, $x-y-1=0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3;-1)$. Найти уравнения двух других сторон.

   II. Даны уравнения высот треугольника *ABC* $2x-3y+1=0$, $x+2y+1=0$ и координаты его вершины $A(2;3)$. Найти уравнения сторон *AB* и *AC* треугольника.

   III. Записать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1;1)$ под углом 45° к прямой $2x+3y=6$.

   IV. Известны уравнения двух сторон ромба $2x-5y-1=0$ и $2x-5y-34=0$ и уравнение одной из его диагоналей $x+3y-6=0$. Найти уравнение второй диагонали.

   Ответы:

	I	II	III	IV
1а	$4x-5y+17=0$	$3x+13y+2=0$	$10x-y+7=0$	$2x+3y-14=0$

1б	$5x+4y-16=0$	$13x-3y-1=0$	$x+10y-38=0$	$3x-2y+16=0$
1в	$5x-7y+25=0$	$y-1=0$	$x+1=0$	$y=0$
1г	$\left(\frac{12}{55};\frac{41}{11}\right)$	$\left(\frac{4}{13};1\right)$	$\left(-1;\frac{39}{10}\right)$	$\left(-\frac{16}{3};0\right)$
1д	$4x-5y+20=0$	$3x+13y-55=0$	$10x-y+24=0$	$2x+3y+28=0$
1е	$\frac{3}{\sqrt{41}}$	$\frac{57}{\sqrt{178}}$	$\frac{17}{\sqrt{101}}$	$\frac{42}{\sqrt{13}}$
2	$x-y-7=0$ $x-2y-10=0$	$2x-y-1=0$ $3x+2y-12=0$	$x-5y+6=0$ $5x+y+4=0$	$3x-y-23=0$

2.2. Кривые второго порядка

Канонические уравнения кривых второго порядка. Характеристики кривых второго порядка. Упрощение общего уравнения кривой второго порядка.

Общим уравнением линии второго порядка называется уравнение вида

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0, \quad (2.3)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0 - постоянные действительные числа $\left(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2\neq 0\right)$.

Рассмотрим частные случаи уравнения (2.3):

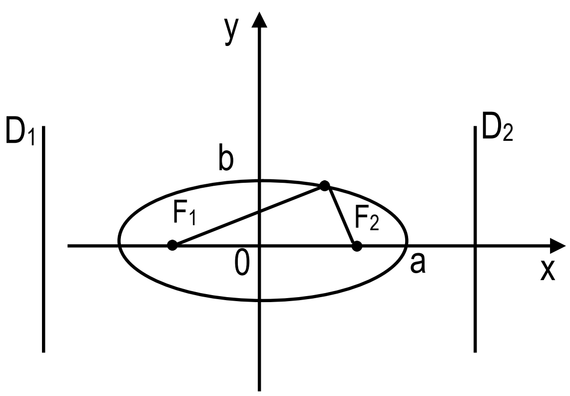
1) окружность с центром в точке $C\left(x_0;y_0\right)$ радиусом R задается уравнением

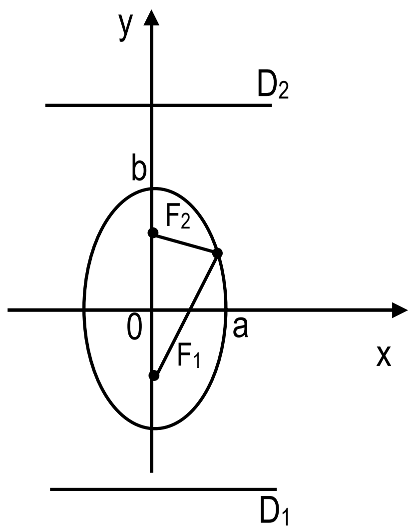
$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2;$$

2) каноническим уравнением эллипса с центром в начале координат и полуосями *a* и *b* называется уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (2.4).$$

Если $a>b$ $\left(a<b\right)$, то уравнение (2.4) определяет эллипс, фокусы которого, точки F_1 и F_2, расположены оси абсцисс (на оси ординат).





Геометрическое свойство эллипса: любая точка M на эллипсе удовлетворяет условию: $F_1M + F_2M = 2a$ в случае $a > b$ и $F_1M + F_2M = 2b$ в случае $a < b$.

Если $c = 0F_1 = 0F_2$, то $b^2 = a^2 - c^2$ при $a > b$ и $a^2 = b^2 - c^2$ при $a < b$.

Число ε, равное отношению расстояния между фокусами F_1F_2 к длине большой оси, называется эксцентриситетом эллипса

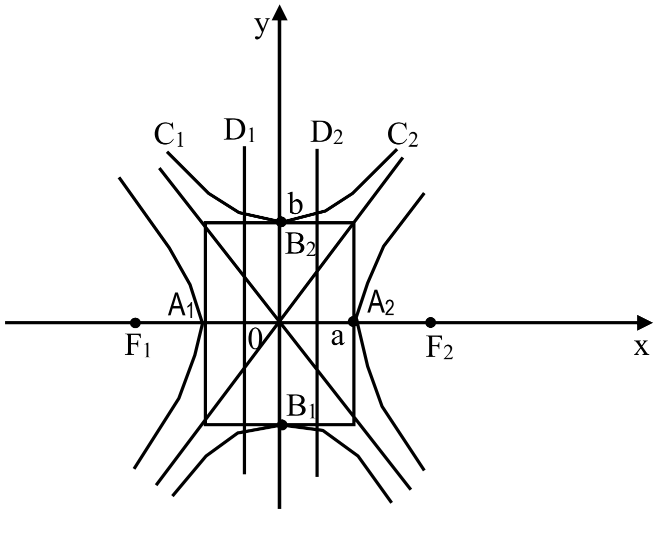
$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \text{ если } a > b \quad \text{и} \quad \varepsilon = \frac{c}{b}, \text{ если } a < b.$$

Для эллипса $0 < \varepsilon < 1$.

Директрисами эллипса называются две прямые D_1 и D_2, перпендикулярные большой оси, уравнение которых имеют вид

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c} \text{ при } a > b \quad \text{и} \quad y = \pm\frac{b}{\varepsilon} = \frac{b^2}{c} \text{ при } a < b.$$

3) Гипербола с действительной полуосью a и мнимой полуосью b, центром в начале координат и вершинами A_1 и A_2 на оси Ox определяется каноническим уравнением: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

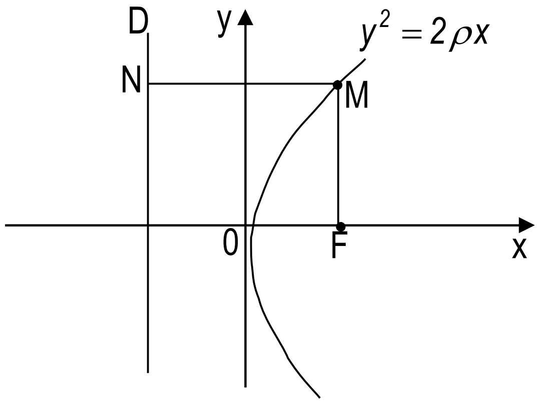


Прямые C_1 и C_2 $\left(y = \pm\frac{b}{a}x\right)$ являются асимптотами гиперболы, прямые D_1 и D_2 $\left(x = \pm\frac{a}{\varepsilon}\right)$ - директрисами. Справедливо равенство $b^2 = c^2 - a^2$. Точки $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ - фокусы гиперболы, число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет, причем для гиперболы $\varepsilon > 1$.

Геометрическое свойство гиперболы: для любой точки M на гиперболе выполняется условие: $|F_1M - F_2M| = 2a$.

Гипербола, уравнение которой имеет вид $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, называется сопряженной. Ее вершины находятся в точках B_1 и B_2 на оси Oy, $\varepsilon=\frac{c}{b}$.

4) Парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси Ox, имеет следующее каноническое уравнение: $y^2=2px$.



Точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ называется фокусом, а прямая $D\left(x=-\frac{p}{2}\right)$ - директрисой параболы. Число $p>0$ - параметр параболы.

Геометрическое свойство: для любой точки M параболы верно равенство $FM=MN$.

Уравнение вида: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\pm\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ определяют соответственно эллипс, гиперболу и параболу, которые параллельно смещены относительно системы координат Oxy таким образом, что центр эллипса и гиперболы и вершина параболы находятся в точке $C(x_0;y_0)$.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение линии $4x^2+9y^2+32x-54y+109=0$ и построить ее.

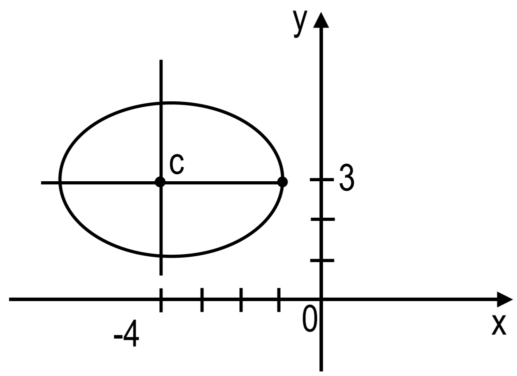
Решение

Применим метод выделения полных квадратов

$$4\left(x^2+8x+16\right)+9\left(y^2-6y+9\right)=64+81-109$$

$$4(x+4)^2+9(y-3)^2=36,\ \frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1.$$

Полученное уравнение определяет эллипс с центром в точке $C(-4;3)$ и полуосями $a=3$, $b=2$. Построим эту линию.



Задания для аудиторных занятий

1. Дан эллипс, каноническое уравнение которого имеет вид $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Найти координаты его фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и касательной в точке $M_0\left(\frac{5}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. Сделать рисунок.

   Ответ: $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$, $\varepsilon=0,8$, $x=\pm\frac{25}{4}$, $\sqrt{3}x+5y-10\sqrt{3}=0$.

2. По каноническому уравнению гиперболы $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ найти ее полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис, уравнение касательной в точке $M_0\left(-15;-4\sqrt{21}\right)$. Сделать рисунок.
3. Построить параболу, ее директрису и фокус, касательную в точке $M_0(6;6)$, зная каноническое уравнение параболы: $x^2=6y$.
4. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что:
   а) его малая ось равна 24, расстояние между фокусами равно 10;
   б) расстояние между фокусами равно 6, эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$;
   в) расстояние между фокусами равно 4, расстояние между директрисами равно 5;
   г) расстояние между директрисами равно 32, эксцентриситет равен 0,5.
5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, это:
   а) расстояние между вершинами равно 8, расстояние между фокусами равно 10;
   б) действительная полуось равна 5, вершины делят расстояние между центром и фокусом пополам;
   в) действительная ось равна 6, гипербола проходит через точку $A(9;-4)$;
   г) точки $P(-5;2)$ и $Q\left(2\sqrt{5};1\right)$ лежат на гиперболе.
6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что:
   а) парабола имеет фокус $F(0;2)$ и вершину в точке $O(0;0)$;

б) парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точки $O(0;0)$ и $M(1;-4)$;

в) парабола симметрична относительно оси ординат Oy и проходит через точки $O(0;0)$ и $N(6;-2)$.

7. Путем выделения полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнения линий, определить их тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):

а) $x^2+y^2-4x+6y+4=0$;

б) $2x^2+5y^2+8x-10y-17=0$;

в) $x^2-6y^2-12x+36y-48=0$;

г) $x^2-8x+2y+18=0$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Составить канонические уравнения гиперболы, зная, что:

I	$b=2\sqrt{2}$, $\varepsilon=\dfrac{7}{9}$;	**III**	$\varepsilon=\dfrac{5}{6}$, $A\left(0;-\sqrt{11}\right)$;
II	$2a=30$, $\varepsilon=\dfrac{17}{15}$;	**IV**	$a=13$, $F(-5;0)$.

2. Составить канонические уравнения гиперболы, зная, что:

I	$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ - асимптота, $2a=12$;	**III**	$A\left(\sqrt{\dfrac{32}{3}};1\right)$, $B\left(\sqrt{8};0\right)$;
II	$y=\dfrac{\sqrt{17}}{8}x$ - асимптота, $2c=18$;	**IV**	$b=4$, $F(-7;0)$.

3. Составить канонические уравнения параболы, зная, что:

I	$x=-\dfrac{3}{8}$ - директриса;	**III**	ось симметрии Oy и $A\left(-2;3\sqrt{2}\right)$;
II	$y=4$ - директриса;	**IV**	ось симметрии Ox *и* $A(-7;5)$.

4. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющую центр в точке *C:*

I	правый фокус эллипса $x^2+4y^2=12$, $C(2;-7)$;
II	правую вершину гиперболы $40x^2-81y^2=3240$, $C(-2;5)$;
III	фокусы эллипсы $x^2+10y^2=90$, C – нижняя вершина;

IV	фокусы гиперболы $4x^2-5y^2=20$, $C(0;-6)$.

5. Упростить уравнения линий, определить их тип и построить

I	$x^2+2y^2-2x+6y=90$;
II	$9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$;
III	$4x^2-y^2+8x-2y+4=0$;
IV	$y^2-2x-6y+3=0$.

2.3. Плоскость в пространстве.
Виды уравнений плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей.

Существуют различные виды уравнений плоскости.

1. Общим уравнением плоскости называется уравнение вида $Ax+By+Cz+D=0$, где *A, B, C, D* – заданные числа, причем $A^2+B^2+C^2\neq 0$.
   Коэффициенты *A, B, C* являются координатами вектора $\vec{n}=(A;B;C)$, перпендикулярного плоскости, который называется нормальным. В качестве нормального может выступать любой вектор перпендикулярный плоскости.
2. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору. Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и перпендикулярна вектору $\vec{n}=(A;B;C)$, то ее уравнение записывается в виде $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.
3. Уравнение плоскости “в отрезках”. Если плоскость пересекает оси Ox, Oy, Oz соответственно в точках $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$, $M_3(0;0;c)$, то ее уравнение можно записать в виде $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, где $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$.
4. Уравнение плоскости по трем точкам. Если плоскость проходит через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$ не лежащие на одной прямой, то ее уравнение можно записать в виде
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Величина угла φ между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ вычисляется на основании формулы

$$\cos\varphi = \cos\left(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}\right) = \frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

где $\vec{n}_1 = \left(A_1;B_1;C_1\right)$ и $\vec{n}_2 = \left(A_2;B_2;C_2\right)$ - нормальные векторы данных плоскостей.

Условие перпендикулярности данных плоскостей $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = 0$ или $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Условия параллельности рассматриваемых плоскостей имеет вид $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Задания для аудиторных занятий

1. Записать уравнение и построить плоскость:
   а) параллельно плоскости Oxz и проходящей через точку $M_0\left(7;-3;5\right)$;
   б) проходящей через ось Oz и точку $A\left(-3;1;-2\right)$;
   в) параллельно оси Ox и проходящую через две точки $M_1\left(4;0;-2\right)$ и $M_2\left(5;1;7\right)$;
   г) проходящую через точку $B\left(2;1;-1\right)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{n} = \left(1;-2;3\right)$.
   д) проходящую через точку $C\left(3;4;-5\right)$ параллельно двум векторам $\vec{a} = \left(3;1;-1\right)$ и $\vec{b} = \left(1;-2;1\right)$.
   Ответ: а) $y + 3 = 0$; б) $x + 3y = 0$; в) $9y - z - 2 = 0$; г) $x - 2y + 3z + 3 = 0$;
   д) $x + 4y + 7z = 16 = 0$
2. Составить уравнение одной из граней тетраэдра, заданного вершинами $A\left(5;4;3\right)$, $B\left(2;3;-2\right)$, $C\left(3;4;2\right)$, $D\left(-1;2;1\right)$. Проверить правильность полученного уравнения.
3. Составить уравнение плоскости:
   а) проходящей через точки $M_1\left(1;1;1\right)$ и $M_2\left(2;3;4\right)$ перпендикулярно к плоскости $2x - 7y + 5z + 9 = 0$;
   б) проходящей через точку $M_0\left(7;-5;1\right)$ и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки.
   Ответ: а) $31x + y - 11z - 21 = 0$; б) $x + y + z - 3 = 0$.
4. Вычислить угол между плоскостями $x - 2y + 2z - 3 = 0$ и $3x - 4y + 5 = 0$.
   Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{11}{15}$, $\varphi \approx 42^\circ 51'$.
5. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями $3x + 6y + 2z - 15 = 0$ и $3x + 6y + 2z + 13 = 0$.
   Ответ: 4.
6. Записать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $3x - y + 7z - 4 = 0$ и $5x + 3y - 5z + 2 = 0$.

Ответ: $x+2y-6z+3=0$, $4x+y+z-1=0$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Составить уравнение плоскости:

а) проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно плоскости $Ax+By+Cz+D=0$;

б) проходящей через начало координат перпендикулярно плоскостям $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$;

в) проходящей через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ параллельно вектору $\vec{a}=(\ell;m;n)$;

г) проходящей через точку $M_3(x_3;y_3;z_3)$ и отсекающей на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины.

I	а) $M_0(2;3;-5)$, $4x-4y+3z+8=0$;
	б) $x+5y-z+7=0$ и $3x-y+2z-3=0$;
	в) $M_1(2;3;-1)$, $M_2(1;1;4)$, $\vec{a}=(1;-4;3)$;
	г) $M_3(2;-3;-4)$;
II	а) $M_0(-2;3;0)$; $x-2y-3z+11=0$;
	б) $3x-y+z-4=0$ и $2x+y+5=0$;
	в) $M_1(-1;2;3)$, $M_2(1;-2;4)$, $\vec{a}=(2;-1;1)$;
	г) $M_3(-1;2;5)$;
III	а) $M_0(-1;2;3)$, $3x-2y+6z+4=0$;
	б) $2x+3y-z+4=0$ и $x+3y-4=0$;
	в) $M_1(3;-1;2)$, $M_2(1;2;-2)$, $\vec{a}=(2;-3;5)$;
	г) $M_3(3;-4;2)$;
IV	а) $M_0(-1;2;1)$, $3x-2y-z+9=0$;
	б) $3x+y-8z-9=0$ и $2x+3y-z+1=0$;
	в) $M_1(-1;3;5)$, $M_2(2;-2;0)$, $\vec{a}=(3;-1;2)$;
	г) $M_3(-2;3;4)$.

Ответы:

I	а) $4x-4y+3z+19=0$; б) $9x-5y-16z=0$; в) $7x+4y+3z-23=0$; г) $x+y+z=-5$;
II	а) $x-2y-3z+8=0$; б) $x-2y-5z=0$; в) $x-2y+7=0$; г) $x+y+z=6$;

III	а) $3x-2y+6z-11=0$; б) $3x-y+3z=0$; в) $27x+2y-12z-55=0$; г) $x+y+z=1$;
IV	а) $3x-2y-z+8=0$; б) $23x-13y+7z=0$; в) $5x+7y-4z+4=0$; г) $x+y+z=5$.

2. Найти угол между двумя плоскостями.

I	$2x-3y+z-8=0$ и $3x+2y-12=0$;
II	$x+4y-12=0$ и $8x-2y+3z+9=0$;
III	$2x+4y-13z=0$ и $-4x-8y+26z+19=0$;
IV	$x+8y-z+9=0$ и $x+2y+z+13=0$.

Ответ: **I** $\frac{\pi}{2}$; **II** $\frac{\pi}{2}$; **III** 0; **IV** $\frac{3}{4}\pi$.

3. Найти расстояние от точки до плоскости.

I	$M_0(-1;3;0)$, $4x-3y+8=0$;
II	$M_0(2;1;3)$, $2x-3y+z+9=0$;
III	$M_0(-2;0;-3)$, $x-5y+z-1=0$;
IV	$M_0(0;2;-3)$, $3x+y-2z+11=0$.

Ответ: **I** 1; **II** $\frac{13}{\sqrt{14}}$; **III** $\frac{2}{\sqrt{3}}$; **IV** $\frac{19}{\sqrt{14}}$.

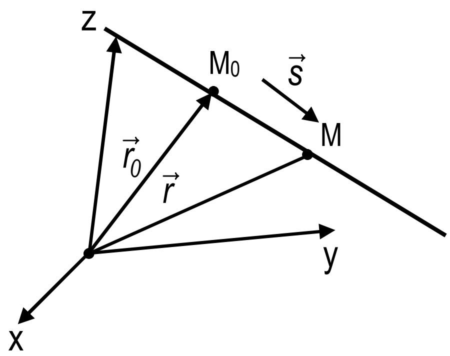
2.4. Прямая в пространстве. Виды уравнений прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости.

В зависимости от способа задания прямой в пространстве можно рассматривать различные ее уравнения.

1. *Векторно – параметрическое уравнение прямой* имеет вид

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s} \quad (-\infty<t<\infty), \quad (2.5)$$

где $\vec{r}_0$ - радиус вектор точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, через которую проходит прямая, $\vec{r}$ - радиус – вектор произвольной точки $M(x;y;z)$ прямой, t - параметр, $\vec{s}=(\ell;m;n)$ - направляющий вектор прямой. Направляющим может быть любой вектор, принадлежащий прямой или параллельный ей.



2. *Параметрические уравнения прямой*.

Уравнение (2.5) в координатной форме равносильно трем скалярным уравнениям

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Система (2.6) – параметрические уравнения прямой в пространстве.

3. *Канонические уравнения прямой.*

Если из соотношений (2.6) исключить параметр t, то получим канонические уравнения прямой в пространстве: $\dfrac{x - x_0}{\ell} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$.

4. *Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две точки.*

Если прямая проходить через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то ее уравнения имеют вид: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

5. *Общие уравнения прямой в пространстве.*

Если прямая образована пересечения плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, причем $\vec{n}_1 = (A_1;B_1;C_1)$ $\vec{n}_2 = (A_2;B_2;C_2)$, то система $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_1y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ называется общими уравнениями прямой в пространстве. Направляющий вектор такой прямой равен вектору $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Рассмотрим случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве. Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_1}{\ell_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x - x_2}{\ell_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

где $\vec{s}_1(\ell_1;m_1;n_1)$ и $\vec{s}_2 = (\ell_2;m_2;n_2)$ - их направляющие векторы.

Первая прямая проходит через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, вторая – через точку $M_2(x_2;y_2;z_2)$. В этом случае величина угла между прямыми (между их направляющими векторами) $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ определяется из формулы $\cos\varphi = \dfrac{\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{\ell_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$.

Условие перпендикулярности прямых имеет вид $\vec{s}_1\vec{s}_2 = 0$ или $\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$, а условия параллельности $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$, условия совпадения прямых $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$

Необходимое и достаточное условие пересечения непараллельных прямых $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$ имеет вид

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x_1 - x_1 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.7)$$

Если условие (2.7) не выполняется, то прямые скрещиваются.

Расстояние от точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ в направлении вектора $\vec{s} = (\ell;m;n)$, вычисляется по формуле $d = \dfrac{\left|\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\vec{s}|}$.

Рассмотрим взаимное расположение прямой $\dfrac{x - x_0}{\ell} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Величина угла определяется из формулы:

$$\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{s}}\right) = \sin\varphi = \frac{|A\ell + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}.$$

Если плоскость и прямая параллельны, то векторы $\vec{n}$ и $\vec{s}$ перпендикулярны, т.е. $A\ell + Bm + Cn = 0$.

Если $A\ell + Bm + Cn = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то прямая принадлежит плоскости.

Задания для аудиторных занятий

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;0;-3)$

   а) параллельно вектору $\vec{s} = (2;-3;5)$;

   б) параллельно прямой $\begin{cases} 2x - y + 3z - 11 = 0, \\ 5x + 4y - z + 8 = 0; \end{cases}$

   в) параллельно прямой $\begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = -1, \\ z = 5t. \end{cases}$

Ответ: а) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{3}$; б) $\frac{x-2}{11}=\frac{y}{-17}=\frac{z+3}{-13}$; в) $\frac{x-2}{-3}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{5}$.

2. Установить взаимное расположение прямой и плоскости и, в случае их пересечения, найти координаты точки пересечения:

   а) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$ и $3x-3y+2z-5=0$;

   б) $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ и $x+2y-4z+1=0$;

   в) $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ и $3x-y+2z-5=0$.

   Ответ: а) параллельны; б) прямая лежит в плоскости; в) пересекаются в точке $M(2;3;1)$.

3. Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(2;-5;7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5;4;6)$ и $M_2(-2;-17;-8)$.

   Ответ: $Q(4;1;-3)$.

4. Вычислить угол между прямой $\begin{cases} x-2y+3=0, \\ 3y+z-1=0, \end{cases}$ и плоскостью $2x+3y-z+1=0$.

   Ответ: $\sin\varphi=\frac{5}{7}$, $\varphi\approx 45^\circ 36'$.

5. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ перпендикулярно плоскости $x+4y-3z+7=0$.

   Ответ: $11x-17y-19z+10=0$.

6. Вычислить расстояние между прямыми $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$.

   Ответ: $d=3$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Даны четыре точки $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$, $D(x_4,y_4,z_4)$. Составить:

   а) канонические уравнения прямой *AB*;

   б) параметрические уравнения прямой проходящей через точку *D* перпендикулярно плоскости *ABC*;

   в) общие уравнения прямой *BC*.

   Вычислить:

   г) синус угла между прямой *AD* и плоскостью *ABC*;

   д) косинус угла между прямыми *AB* и *BC*.

I	$A(0;4;5)$, $B(3;-2;1)$, $C(4;5;6)$, $D(3;3;2)$.
II	$A(2;-1;7)$, $B(6;3;1)$, $C(3;2;8)$, $D(2;-3;7)$.
III	$A(2;1;7)$, $B(3;3;6)$, $C(2;-3;9)$, $D(1;2;5)$.
IV	$A(2;1;6)$, $B(1;4;9)$, $C(2;-5;8)$, $D(5;4;2)$.

Ответы:

I	а) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-4}{-6}=\dfrac{z-5}{-4}$; б) $\begin{cases} x=3+2t, \\ y=3+19t, \\ z=2-27t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 12x+19y-27z+59=0, \\ 18x+y-5z-47=0; \end{cases}$ г) 0,47; д) $-0,87$;
II	а) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-7}{-3}$; б) $\begin{cases} x=2+11t, \\ y=-3-5t, \\ z=7+4t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 11x-5y+4z-55=0, \\ 18x-5y+7z-100=0; \end{cases}$ г) 0,39; д) –0,91;
III	а) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-7}{-1}$; б) $\begin{cases} x=1, \\ y=2+t, \\ z=5+2t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y+2z-15=0, \\ 9x-7y-11z+60=0; \end{cases}$ г) $-0,52$; д) $-0,96$;
IV	а) $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-6}{3}$; б) $\begin{cases} x=5+12t, \\ y=4+t, \\ z=2+3t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 12x+y+3z-43=0, \\ 21x+y+12z-133=0; \end{cases}$ г) $0,37$; д) $-0,78$.

2.5. Поверхности второго порядка
Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, декартовы координаты *x, y, z* которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0, \quad (2.8)$$

где коэффициенты a_{11}, a_{22}, …, a_0 - постоянные числа, $a_{11}^2+a_{22}^2+a_{33}^2+a_{12}^2+a_{13}^2+a_{13}^2 \neq 0$. Уравнение (2.8) называется общим уравнением поверхности второго порядка.

С помощью преобразований системы координат уравнение (2.8) можно привести к каноническому виду, т.е. к одному из уравнений:

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (эллипсоиды),

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (однополостные гиперболоиды),

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ (двуполостные гиперболоиды),

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$ (конусы),

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$ (эллиптические параболоиды),

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$ (гиперболические параболоиды),

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ (эллиптические цилиндры),

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ (гиперболические цилиндры),

$$x^2=2py$$ (параболические цилиндры).

Параметры *a, b, c, p* - постоянные положительные числа.

Получение канонического уравнения из общего при $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$ осуществляется методом выделения полных квадратов и параллельным переносом осей координат.

Задания для аудиторных занятий

1. Методом параллельных сечений исследовать форму поверхности и построить ее:
   а) $x^2+2y^2+4z^2=2$; б) $2x^2-9y^2-z^2=36$; в) $y^2-6z=0$.
2. Определить вид поверхности и построить ее:
   а) $x^2+y^2+z^2-3x+5y-4z=0$; б) $36x^2+16y^2-9z^2+18z=9$;
   в) $x^2+y^2+z^2=2z$; г) $x^2+3z^2-8x+18z+34=0$.
3. Построить тело, ограниченное поверхностями:
   а) $x^2=z$, $z=0$, $2x-y=0$, $x+y=9$;
   б) $z^2=4-y$, $x^2+y^2=4y$;
   в) $z=y$, $z=0$, $y=\sqrt{4-x}$, $y=\frac{1}{2}(x-1)$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Построить поверхности и определить их вид:

I	а) $27x^2-63y^2+21z^2=0$; б) $3x^2-7y^2-2z^2=42$;
II	а) $3x^2-9y^2+z^2+27=0$; б) $z^2-2y=-4x^2$;
III	а) $-4x^2+12y^2-3z^2+24=0$; б) $2y^2+6z^2=3x$;
IV	а) $7x^2+2y^2+6z^2-42=0$; б) $2x^2+4y^2-5z=0$.

2. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок.

I	а) $3x^2 = -4y$, Oz; б) $4x^2 + 3y^2 = 12$, Oz;
II	а) $5y^2 - 8z^2 = 40$, Oz; б) $y = 3$, $z = 1$, Ox;
III	а) $3x^2 = -2z$, Oz; б) $8x^2 + 11z^2 = 88$, Ox;
IV	а) $5x^2 - 7y^2 = 35$, Ox; б) $x = 2$, $y = -4$, Oz.

3. Построить тело, ограниченное указанными поверхностями.

I	а) $y = 5x$, $y = 0$, $x = 3$, $z = 0$; б) $4\left(x^2 + y^2\right) = z^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;
II	а) $z = 3y^2$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$; б) $x + y + z = 8$, $x + 2y = 4$, $x + 4y = 4$; $y = 0$, $z = 0$;
III	а) $2y^2 + z^2 = 4$, $3x^2 - 8y^2 = 48$, $z \geq 0$; б) $x = 1$, $y = 3$, $x + 2y + 4z = 24$, $x = 0$, $y = 0$, $z \geq 0$;
IV	а) $4\left(x^2 + y^2\right) = z^2$, $z = 0$; $y = x$, $y = 4x$, $x = 2$ $(z > 0)$; б) $x^2 + y^2 = 4y$, $z = 0$, $y + z = 6$.

Глава 3. Введение в математический анализ.
3.1. Предел функции в точке.
Предел функции в точке. Предел функции в бесконечности. Раскрытие неопределенных выражений.

Число a называется пределом последовательности $x_n = f(n)$, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Например, дана последовательность $\frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{6}{9}, \frac{8}{11}, \ldots, \frac{2n}{2n+3}, \ldots$.

Члены заданной последовательности с увеличением их номера возрастают, но при этом остаются меньше единицы. Поэтому последовательность имеет предел, не превосходящий единицы. Проверим, не является ли этим приделом единица.

Зададим $\varepsilon = \frac{1}{10000}$ и будем искать такой номер $n = N$, начиная с которого выполняется неравенство $\left|\frac{2n}{2n+3} - 1\right| < \frac{1}{10000}$. Преобразование этого неравенства дает $\frac{3}{2n+3} < \frac{1}{10000}$, оттуда $2n+3 > 30000$, т.е. $N > 14999$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+3} = 1$.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$. Записывают: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Аналогично $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > \Delta(\varepsilon)$.

Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > E$ при $|x - x_0| < \delta(E)$, где E – произвольное положительное число.

В этом случае функция $f(x)$ называется бесконечно большой величиной.

Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах.

Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то

1. $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad \left(при \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0\right)$;

4. Если для всех значений x в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может $x=a$, функции $f\left(x\right)$ и $g\left(x\right)$ равны и одна из них имеет предел при $x\to a$, то вторая имеет тот же предел.

Это свойство применяется при раскрытии неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Например, $\frac{x^2-a^2}{x-a}=x+a$ при любых x, кроме $x=a$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\left(x+a\right)=2a$.

Полезно знать, что:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}ax=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{a}=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$ при $a>1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$ при $0<a<1$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$ при $a>1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$ при $0<a<1$;

$\lim\limits_{x\to 0}\log_a x=-\infty$ при $a>1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$ при $a>1$.

Задания для аудиторных занятий

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ (указать $N(\varepsilon)$), $x_n=\frac{3n-2}{2n-1}$, $a=\frac{3}{2}$.

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n+2}{3n^2+5}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{100n^3+4n^2}{2n^4-5n^3+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-7n^2+3}{10n^2+6n}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(3-n\right)^2+\left(3+n\right)^2}{\left(3-n\right)^2-\left(3+n\right)^2}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^4+5}+n}{1-\sqrt[3]{8n^6-n^3+7}}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n\left(n+2\right)}-\sqrt{n^2-2n+1}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$.

Вычислить:

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{5x+\sqrt[4]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$.

Ответ: а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{1}{2}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-1}{3x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x^2-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x}{1-x}$.

Ответ: а) –1; б) $\frac{7}{2}$; в) ∞.

7. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{x^2-7x+12}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$; е) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$; ж) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{8-x^3}\right)$.

Ответ: а) 2; б) $-\dfrac{1}{3}$; в) 48; г) $\dfrac{1}{2}$; д) 6; е) $3x^2$; ж) ∞.

8. а) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$; в) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{6}$; б) 32; в) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; г) $\dfrac{3}{2}$; д) $\dfrac{1}{3}$; е) $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$; б) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{1}{4}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти пределы последовательностей.

I	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-7n+1}{2n^2-3n+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-2n^2+5}{25n^3+4n-1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$;
II	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2-3n+4}{9n^2+5n-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-4n^2+1}{2n+5}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-n+1}\right)$;
III	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^2+2n-1}{6n^2-4n+3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^5+n^4-3n^2+2}{3n^3-2n+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2-n}\right)$;
IV	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2-8n+3}{5n^2+2n-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^4-5n^2+n}{3n^3+2n-1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-a^2}\right)$.

2. Найти пределы функций.

I	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{3x+1}-\dfrac{x^3}{3x^2-2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;
II	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{4x^2-1}-\dfrac{x^2}{4x+5}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{3x^2-8x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{2x-6}-\dfrac{3}{x^2-9}\right)$;
III	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{5x+3}-\dfrac{x^3}{5x^2-4}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{5x^2+13x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-4}$; г) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{2x-8}-\dfrac{4}{x^2-16}\right)$;
IV	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2+3}-\dfrac{x^2}{2x-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{4x^2+9x-9}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

Ответ:

I	а) $-\dfrac{1}{9}$; б) $\dfrac{5}{11}$; в) $-\dfrac{1}{2}$; г) $\dfrac{1}{2}$;
II	а) $\dfrac{5}{16}$; б) $\dfrac{1}{2}$; в) $\dfrac{1}{2}$; г) $\dfrac{1}{12}$;
III	а) $-\dfrac{3}{25}$; б) $\dfrac{9}{7}$; в) $\dfrac{9}{4}$; г) $\dfrac{1}{16}$;
IV	а) $-\dfrac{1}{4}$; б) $\dfrac{7}{15}$; в) -3; г) $\dfrac{1}{4}$.

3. Найти пределы функций.

I	а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$;
II	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-x}$;
III	а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{2x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2}}$;

IV	а) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}-x}{x^2-\sqrt[3]{x}}$.

Ответ:

I	а) $-\dfrac{1}{56}$; б) 1; в) $\dfrac{2}{3}$;
II	а) $\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$; в) 0;
III	а) $\dfrac{1}{48}$; б) $\dfrac{1}{8}$; в) $\dfrac{3}{2}\sqrt[6]{2}$;
IV	а) $\dfrac{1}{5}$; б) $-\dfrac{\sqrt{2}}{8}$; в) 0.

3.2. Замечательные пределы.

При нахождении пределов широко используются замечательные пределы. Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ раскрывает неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

Второй - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=e\approx 2{,}71828$ раскрывает неопределенность 1^∞.

Задания для аудиторных занятий

Найти пределы:

1\. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$.

Ответ: а) 3; б) $\dfrac{2}{5}$; в) 18; г) $\dfrac{1}{2}$; д) 1.

2\. а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-x\right)tg\dfrac{\pi x}{2}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg\pi x}{x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

Ответ: а) $-\sin a$; б) $-\dfrac{2}{\pi}$; в) $-\pi$; г) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3\. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{3x}$.

Ответ: а) 1; б) $\frac{1}{3}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)^{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x+1}{5x-2}\right)^{x}$.

Ответ: а) 1; б) $\frac{1}{8}$; в) $\begin{cases}\infty, x\to+\infty,\\ 0, x\to-\infty;\end{cases}$ г) $\begin{cases}0, x\to+\infty,\\ \infty, x\to-\infty.\end{cases}$

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-2}\right)^{2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

Ответ: а) e^4; б) e.

6. а) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{1}{x^2-4}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\ln(x+a)-\ln x\right)$.

Ответ: а) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; в) $\sqrt{e}$; г) 1; д) a.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-a^a}{x-a}$.

Ответ: а) 1; б) $\ln a$; в) $a^a\ln a$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти пределы:

I	а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$;
II	а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$;
III	а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$;
IV	а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 10x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-tgx}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$.

Ответ:

I	а) $\frac{1}{2}$; б) 3; в) $\frac{1}{20}$;
II	а) 8; б) $-\frac{1}{2}$; в) -2;
III	а) 32; б) $\cos x$; в) $-\frac{1}{18\pi}$;
IV	а) 50; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) 1.

2. Найти пределы:

I	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{2-x}{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$.
II	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{2}{1-x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$.
III	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(7x-6)^{\frac{1}{3x-3}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-1}{x}$.
IV	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-1}{4x^2+1}\right)^{x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{3+x}{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x}-e}{x-1}$.

Ответ:

I	а) e^{-6}; б) $\frac{1}{e^8}$; в) $\frac{1}{e}$; г) -1;
II	а) e^2; б) e^6; в) k; г) -2;
III	а) $e^{\frac{4}{3}}$; б) $e^{\frac{7}{3}}$; в) $\frac{1}{a}$; г) -3;
IV	а) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; б) $\frac{1}{e^{15}}$; в) 1; г) e.

3.3. Сравнение функций.
Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются сравнимыми, если существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ или $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ сравнимые бесконечно малые при $x\to x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$, где $0<|c|<+\infty$, то

а) если $c\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют бесконечно малыми одного порядка. В частности, при $c=1$ бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют эквивалентными и пишут $\alpha\sim\beta$.

б) если $c=0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$, и пишут $\alpha=0(\beta)$. Если при этом существует действительное число $r>0$ такое, что $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^r}\neq 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой порядка r относительно $\beta(x)$. Сумма двух бесконечно малых различных порядков равносильна тому из слагаемых, порядок которого ниже.

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если члены отношения заменить равносильными им величинами.

Если $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ и $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Приведем примеры эквивалентных (равносильных) бесконечно малых при $x\to 0$: $\sin x\sim x$, $tgx\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$, $e^x-1\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $arctgx\sim x$, $a^x-1\sim x\ln a$.

Задания для аудиторных занятий

1. Определить при $x\to 0$ порядки малости относительно x функций

   а) $\frac{2x}{1+x}$; б) $tgx-\sin x$; в) $\sqrt{1+x^3}-1$; г) $\sin 2x-2\sin x$;

   д) $3^{\sqrt{x}}-1$; е) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^3}$; ж) $2\sin^4 x-x^5$; з) $\sqrt{\sin^2 x+x^4}$.
2. Доказать, что при $x\to 0$:

   а) $\sqrt[3]{1+x}-1\sim\frac{1}{3}x$; б) $1-\cos^3 x\sim 1{,}5\sin^2 x$; в) $arctgmx\sim mx$.

3. Доказать, что при $x \to 0$ величины $\dfrac{x}{2}$ и $\sqrt{1+x}-1$ равносильны между собой. Пользуясь этим результатом приближенно найти: а) $\sqrt{0{,}97}$, б) $\sqrt{10}$ и сравнить полученные значения с табличными данными.

4. Пользуясь теоремой об отношении двух бесконечно малых, найти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\sin 5x}{\left(x-x^3\right)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx^3}{\arcsin 3x\cdot\sin\dfrac{x}{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{e^{x^2}-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{\arcsin(1-2x)}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+\sin^2 x}{\sin 2x-x^3}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax+x^2}{tg6x}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Определить при $x \to 0$ порядок малости относительно x функций:

I	а) $1-\cos x$; б) $3\sin^3 x+x^4$; в) $\sin\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)$; г) $\sqrt[5]{x^2}-\sqrt{x^5}$;
II	а) $\dfrac{1-\cos x}{x}$; б) $\dfrac{x\cdot(x+1)}{1+\sqrt{x}}$; в) $2\sin^2 x-x^3$; г) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$;
III	а) $1-\cos 2x$; б) $3\sin_x^4+x^5$; в) $\sqrt{1+x\sin x}-1$; г) $\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[3]{x^5}$;
IV	а) $\dfrac{1-\cos 2x}{x}$; б) $4\sin^3 x-x^5$; в) $\sqrt{\sin 2x}$; г) $\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^2}$.

2. Пользуясь теоремой об отношении двух бесконечно малых, найти:

I	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln\left(1+x^2\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(5^x-1\right)\cdot\left(4^x-1\right)}{3^x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{tg3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$;
II	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{tg^2 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arc\,tg2x}{3^{4x}-1}$;
III	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{tg\left(x^2\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x^2}-1}{\ln^2(1-5x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sin\left(4x^2\right)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$;
IV	а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(e^{x-1}-1\right)}{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-1}{tg4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sin 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arc\,tg\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}}{2^{-5x}-1}$.

Ответ:

I	а) $-\frac{1}{2}$; б) 0; в) $\frac{1}{3}$; г) $6\sqrt{2}$;
II	а) $\frac{9}{4}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{16}$; г) $\frac{1}{2\ln 3}$;
III	а) 3; б) $\frac{3}{25}$; в) $\frac{1}{24}$; г) -1;
IV	а) 1; б) $\frac{\ln 3}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{10}$; г) $-\frac{1}{10\ln 2}$.

3.4. Непрерывность функции в точке.

Функция $y=f(x)$ с областью определения D называется непрерывной в точке x_0, если выполнены следующие три условия:

а) функция $y=f(x)$ определена в точке x_0, т.е. $x_0 \in D$;

б) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0).$$

Если для функции $f(x)$ существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$, причем не все три числа $f(x_0)$, $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ равны между собой, то x_0 называется точкой разрыва 1-го рода. В частности, если $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то x_0 называется устранимой точкой разрыва.

Точки разрыва функции, не являющиеся точками разрыва 1-го рода, называются точками разрыва 2-го рода. К точкам разрыва 2-го рода относятся точки, для которых хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$ равен бесконечности.

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на множестве D, если она непрерывна в каждой точке $x\in D$.

Элементарные функции: степенная x^n, показательная a^x, логарифмическая, тригонометрические и им обратные, а также их сумма, произведение, частное непрерывны при всяком *x*, при котором они имеют определенные значения.

Задания для аудиторных занятий.

1. Исследовать на непрерывность функции:

а) $y=\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$; б) $y=\dfrac{1+x^2}{1+x}$; в) $y=e^{\frac{1}{x+1}}$; г) $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$; д) $y=\ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right|$.

2. Функция $f(x)$ не определена при $x=0$. Определить $f(0)$ так, чтобы $f(x)$ была непрерывной при $x=0$, если:

а) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; б) $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$; в) $f(x)=xctgx$.

3. Исследовать по непрерывности и построить график функции:

$$y=\begin{cases} x^2-1, x<0 \\ \cos x, 0\le x\le\dfrac{\pi}{2} \\ x-\dfrac{\pi}{2}, x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4. Пусть $f(x)=\begin{cases} x+1, x\le 1 \\ 3-ax^2, x>1. \end{cases}$ При каком выборе числа *a* функция $f(x)$ будет непрерывной ? Построить ее график.

Задания для индивидуального выполнения

1. Исследовать на непрерывность функции:

I	а) $y=\dfrac{x}{4-x^2}$; б) $y=2^{\frac{1}{x-1}}$;
II	а) $y=\dfrac{x^2}{x-2}$; б) $y=3^{\frac{x}{9-x^2}}$;
III	а) $y=\dfrac{1}{x^2(x-1)}$; б) $y=4^{\frac{1}{3-x}}$;
IV	а) $y=\dfrac{x}{x^2-9}$; б) $y=2^{\frac{1}{5-x}}$.

2. При каком выборе параметра *a* функция $y=f(x)$ будет непрерывной ?

I	$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & x\ne 1 \\ a, & x=1 \end{cases}$

II	$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 1 \\ ax^2-2, & x>1 \end{cases}$
III	$f(x)=\begin{cases} ax+1, & x\le \dfrac{\pi}{2} \\ \sin x+2, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$
IV	$f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x<0 \\ a-3x, & x\ge 0 \end{cases}.$

Ответ:

I. $a=3$	**II.** $a=2$	**III.** $a=\dfrac{4}{\pi}$	**IV.** $a=2$

3. Найти точки разрыва функции и установить их характер. Сделать чертеж.

I	$f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\le x\le 1 \\ 4-2x, & 1<x\le 2{,}5 \\ 2x-7, & x>2{,}5 \end{cases}$
II	$f(x)=\begin{cases} 2^x, & x<1 \\ x-1, & 1\le x\le 4 \\ 1, & x>4 \end{cases}$
III	$f(x)=\begin{cases} 2x-4, & x<0 \\ -2x, & 0\le x\le 2 \\ x^2-8, & x>2 \end{cases}$
IV	$f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x\le 1 \\ 2x-4, & x>1 \end{cases}$

Ответ:

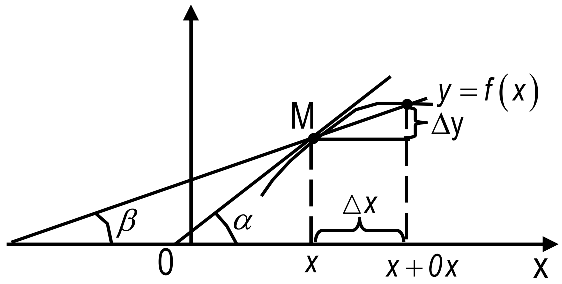
I	$x=2{,}5$ - точка разрыва I рода
II	$x=1$, $x=4$ - точки разрыва I рода
III	$x=0$ - точка разрыва I рода
IV	$x=1$ - точка разрыва I рода

Глава 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

4.1. Производная.
Производная, ее геометрический и механический смысл.
Табличное дифференцирование. Производная сложной функции.

Производной функции $y=f(x)$ в точке *x* называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента $\triangle x$ при $\triangle x \to 0$.

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} \qquad (4.1)$$



Если предел (4.1) существует, то $f(x)$ является дифференциуемой в точке *x*.

Из рисунка видно, что $tg\beta=\frac{\triangle y}{\triangle x}$, а $tg\alpha=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=y'=f'(x)$.

Геометрический смысл производной: производная $f'(x)$ равна тангенсу угла α наклона касательной, проведенной в точке $M(x,y)$ к графику функции $y=f(x)$.

Механический смысл производной: $y'=f'(x)$ определяет скорость изменения функции в точке *x* относительно аргумента *x*.

Если *C* – постоянное число, а $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1. $(C)'=0$;
2. $(u\pm v)'=u'\pm v'$;
3. $(Cu)'=Cu'$;
4. $(uv)'=u'v'+uv'$;
5. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\cdot(v\neq 0)$;
6. если $y=f(u)$, а $u=\varphi(x)$, то $y=f(\varphi(x))$ - сложная функция от *x*, тогда $y'_x=y'_u u'_x$ или $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

Таблица производных основных элементарных функций:

1.	$\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}u'\left(\alpha\in R\right)$	10.	$\left(\arcsin u\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$;
2.	$\left(a^{u}\right)'=a^{u}\ln a\cdot u'$	11.	$\left(\arccos u\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$;
3.	$\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'$;	12.	$\left(arctgu\right)'=\dfrac{1}{1+u^2}u'$;
4.	$\left(\log_a u\right)'=\dfrac{1}{u\ln a}u'$;	13.	$\left(arcctgu\right)'=-\dfrac{1}{1+u^2}u'$;
5.	$\left(\ln u\right)'=\dfrac{1}{u}u'$;	14.	$\left(shu\right)'=chu\cdot u'$;
6.	$\left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'$;	15.	$\left(chu\right)'=shu\cdot u'$;
7.	$\left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$;	16.	$\left(thu\right)'=\dfrac{1}{ch^2u}u'$;
8.	$\left(tgu\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}u'$;	17.	$\left(cthu\right)'=-\dfrac{1}{sh^2u}u'$.
9.	$\left(ctgu\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$;		

Уравнение касательной к кривой $y=f\left(x\right)$ в точке $M_0\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ имеет вид: $y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$.

Уравнение нормали к кривой $y=f\left(x\right)$ в точке $M_0\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$: $y-f\left(x_0\right)=-\dfrac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right)$.

Если $f'\left(x_0\right)=0$, то уравнение нормали имеет вид $x=x_0$. Углом между кривыми в точке их пересечения называют угол между касательными к кривым в этой точке.

Задания для аудиторных занятий

1. Найти производную функции $y=3x^3-2x^2+3x-1$, воспользовавшись определением производной.
2. Найти производные следующих функций:

   а) $y=5x^4+\dfrac{7}{x^5}-3\sqrt[7]{x^3}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$; б) $y=\sqrt{x}\sin x$; в) $y=\dfrac{x^4+1}{x^4-1}$

   г) $y=\cos^4 x$; д) $y=\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^3+1}{x^3-1}\right)^2}$.

3. Используя формулы и правила дифференцирования, найти производные данных функций.

   а) $y = e^{x} tg4x$; б) $y = xctg^{2}7x$; в) $y = e^{arctg\sqrt{x}}$; г) $y = 2^{-\cos^{4}5x}$;

   д) $y = \sqrt[3]{x^{4} + \sin^{4}x}$; е) $y = \left(2^{tg3x} + tg3x\right)^{2}$; ж) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$.

4. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^{3} + 2x - 2$ в точке с абсциссой $x = 1$

   Ответ: $y - 5x + 4 = 0$; $5y + x - 6 = 0$.

5. Расстояние, пройденное материальной точкой за время t равно $s = \frac{1}{4}t^{4} - \frac{1}{3}t^{3} + 2t + 1$. (s – в метрах) Найти скорость движения данной точки в моменты времени $t = 0$; 1; 2с.

   Ответ: $2\frac{м}{c}$; $2\frac{м}{c}$; $6\frac{м}{c}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти производные:

I	а) $y = \frac{6}{x^{4}} - \frac{3}{x} + 9x^{3} - \sqrt{x^{7}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$; е) $y = th^{3}5x \cdot arctg\left(2x - 5\right)$; б) $y = \sqrt[3]{\left(x - 1\right)^{5}} + \frac{5}{2x^{2} - 4x + 7}$; ж) $y = \frac{e^{-tgx}}{4x^{2} + 7x - 5}$; в) $y = \cos^{4}3x \cdot \arcsin 3x^{2}$; з) $y = \frac{tg^{4}3x}{\lg\left(x^{2} - x + 4\right)}$; г) $y = \log_{5}\left(x + 1\right) \cdot arctg^{2}x^{3}$; и) $y = \frac{\sqrt[5]{ch3x}}{arctg\left(x + 2\right)}$; д) $y = \sqrt{\left(x + 5\right)^{3}} \arccos^{4}x$; к) $y = \frac{4\lg\left(3x + 7\right)}{\left(x - 5\right)^{3}}$;
II	а) $y = \frac{7}{x} + \frac{4}{x^{3}} - \sqrt[5]{x^{3}} - 2x^{6} + \frac{1}{3\sqrt{x}}$; е) $y = cth^{2}4x \cdot \arcsin x^{3}$; б) $y = \frac{7}{\left(x + 2\right)^{5}} - \sqrt{8 - 5x + 2x^{2}}$; ж) $y = \frac{\sqrt{x^{2} - 3x - 7}}{e^{-x^{3}}}$; в) $y = \sin^{5}3x \cdot arctg\sqrt{x}$; з) $y = \frac{log_{3}\left(x + 4\right)}{\cos^{5}x}$; г) $y = \lg\left(x + 3\right) \cdot arctg^{2}5x$; и) $y = \frac{\sqrt{sh^{3}x}}{arcctg5x}$;

	д) $y = e^{-\cos x} \cdot \arcsin 2x$; к) $y = \dfrac{2\ln\left(2x^2+3\right)}{\left(x-7\right)^4}$;
III	а) $y = 4x^5 - \dfrac{5}{x} - \sqrt{x^3} + \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^4}}$; е) $y = sh^4 3x \cdot \arccos 5x^4$; б) $y = \sqrt{\left(x-4\right)^7} - \dfrac{10}{3x^2-5x+1}$; ж) $y = \dfrac{e^{\sin 5x}}{\left(3x-2\right)^2}$; в) $y = 2^{tg^x} \cdot \mathrm{arc}\,tg^5 3x$; з) $y = \dfrac{tg^4 5x}{\ln\left(x+7\right)}$; г) $y = \ln\left(x-4\right) \cdot arcctg^4 3x$; и) $y = \dfrac{arctg^2 5x}{th\left(x+5\right)}$; д) $y = \arcsin^3 4x \cdot ctg3x$; к) $y = \dfrac{4\log\left(3x-5\right)}{\left(x-2\right)^2}$;
IV	а) $y = 4x^3 + \dfrac{3}{x^2} - \sqrt[3]{x^5} - \dfrac{2}{x^4} + \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$; е) $y = th^5 3x \cdot arcctg\sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{4}{\left(x-7\right)^3} - \sqrt[3]{\left(3x^2-x+1\right)^4}$; ж) $y = \dfrac{e^{\cos 3x}}{\left(2x+4\right)^5}$; в) $y = tg^3 2x \cdot \arccos 2x^3$; з) $y = \dfrac{\ln^3 x}{ctg\left(x-3\right)}$; г) $y = 2^{-x} \cdot arctg^3 4x$; и) $y = \dfrac{arctg^2 5x}{\sqrt[3]{cthx}}$; д) $y = \sqrt[5]{\left(x+4\right)^2} \cdot \arcsin 7x^2$; к) $y = \dfrac{3\ln\left(x^2+5\right)}{\left(x-7\right)^3}$.

4.2. Производная. Логарифмическая производная. Производная неявной и параметрически заданной функции.

Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции $\left(\ln f(x)\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

В некоторых случаях предварительное логарифмирование упрощает нахождение производной.

Пример. Найти производную функцию $y = \left(\sin 2x\right)^{x^3}$. Логарифмируя данную функцию, получаем $\ln y = x^3 \ln\sin 2x$.

Дифференцируя обе части последнего равенства: $\dfrac{y'}{y}=3x^2\ln\sin 2x+x^3\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}$.

Окончательно имеем: $y'=\left(\sin 2x\right)^{x^3}\left(3x^2\ln\sin 2x+\dfrac{2x^3\cos 2x}{\sin 2x}\right)$.

Если зависимость между переменными y и x задана в неявном виде уравнением $F\left(x,y\right)=0$, то для нахождения производной $y'=y'_x$ достаточно продифференцировать обе части уравнения $F\left(x,y\right)=0$, считая y функцией от x.

Пример. Найти производную функции y', если $x^3+y^3-3xy=0$.

Решение

Дифференцируем обе части данного уравнения, считая y функцией от x: $3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0$. Откуда $y'=\dfrac{3y-3x^2}{3y^2-3x}=\dfrac{x^2-y}{x-y^2}$.

Если зависимость функции y от аргумента x задана в параметрическом виде уравнениями $\begin{cases}x=x\left(t\right),\\ y=y\left(t\right),\end{cases}$ то $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'\left(t\right)}{x'\left(t\right)}$.

Задания для аудиторных занятий

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=\dfrac{\sqrt{x+10}\left(x-8\right)^3}{\left(x-1\right)^5}$; б) $y=\left(x^3+1\right)^{tg2x}$;

в) $y=\left(\sin 3x\right)^{\cos 5x}$; г) $y=\left(ctg5x\right)^{x^3-1}$.

2. Найти производные y' функций, заданных неявно уравнениями:

а) $e^{xy^2}-x^3-y^3=3$; б) $xy-arctg\dfrac{x}{y}=3$;

в) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=a$; г) $x^2+y^2-\sin\left(x^2y^2\right)=5$.

3. Найти производные функций, заданных уравнениями:

а) $\begin{cases}x=t^3+t^2-1,\\ y=t^3+t+1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x=2\cos^3 t,\\ y=2\sin^3 t.\end{cases}$

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти производные:

I	а) $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4(x-3)^5}$; б) $y=(sh3x)^{arcctg2x}$;
II	а) $y=\dfrac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{(x+2)^4(x-5)^7}$: б) $y=\left(cth\sqrt{x}\right)^{\sin(x+9)}$;
III	а) $y=\dfrac{\sqrt[4]{(x+1)^3(x-2)^5}}{(x-3)^2}$; б) $y=(arctgx)^{th(3x+1)}$
IV	а) $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x-2)^3(x+1)^2}}{(x+3)^4}$; б) $y=(sh5x)^{arctg(x+2)}$.

2. Найти производные неявно заданных функций:

I	а) $3x^2y+\dfrac{x}{y^2}=5$; б) $\sin\left(3x+8y^2\right)+\ln y=7$;
II	а) $2x^3y^2+\dfrac{y^2}{x^3}=6$: б) $\cos\left(3x^2-7y\right)+e^{xy}=1$;
III	а) $xy^3+\dfrac{x}{y}=1$; б) $tg\left(x-5y^2\right)+\dfrac{y}{x^2}=5$
IV	а) $3xy-\dfrac{y}{x}=3$; б) $\ln(x-5y)+\sqrt{x}y^2=4$.

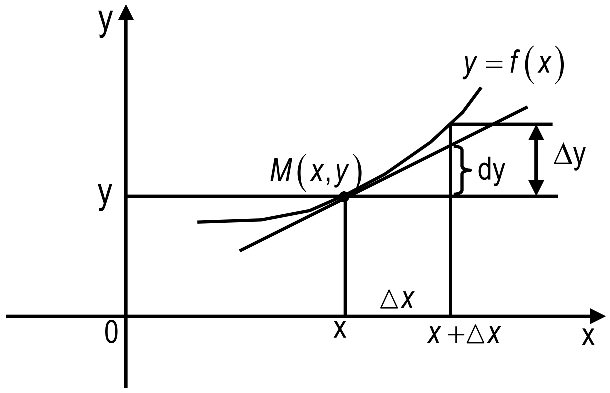
3. Найти производные функций, заданных параметрически.

I	а) $\begin{cases} x=3t^2-3t+5, \\ y=\dfrac{1}{3}t^2-2t+1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=4\sin t; \end{cases}$
II	а) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{1}{2}t^2-1, \\ y=2t^2+4t+5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=e^{-3t}, \\ y=e^{8t}; \end{cases}$
III	а) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{4}t^4+\dfrac{1}{3}t^3+8t, \\ y=3t^2+4x+5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=2\cos^2 t, \\ y=3\sin^2 t; \end{cases}$
IV	а) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t^4+\dfrac{1}{3}t^3+9, \\ y=6t^3+5t^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=5\cos^2 t, \\ y=3\sin^2 t. \end{cases}$

4.3. Дифференциал функции. Дифференциал функции. Приложения дифференциала.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейно зависящая от приращения $\Delta x = dx$ независимой переменной *x*.

$dy = f'(x)dx$



Геометрически дифференциал равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x,y)$, при изменении аргумента на Δx.

Из правил дифференцирования и определения дифференциала вытекают правила нахождения дифференциала

1. $dC = 0 \ (C - const)$;
2. $dx = \Delta x$, x - независимая переменная;
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$, $u = u(x)$, $v = v(x)$;
4. $d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv$;
5. $d(Cu) = Cdu$;
6. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2} \ (v \neq 0)$;
7. $df(u) = f'_u(u)u'dx = f'(u)du$.

Так как дифференциал отличается от приращения на бесконечно малую более высокого порядка чем Δx, то $\Delta y \approx dy$ или $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Эта формула часто применяется для приближенного вычисления значений функции при малом приращении Δx независимой переменной *x*.

Задания для аудиторных занятий

1. Дана функция $y = x^3 - 2x^2 + 2$ и точка $x_0 = 1$. Для любого приращения независимой переменной Δx выделить главную часть приращения функции. Оценить абсолютную величину разности между приращением функции и ее дифференциалом в данной точке, если: а) $\Delta x = 0{,}1$; б) $\Delta x = 0{,}01$. Сравнить эту разность с абсолютной величиной дифференциала функции.

Ответ: а) $\varepsilon = |\triangle y - dy| = 0{,}011$, $\dfrac{\varepsilon}{|dy|} \cdot 100\% = 11\%$;

б) $\varepsilon = 0{,}000101$, $\dfrac{\varepsilon}{|dy|} \cdot 100\% = 1{,}01\%$.

2. Найти дифференциалы следующих функций:

   а) $y = x^2 tg^3 x$; б) $y = \sqrt{arctg^3 x} + (\arcsin x)^4$; в) $y = \ln\left(x + \sqrt{4 + x^2}\right)$.

3. Найти приближенное значение функции $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ при $x = 1{,}03$ с точностью до двух знаков после запятой.
   Ответ: 5,00.

4. Найти приближенное значение $\sqrt[4]{17}$ с точностью до двух знаков после запятой.
   Ответ: 2,03.

5. Вычислить приближенное значение функции $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ при $x = 0{,}98$ с точностью до двух знаков после запятой.
   Ответ: 2,02.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти дифференциал:

I	а) $y = \left(x^3 + 6x\right)\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$; б) $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right) \cdot tg^3 \dfrac{1}{3} x$;
II	а) $y = \sqrt{4 - 5x^2}\, arctg\left(3 + 4x^3\right)$; б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}} \cdot ctg^2 \dfrac{x^3}{2}$;
III	а) $y = e^{3 - x^2} \cdot \sin\dfrac{x}{2}$; б) $y = \sqrt{5 - 3x^3} \cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
IV	а) $y = 2^{1 - 4x^2} \cdot \cos\dfrac{1}{x}$; б) $y = \ln\left(1 - 4x^2\right) \cdot \sqrt{3x^2 - 5x}$.

2. С помощью дифференциала приближенно вычислить данные величины и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).

I	а) $\sqrt{15}$; б) $ctg 46^\circ$;
II	а) $e^{0,2}$; б) $tg 44^\circ$;
III	а) $\ln 0{,}9$; б) $\cos 59^\circ$;
IV	а) $arctg 1{,}05$; б) $\sin 31^\circ$.

Ответы:

I	а) 3,87; б) 0,865;
II	а) 1,2; б) 0,865;
III	а) –0,045; б) 0,515;
IV	а) 0,81; б) 0,515.

4.4. Производные и дифференциалы высших порядков. Производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков.

Производной второго порядка (второй производной) функции $y=f(x)$ называется производная от ее первой производной, $y''=(y')'$.

Механический смысл второй производной: если $s=s(t)$ - закон движения материальной точки, то $s'(t)$ - скорость, а $s''(t)$ - ускорение этой точки в момент времени t.

Производной n – го порядка функции $y=f(x)$ называется производная от производной (n-1) – го порядка данной функции, $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$.

Дифференциалом второго порядка функции $y=f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции, т.е. $d^2y=d(dy)=f'(x)dx^2$.

Дифференциалом n – го порядка функции $y=f(x)$ называют дифференциал от дифференциала $(n-1)$ - го порядка, $d^ny=d\left(d^{n-1}y\right)=f^{(n)}(x)dx^n$.

Задания для аудиторных занятий

1. Найти вторую производную функцию $y=\left(1+4x^2\right)arctg2x$.
2. Показать, что функция $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ при любых постоянных C_1 и C_2 удовлетворяет уравнению $y''-5y'+6y=0$.
3. Дано уравнение движения точки по оси Ox: $x=100+5t-0{,}001t^3$ (x измеряется в метрах, t – в секундах). Найти скорость v и ускорение a этой точки в моменты времени $t=0$; 1; $10c$.

   Ответ: $v=5$; 4,997; $4{,}7\frac{м}{сек}$, $a=0$; -0,006; -0,06$\frac{м}{сек^2}$.
4. Найти вторые производные функций, заданных уравнениями

   а) $\begin{cases} x=t^3+t+1, \\ y=t^3+t^2-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=2\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t. \end{cases}$
5. Вычислить значения второй производной функции y, заданной уравнением $x^4-xy+y^4-1=0$ в точке $M(0{,}1)$.

   Ответ: $-\frac{1}{16}$.
6. Найти производную n – го порядка функции $y=\ln(1+x)$.
7. Найти дифференциал второго порядка функции $y=e^{-x^2}$.

8. Найти дифференциал третьего порядка функции $y=\sin^2 2x$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти y' и y''.

I	а) $x^2y^2+x=5y$; б) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\ln t; \end{cases}$
II	а) $xy^2-y^3=4x-5$; б) $\begin{cases} x=6t^2-4, \\ y=3t^5; \end{cases}$
III	а) $x^4+x^2y^2+y=4$; б) $\begin{cases} x=t^4, \\ y=\ln t; \end{cases}$
IV	а) $x^3+y^3=5x$; б) $\begin{cases} x=5\cos^2 t, \\ y=3\sin^2 t. \end{cases}$

Ответы:

I	а) $y'=\dfrac{1+2xy^2}{5-2x^2y}$; б) $\begin{cases} y'_x=\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}, \\ x=\arcsin t; \end{cases}$ $\begin{cases} y''_{xx}=\dfrac{t^2+t-1}{t^2}, \\ x=\arcsin t; \end{cases}$
II	а) $y'=\dfrac{4-y^2}{2xy-3y^2}$; $y''=\dfrac{\left(y^2-4\right)\left(3y^2+4\right)}{y^3\left(2x-3\right)^2}$; б) $\begin{cases} y'_x=\dfrac{5t^3}{4}, \\ x=6t^2-4; \end{cases}$ $\begin{cases} y''_{xx}=\dfrac{5t}{16}, \\ x=6t^2-4. \end{cases}$
III	а) $y'=-\dfrac{4x^3+2xy^2}{2x^2y+1}$; б) $\begin{cases} y'_x=-\dfrac{1}{4t^4}, \\ x=t^4; \end{cases}$ $\begin{cases} y''_{xx}=-\dfrac{1}{4t^8}, \\ x=t^4. \end{cases}$
IV	а) $y'=\dfrac{5-3x^2}{3y^2}$; $y''=\dfrac{-18xy^3-2\left(5-3x^2\right)^2}{9y^5}$; б) $\begin{cases} y'_x=-\dfrac{3}{5}, \\ x=5\cos^2 t; \end{cases}$ $\begin{cases} y''_{xx}=0, \\ x=5\cos^2 t. \end{cases}$

2. Для данной функции y и аргумента x_0 вычислить $y'''\left(x_0\right)$.

I	$y=\sin\left(x^3+\pi\right)$, $x_0\sqrt[3]{\pi}$;	**III**	$y=\left(7x-4\right)^6$, $x_0=1$;
II	$y=x\sin 2x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;	**IV**	$y=x\,arctgx$, $x_0=2$.

Ответы:

I	$6-27\pi^2$;	**II**	-12;	**III**	1111320;	**IV**	$-\dfrac{16}{5}$.

3. Записать формулу для производной n – го порядка указанной функции.

I	$y=2^x$;	**II**	$y=\cos 3x$;	**III**	$y=\sqrt{x}$;	**IV**	$y=\dfrac{1}{1+x}$.

Ответы:

I	$y^{(n)}=2^x\ln^n 2$;	**II**	$y^{(n)}=3^n\cos\left(3x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$;
III	$y^{(n)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\left(\dfrac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\dfrac{1}{2}-(n-1)\right)\dfrac{\sqrt{x}}{x^n}$;	**IV**	$y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

4. Найти d^3y для данной функции.

I	$y=(4x-3)^5$;	**II**	$y=x\sin 2x$;	**III**	$y=arctgx$;	**IV**	$y=\sin^2 x$.

Ответы:

I	$d^3y=3840(4x-3)^2(dx)^3$;	**II**	$d^3y=-4\big(3\sin 2x+2x\cos 2x\big)(dx)^3$;
III	$d^3y=\dfrac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}(dx)^3$;	**IV**	$d^3y=-4\sin 2x(dx)^3$.

4.5. Правило Лопиталя.

Раскрытие неопределенностей типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Раскрытие неопределенностей типа $(\infty-\infty)$, $(0-\infty)$, $\left(1^\infty\right)$, $\left(\infty^0\right)$, $\left(0^0\right)$.

Теорема. (Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$). Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b), содержащем точку x_0, причем $\varphi'(x)\neq 0$ нигде при $x\in(a,b)$, стремятся к нулю (или $\pm\infty$) при $x\to x_0$ и существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует также $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ и эти пределы равны т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Если частное $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ вновь в точке x_0 дает неопределенность одного из названных видов и $f'(x)$, $\varphi'(x)$ удовлетворяют всем требованиям ранее указанным для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, то можно перейти к отношению вторых производных и т.д.

Произведение функций $f_1(x)\ f_2(x)$, в котором $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=\infty$, дает неопределенность вида $0.\infty$. Однако оно легко преобразуется в частное $\dfrac{f_1(x)}{1/f_2(x)}$ или $\dfrac{f_2(x)}{1/f_1(x)}$ это приводит к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=\infty$, то разность $f_1(x)-f_2(x)$ дает неопределенность $\infty-\infty$. Но она равна $f_1(x)-f_2(x)=f_1(x)\left(1-\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}\right)$.

Тогда, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}=1$, приходим к неопределенности $0.\infty$.

Рассмотрим функцию вида $f(x)^{\varphi(x)}$.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, то имеем неопределенность вида 0^0.
2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, получаем неопределенность вида 1^∞.
3. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, получаем неопределенность вида ∞^0.

Эти неопределенности раскрывают методом логарифмирования. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}=A$. В силу непрерывности логарифмической функции $\lim\limits_{x\to x_0}\ln y=\ln\lim\limits_{x\to x_0} y$.

Тогда $\ln A=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\varphi(x)\ln f(x)\right)$ и неопределенности 1.-3. сводятся к неопределенности $0.\infty$.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to x_0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Обозначим $\lim\limits_{x\to x_0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=A$.

Найдем $\ln A=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\ln\left(e^x+x\right)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+1}{e^x+x}=2$, $A=e^2$.

Задания для аудиторных занятий

1. Найти пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-7x^2+4x+2}{x^3-5x+4}$, Ответ: $\dfrac{7}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+8x-5}{5x^3-9x+13}$, Ответ: 0;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$, Ответ: $\dfrac{4}{9}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\pi-2arctgx\right)\ln x$, Ответ: 0;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$, Ответ: $\dfrac{1}{2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^{\ln x}-x}{x-1}$, Ответ: -1;

ж) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx\right)^{2x-\pi}$, Ответ: 1;

з) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{tg\frac{\pi x}{2a}}$, Ответ: $e^{\frac{2}{\pi}}$.

Задания для индивидуального выполнения

Найти пределы.

I	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)ctgx$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$;
II	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{e^x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{3}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 2x)^{ctgx}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$;
III	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{ctgx}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}$; в) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)tg\dfrac{x}{2}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{ctgx}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$;
IV	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\ln x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

Ответы:

I	а) 0, б) a-b, в) 0, г) –1, д) 1, е) 2;
II	а) 0, б) lna, в) 3, г) $\dfrac{1}{5}$, д) e^{-2}, е) e^2;
III	а) 0, б) 1, в) 1, г) –1, д) e, е) e^3;
IV	а) ∞, б) 1, в) 0, г) 0, д) 1, е) 1.

4.6. Исследование функций с помощью производных. Промежутки монотонности функции. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

Функция $y=f(x)$ называется возрастающей (убывающей) в некотором интервале, если большему значению аргумента из этого интеграла соответствует большее (меньшее) значение функции, т.е. при $x_1<x_2$ выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ $\left(f(x_1)>f(x_2)\right)$.

Признаки возрастания (убывания) функции:

1. Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ на $[a,b]$ возрастает (убывает), то ее производная на этом отрезке $f'(x)\geq 0$ $\left(f'(x)\leq 0\right)$.
2. Если непрерывная на $[a,b]$ и дифференцируемая на (a,b) функция имеет положительную (отрицательную) производную, от она возрастает (убывает) на этом отрезке.

Функция $y=f(x)$ называется неубывающей (невозрастающей) в некотором интервале, если для любых $x_1<x_2$ из этого интервала $f(x_1)\leq f(x_2)$ $\left(f(x_1)\geq f(x_2)\right)$.

Интервалы, в которых функция не убывает или не возрастает, называются интервалами монотонности функции. Характер монотонности функции может изменяется только в тех точках ее области определения, в которых меняется знак первой производной. Точки , в которых первая производная функции обращается в нуль или терпит разрыв, называются критическими. Критические точки разбивают область определения функции на промежутки монотонности.

Точка x_1 (x_2) называется точкой локального максимума (минимума) функции $y=f(x)$, если для любых $\triangle x\neq 0$ выполняется неравенство $f(x_1+\triangle x)<f(x_1)$, $\left(f(x_2+\triangle x)>f(x_2)\right)$.

Точки максимума и минимума называют точками экстремума функции, а значения функции в этих точках – экстремальными значениями.

Если функция в какой – либо точке достигает экстремума, то эта точка всегда является критической. Однако не всякая критическая точка будет точкой экстремума. Для выяснения является ли критическая точка точкой экстремума пользуются достаточными признаками:

Теорема (первый достаточный признак локального экстремума). Функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может самой точки x_0). Если $f'(x)>0$ при $x<x_0$ и $f'(x)<0$ при $x>x_0$, то x_0 - точка максимума. Если $f'(x)<0$ при $x<x_0$ и $f'(x)>0$ при $x>x_0$, то x_0 - точка минимума.

Теорема (второй достаточный признак локального экстремума). Пусть функция $y=f(x)$ дважды дифференцируема и $f'(x_0)=0$. Тогда в точке $x=x_0$ функция имеет локальный максимум, если $f''(x_0)<0$ и локальный минимум, если $f''(x_0)>0$.

Функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a,b]$ может достигать наименьшего или наибольшего значения, либо в критических точках в интервале (a,b), либо на концах отрезка $[a;b]$.

Задания для аудиторных занятий

1. Найти интервалы монотонности функции $y=x^4-2x^2-5$.
   Ответ: убывает в $(-\infty,-1)$ и $(0,1)$, возрастает в $(-1,0)$ и $(1;+\infty)$.
2. Найти интервалы монотонности функции $y=\dfrac{x}{x^2-6x-16}$.
   Ответ: убывает в $(-\infty,-2)$, $(-2,8)$, $(8,+\infty)$.
3. Исследовать на экстремум функцию $y=\sqrt[3]{\left(x^2-6x+5\right)^2}$.
   Ответ: $y_{\min}=0$ при $x=1$ и $x=5$, $y_{\max}=2\sqrt[3]{2}$ при $x=3$.
4. Исследовать на экстремум функцию $y=x-\ln(1+x)$.
   Ответ: $y_{\min}=0$ при $x=0$.
5. Исследовать на экстремум функцию $y=x\ln^2 x$.
   Ответ: $y_{\max}=\dfrac{4}{e^2}$ при $x=e^{-2}$, $y_{\min}=0$ при $x=1$.
6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=2x^3+3x^2-12x+1$ на отрезке $[-1,5]$.
   Ответ: $y_{наим.}=6$ при $x=1$, $y_{наиб.}=266$ при $x=5$.
7. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак вместимостью $V=16\pi\approx 50$ м^3. Каковы должны быть размеры бака (радиус R и высота H), чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала?
   Ответ: $R=2$ м, $H=4$ м.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти интервалы монотонности и точке экстремума функции

I	а) $y=x^3-3x^2-9x+7$; б) $y=x^2(x-12)^2$;
II	а) $y=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{3}x^3$; б) $y=(x-3)\sqrt{x}$;
III	а) $y=x^2(x-3)$; б) $y=x\ln x$;

IV	а) $y=2e^{x^2-4x}$; б) $y=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$.

2. Определить наименьшее и наибольшее значения функции на указанных отрезках.

I	$y=x+3\sqrt[3]{x}$, $[-1;1]$;
II	$y=(x-1)e^{-x}$, $[0;3]$;
III	$y=xe^{x}$; $[-2;0]$;
IV	$y=\dfrac{\ln x}{x}$, $[1;4]$.

3. **I.** Из всех конусов с данной боковой поверхностью S найти тот, у которого объем наибольший.

   Ответ: $R=\sqrt{\dfrac{S}{\pi\sqrt{3}}}$; $H=\sqrt{\dfrac{2S}{\pi\sqrt{3}}}$.

   II. Требуется сделать коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

   Ответ: $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ см.

   III. Проволокой, длина которой ℓ м необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

   IV. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R.

   Ответ: $\dfrac{4R}{3}$.

4.7. Исследование функций с помощью производных. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции.

Кривая, заданная функцией $y=f(x)$, называется выпуклой (вогнутой) в интервале (a,b), если все точки кривой лежат не выше (не ниже) любой ее касательной в этом интервале.

Точка кривой $M\left(x_0,f(x_0)\right)$, отделяющая выпуклой ее часть от вогнутой, называется точкой перегиба.

Теорема (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции). Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $y=f(x)$ отрицательна (положительна), т.е. $f''(x)<0$ $\left(f''(x)>0\right)$, то кривая $y=f(x)$ в этом интервале выпукла (вогнута).

Точка перегиба – точка на кривой, отделяющая вогнутую часть от выпуклой.

Теорема (достаточный признак точки перегиба). Если в точке $x = x_0$ $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе через эту точку производная $f''(x)$ имеет знак, то $(x_0, f(x_0))$ - точка перегиба.

Прямая L называется асимптотой данной кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки M кривой до прямой L стремится к нулю при удалении точки M в бесконечность.

Асимптоты бывают вертикальные и наклонные. Если существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x) = \pm\infty$, т.е. функция имеет бесконечный разрыв, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$.

Если существуют пределы $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$, то прямая $y = kx + b$ - наклонная асимптота кривой $y = f(x)$. При $x \to \pm\infty$ можем придти к двум значениям k. Если имеем одно значение для k, то при $x \to \pm\infty$ можем получить два значения для b.

Задания для аудиторных занятий

1. Найти интервалы вогнутости, выпуклости и точки перегиба графика функции

   а) $y = \ln(1 + x^2)$; б) $y = \sqrt[3]{x + 2}$.

   Ответ: а) $M_1(1; \ln 2)$, $M_2(-1; \ln 2)$; б) $M(-2; 0)$.

2. Найти асимптоты кривых

   а) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$; б) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; в) $y = e^{-x^2 + 2}$.

   Ответ: а) $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$;

   б) $y = -x$ - левая, $y = x$ - правая асимптота;

   в) $y = 0$.

3. Провести полное исследование функции и построить их графики

   а) $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$; б) $y = \sqrt[3]{(x + 3)x^2}$.

Ответ: а) $y_{\min} = 3$ при $x = 1$; точка перегиба; асимптота $x = 0$;

б) $y_{\min} = 0$ при $x = 0$; $y_{\max} = \sqrt[3]{4}$ при $x = -2$; точка перегиба $M(-3; 0)$; асимптота $y = x + 1$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графиков функций.

I	а) $y = (x + 1)^4$, б) $y = -\ln(x^2 - 4x + 5)$;
II	а) $y = \dfrac{1}{x + 3}$, б) $y = e^{-x^2}$;

III	а) $y=\dfrac{x^2}{x^2+12}$, б) $y=\sqrt[3]{(x+3)x^2}$;
IV	а) $y=arctgx-x$, б) $y=\sqrt[3]{4x^3-12x}$.

Ответы:

I	а) $(-\infty;+\infty)$ - вогнут, точек перегиба нет; б) $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$ - вогнут, $(1;3)$ - выпукл, $(1;\ln 2)$, $(3;\ln 2)$ - точки перегиба;
II	а) $(-\infty;-3)$ - выпукл, $(-3;+\infty)$ - вогнут, точек перегиба нет; б) $\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$ - вогнут, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ - выпукл, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ - точки перегиба;
III	а) $\left(-\infty;-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6};+\infty\right)$ - вогнут, $\left(-\sqrt{6};\sqrt{6}\right)$ - выпукл, $\left(-\sqrt{6};\dfrac{1}{3}\right)$; $\left(\sqrt{6};\dfrac{1}{3}\right)$ - точки перегиба; б) $(-\infty;-3)$ - вогнут, $(-3;0)\cup(0;+\infty)$ - выпукл, $(-3;0)$ - точка перегиба;
IV	а) $(-\infty;0)$ - выпукл, $(0;+\infty)$ - вогнут, $(0;0)$ - точка перегиба; б) $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(0;\sqrt{3}\right)$ - выпукл, $\left(-\sqrt{3};0\right)$, $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ - вогнут, $\left(-\sqrt{3};0\right)$, $\left(\sqrt{3};0\right)$, $(0;0)$ - точки перегиба.

2. Найти асимптоты графиков функций

I	а) $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$, б) $y=x+\ln x$;
II	а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+9}$, б) $y=xe^x$;
III	а) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, б) $y=e^{\frac{1}{x}}$;
IV	а) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, б) $y=e^{-x^2}+2$.

Ответы: **I.** а) $x=\pm 2$, $y=1$; б) $x=0$.

II. а) $y=x$, б) $y=0$ - левая асимптота.

III. а) $x=-1$, $y=\dfrac{1}{2}x-1$; б) $x=0$, $y=1$;

IV. а) $x=\pm 1$, $y=-x$ - левая асимптота, $y=x$ - правая; б) $y=2$.

3. Провести полное исследование функций и построить их графики:

I	а) $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$; б) $y=x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$;
II	а) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; б) $y=\ln(x^2+2x+2)$;
III	а) $y=\dfrac{(x+3)^2}{x-4}$; б) $y=e^{2x-x^2}$;
IV	а) $y=\dfrac{x^2}{2-x}$; б) $y=-\ln(x^2-4x+5)$.

Ответы: I. а) $y_{\min}=4{,}5$ при $x=-3$, $y_{\max}=-4{,}5$ при $x=3$; точка перегиба $M(0;0)$, асимптоты $x=\pm\sqrt{3}$ и $y=-x$.

б) $y_{\min}=-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ при $x=-1$; $y_{\max}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ при $x=1$; точки перегиба $M_1(-\sqrt{3};\ -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}})$, $M_2(\sqrt{3};\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}})$; асимптота $y=0$.

II. а) $y_{\min}=-1$ при $x=0$; точка перегиба $M(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{8}{9})$ асимптоты $x=1$, $y=0$.

б) $y_{\min}=0$ при $x=-1$, точки перегиба $M_1(-2;\ln 2)$, $M_2(0;\ln 2)$.

III. а) $y_{\min}=28$ при $x=11$, $y_{\max}=0$ при $x=-3$; асимптоты $x=4$, $y=x+10$;

б) $y_{\max}=e$ при $x=1$; точки перегиба $M_1(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2};\sqrt{e})$, $M_2(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};\sqrt{e})$.

IV. а) $y_{\min}=0$ при $x=0$, $y_{\max}=-8$ при $x=4$; асимптоты $x=2$; $y=-x-2$.

б) $y_{\max}=0$ при $x=2$; точки перегиба $M_1(1;\ln 2)$, $M_2(3;\ln 2)$.

Глава 5. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

5.1. Дифференцирование функций нескольких переменных. Область определения функции нескольких переменных. Частные производные. Производная по направлению. Градиент.

Переменная величина *z* называется однозначной функцией двух переменных *x* и *y*, если каждой совокупности их значений *(x, y)* из данной области *D* соответствует единственное определенное значение *z*.

Функциональную зависимость *z* от *x* и *y* записывают в виде: $z = f(x,y)$. Область D называется областью определения (существования) функции.

Линией уровня функции $z = f(x,y)$ называется линия $f(x,y) = c$ на плоскости xOy, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $z = c$.

Поверхностью уровня функции $u = f(x,y,z)$ называется поверхность $f(x,y,z) = c$, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $u = c$.

Частной производной от функции $z = f(x,y)$ по независимой переменной *x* называется производная $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x, y) - f(x,y)}{\triangle x} = f'_x(x,y)$, вычисленная при постоянном *y*.

Частной производной от функции $z = f(x,y)$ по *y* называется производная $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\triangle y \to 0} \frac{f(x, y+\triangle y) - f(x,y)}{\triangle y} = f'_y(x,y)$, вычисленная при постоянном *x*.

Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема, то производная этой функции в точке P_0 в направлении $\overline{e}$ вычисляется по формуле $\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha$, где α - угол, образованный вектором $\overline{e}$ с осью *Ox*.

Для функции трех аргументов $u = f(x,y,z)$ справедлива формула $\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, где α, β, γ - углы между направлением $\overline{e}$ и соответствующими координатами осями.

Градиентом функции $u = f(x,y,z)$ называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются частные производные данной функции $grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}$.

Для функции $z = f(x,y)$: $grad z = \frac{\partial z}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\overline{j}$.

Производная в данном направлении равна проекции градиента функции на направлении дифференцирования $\frac{\partial z}{\partial e} = np_{\bar{e}} gradz$.

Градиент функции в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии уровня функции. Направление градиента функции в данной точке, есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке.

Градиент функции $u = f(x, y, z)$ в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.

Задания для аудиторных занятий

1. Найти и изобразить области существования следующих функций:

   а) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$; б) $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$; в) $z = \ln\left(x^2 + y\right)$;

   г) $z = \arccos\frac{x}{x+y}$; д) $z = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$; е) $z = y\sqrt{\cos x}$;

   ж) $u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$; з) $u = \ln\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)$.
2. Построить линии уровня данных функций:

   а) $z = \frac{y}{x^2}$; б) $z = x^2 - y^2$; в) $z = \frac{2x}{x^2 + y^2}$.
3. Найти поверхности уровня функций:

   а) $u = x^2 + z^2 - y^2$; б) $u = x^2 + y^2 + z^2$.
4. Найти частные производные функций:

   а) $z = x^3 + y^3 - 3axy$; б) $z = \frac{x^2}{y^3} - \frac{x}{y}$; в) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; г) $z = e^{\sin\frac{y}{x}}$;

   д) $z = 2^{xy\left(x^2 + y^2\right)}$; е) $z = \arcsin\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$; ж) $u = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2}$; з) $u = z^{xy}$.
5. Показать, что $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$, если $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$.
6. Найти производные следующих функций в заданных точках по заданному направлению.

   а) $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $P(1;1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла;

   б) $u = xy + yz + zx$ в точке $M(2;1;3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(5;5;15)$.

   Ответ: а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{22}{13}$.
7. Найти стационарные точки следующих функций

а) $z=x^2+xy+y^2-4x-2y$; б) $u=2x^2-4xy+y^2-2yz+6z$.

Ответ: а) $(2;0)$; б) $(3;3;-3)$.

8. Найти градиент функции в точке M_0, если

   а) $z=x^2+y^2-3xy$, $M_0(2;1)$; б) $u=x^2+y^2+z^2$, $M_0(2;-2;1)$.

   Ответ: а) $\vec{i}-2\vec{j}$; б) $4\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$.

9. Найти величину наибольшего подъема поверхности $z=x^2+4y^2$ в точке $M_0(2;1;8)$.

   Ответ: 9.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти и изобразить область существования следующих функций:

I	а) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$; б) $z=\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{y}$; в) $z=\arcsin(x+y)$; г) $u=\dfrac{1}{\ln\left(4-x^2-y^2-z^2\right)}$;
II	а) $z=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$; б) $z=\dfrac{2}{x^2+y^2}$; в) $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}$; г) $u=\sqrt{x+y+z}$;
III	а) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$; б) $z=\ln(-x+y)$; в) $z=x+\arccos y$; г) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}$;
IV	а) $z=y+\sqrt{x^2+y^2-9}$; б) $z=\ln\left(x+y^2\right)$; в) $z=\arccos(2x+y)$; г) $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$.

2. Построить линии уровня функций:

I	II	III	IV
$z=x^2-y$	$z=xy$	$z=\dfrac{y}{\sqrt{x}}$	$z=x^2+y^2$.

3. Найти частные производные функций:

I	а) $z=xy+\dfrac{y}{x}$; б) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; в) $z=\arccos\left(y\sqrt{x}\right)$; г) $u=xy^2z^3+3x^2-4yz$;
II	а) $z=\dfrac{2x-y}{x+2y}$; б) $z=xe^{-xy}$; в) $z=\arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; г) $u=\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$;

III	а) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$; б) $z=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; в) $z=arcctg\dfrac{y}{x}$; г) $u=(xy)^z$;
IV	а) $z=\dfrac{x}{3y-2x}$; б) $z=yx\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$; в) $z=arcctg\dfrac{x^2}{y}$; г) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

4. Найти производную функции $z=f(x,y)$ в точке M_1 в направлении вектора $\overline{M_1M_2}$:

I	$z=x^2-xy-2y^2$, $M_1(1;2)$, $M_2(5;5)$;	**II**	$z=x^2+\dfrac{1}{2}y^2$, $M_1(2;-1)$, $M_2(6;2)$;
III	$z=x^3-2x^2y+xy^2+1$, $M_1(1;2)$, $M_2(4;6)$;	**IV**	$z=2x^2-3xy^2+2$, $M_1(-2;1)$, $M_2(1;5)$.

Ответы:

I	II	III	IV
$-\dfrac{27}{5}$	$\dfrac{13}{5}$	1	3

5. Найти производную функции $u=f(x,y,z)$ в точке M_0 в направлении $grad\,u(M_0)$.

I	$u=xyz$, $M_0(1;2;-2)$;	**II**	$u=x^2+2xy-4yz$, $M_0(1;1;-1)$;
III	$u=x^2+y^2-z^2$, $M_0(2;-1;3)$;	**IV**	$u=2y^2+z^2-xy-yz+2x$, $M_0(1;-3;1)$.

Ответы:

I	II	III	IV
$2\sqrt{6}$	$2\sqrt{17}$	$2\sqrt{14}$	$\sqrt{246}$

5.2. Дифференциал функции двух переменных. Дифференциал и его приложения. Производная и дифференциал сложной функции.

Полным дифференциалом функции $z=f(x,y)$ называется главная часть полного приращения $\triangle z$, линейная относительно приращений аргументов $\triangle x$ и $\triangle y$.

Полный дифференциал функции $z=f(x,y)$ вычисляется по формуле

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

При достаточно малых $\triangle x$ и $\triangle y$ для дифференцируемой функции $z=f(x,y)$ имеет место приближенное равенство

$$\triangle z\approx dz \text{ или } f(x+\triangle x,y+\triangle y)\approx f(x,y)+f'_x(x,y)\triangle x+f'_y(x,y)\triangle y.$$

Пусть $z=f(x,y)$, где $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ и функции $f(x,y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дифференцируемы. Тогда производная сложной функции $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ вычисляется по формуле $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$.

Если $z=f(x,y)$, где $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, то частные производные выражаются так: $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$.

Задания для аудиторных занятий

1. Для функции $f(x,y)=x^2y$ найти полное приращение и полный дифференциал в точке $(1;2)$; сравнить их, если: а) $\triangle x=1$, $\triangle y=2$; б) $\triangle x=0{,}1$, $\triangle y=0{,}2$.
2. Найти полные дифференциалы следующих функций:

   а) $z=\ln\left(tg\frac{y}{x}\right)$; б) $z=e^x(\cos y+x\sin y)$; с) $z=yx^y$; д) $u=xyz$; е) $u=\left(xy+\frac{x}{y}\right)^z$
3. Найти $df(3;4;5)$, если $f(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   Ответ: $-\frac{3}{25}dx-\frac{4}{25}dy+\frac{1}{5}dz$.
4. Вычислить приближенно:

   а) $1{,}02^{3{,}97}$; б) $\sqrt{5e^{0{,}01}+2{,}03^2}$; в) $\sin 32^\circ\cdot\cos 59^\circ$.

   Ответ: а) 1,08; б) 3,028; в) 0,273.
5. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=x^y$, где $x=\ln t$, $y=\sin t$.
6. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u=\frac{yz}{x}$, где $x=e^t$, $y=\ln t$, $z=t^2-1$.
7. Найти $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$, где $y=\frac{1}{3}x^3+x$.
8. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=arctg\frac{x}{y}$, где $x=u\sin v$, $y=u\cos v$.
9. Найти dz, если $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$, где $x=uv$, $y=\frac{u}{v}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти полные дифференциалы следующих функций:

I	а) $z=\sin\left(x^2+y^2\right)$; б) $z=\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$; в) $z=tg\dfrac{y^2}{x}$; г) $u=xyz$;
II	а) $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$; б) $z=e^{x+y}\left(x\cos y+y\sin x\right)$; в) $z=ctg\dfrac{2x}{y^2}$; г) $u=xy+yz+zx$;
III	а) $z=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$; б) $z=\left(1+xy\right)^y$; в) $z=arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$; г) $u=x^{yz}$;
IV	а) $z=\sqrt{\ln xy}$; б) $z=x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$; в) $z=\dfrac{1}{arctg\dfrac{y}{x}}$; г) $u=y^{xz^2}$.

2. Вычислить приближенно:

I	**II**	**III**	**IV**
$(1{,}02)^2(0{,}97)^3$	$\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$	$\sqrt{(1{,}02)^3+(1{,}97)^3}$	$(2{,}01)^{3{,}02}$

Ответ:

I	**II**	**III**	**IV**
0,95	4,968	2,95	8,23

3. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если

I	$z=\ln\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, где $x=3t^2$, $y=\sqrt{t^2+1}$;
II	$z=arctg\dfrac{y}{x}$, где $x=e^{2t}+1$, $y=e^{2t}-1$;
III	$z=e^{2x-3y}$, где $x=tgt$, $y=t^2-1$;
IV	$z=3^{4x^2+2y}$, где $x=\cos^2 t$, $y=\sin^2 t$.

4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если

I	$z=x^2\ln y$, где $x=\dfrac{v}{u}$, $y=u^2+v^2$;
II	$z=x^2y-y^2x$, где $x=u\sin v$, $y=v\cos u$;
III	$z=x^2y+yx$, где $x=\dfrac{2v}{u+v}$, $y=u^2-3v$;
IV	$z=y^2tgx$, где $x=u^2+v^2$, $y=\dfrac{u}{v}$.

5.3. Повторное дифференцирование.

Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Дифференцирование неявной функции. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Частными производными второго порядка от функции $z=f(x,y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка.

Они обозначаются:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y);\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и высших порядков.

Смешанные производные, отличающиеся только порядком дифференцирования, равны, если они непрерывны: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$ и т.д.

Дифференциалом второго порядка от функции $z=f(x,y)$ называется дифференциал от ее полного дифференциала, т.е. $d^2z=d(dz)$.

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков: $d^nz=d\left(d^{n-1}z\right)$.

Дифференциалы высших порядков можно вычислять по формулам: $d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$. Символически это равенство можно записать в виде:

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z.$$

Аналогично $d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z$ и т.д.

Производная неявной функции $f(x,y)=0$, где f – дифференцируемая функция переменных x и y может быть вычислена по формуле $y'=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$, при условии, что $f'_y(x,y)\neq 0$.

Производные высших порядков неявной функции можно найти последовательным дифференцированием указанной формулы, рассматривая при этом *y* как функцию от *x.*

Аналогично частные производные неявной функции двух переменных $z=f(x,y)$, заданной с помощью уравнения $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)$ - дифференцируемая функция переменных x, y и z, могут быть вычислены по формулам: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$, при условии, что $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$.

Если уравнение поверхности задано в явной форме $z=f(x,y)$, где $f(x,y)$ дифференцируемая функция, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ поверхности имеет вид: $z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ и уравнение нормали $\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$.

В случае, когда уравнение поверхности задано в неявной форме $F(x,y,z)=0$ и $F(x_0,y_0,z_0)=0$, соответствующие уравнения будут иметь вид

$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$ - уравнение касательной плоскости и

$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$ - уравнение нормали.

Задания для аудиторных занятий.

1. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если а) $z=\ln\left(x^2+y\right)$; б) $z=\sin^2(ax+by)$.
2. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если а) $z=x\sin xy+y\cos xy$; б) $z=arctg\frac{x+y}{1-xy}$.
3. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. а) $z=x^y$; б) $z=e^x(\cos y+x\sin y)$.
4. $z=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.
5. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$, если $z=\cos\left(ax+e^y\right)$.
6. Найти $d^2 z$, если а) $z=e^{xy}$; б) $u=xy+yz+zx$.
7. Найти $d^3 z$, если а) $z=e^x\cos y$; б) $u=xyz$.
8. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от функций, заданных неявно

   а) $x^3y-y^3x+xy=a^3$; б) $ye^x+e^y=0$.

9. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

а) $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$; б) $x^3 + 2y^3 + z^3 - xy - x^2z + 2y + 3 = 0$.

10. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, d^2z, если $z^3 - 3xyz = a^3$.

11. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в указанной точке M_0.

а) $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$, $M_0(1;1;1)$; б) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $M_0(2;2;3)$.

Ответ: а) $5x - 6y + z + 10 = 0$; б) $2x + 2y - 3z + 1 = 0$,

$\frac{x+1}{-5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-1}{-1}$; $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если

I	а) $z = xy + \sin(x+y)$; б) $z = e^{xy^2}$;
II	а) $z = \ln(x^2 + y^2)$; б) $z = e^{x2^y}$;
III	а) $z = \arcsin(xy)$; б) $z = y^{\ln x}$;
IV	а) $z = \ln(x - 2y^2)$; б) $z = e^{x^2 y}$.

2. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$,

I	$z = arctg\frac{y}{x}$;	**III**	$z = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}$;
II	$z = arcctg\frac{x}{y}$;	**IV**	$z = \arcsin\sqrt{\frac{x-y}{x}}$.

3. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

I	$z = \cos(xy)$	**II**	$z = \sin(ax - by^2)$	**III**	$z = \cos(xy^2)$	**IV**	$z = \sin(x + 3y^2)$

4. Найти d^2z, если

I	$z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$	**II**	$z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$	**III**	$z = e^y \sin x$	**IV**	$z = 3\sqrt[3]{\left(x^2 + y^2\right)^2}$

5. Найти d^3u, если

I	$u=x^3+y^3+z^3-3xyz$;	**III**	$u=\ln(x+y+z)$;
II	$u=x^2+y^2+z^2-2xyz$;	**IV**	$u=e^{ax+by+cz}$.

6. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, d^2z, если

I	$ax+by+cz=e^z$;	**III**	$z^2=xy+a$;
II	$xe^y+ye^x+2e^z=a$;	**IV**	$z^3-4xz+y^2-4=0$.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в указанной точке M_0:

I	$4x^2-y^2+z^2=0$, $M_0(-1;2;0)$;	**III**	$z=1+x^2+y^2$, $M_0(1;1;3)$;
II	$z=\ln(x^2+y^2)$, $M(1;0;0)$;	**IV**	$x^2+2y^2+3z^2=9$, $M_0(1;2;0)$.

Ответы:

I	$2x+y=0$, $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{0}$;	**III**	$2x+2y-z-1=0$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$;
II	$2x-z-2=0$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-1}$;	**IV**	$x+4y-9=0$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{0}$.

5.4. Экстремум функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия локального экстремума функции двух переменных. Метод наименьших квадратов.

Если дифференцируемая функция $z=f(x,y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0,y_0)$, то ее частные производные первого порядка равны нулю в этой точке, т.е. $f'_x(x_0,y_0)=0$, $f'_y(x_0,y_0)=0$ (необходимые условия экстремума).

В общем случае в точке экстремума $M_0(x_0,y_0)$ функции $z=f(x,y)$ или $df(x_0,y_0)=0$, или $df(x_0,y_0)$ не существует.

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются стационарными. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Пусть $M_0(x_0,y_0)$ - стационарная точка функции $f(x,y)$ тогда:

а) если $d^2f(x_0,y_0)<0$, то $f(x_0,y_0)$ есть максимум функции $f(x,y)$;

б) если $d^2f(x_0,y_0)>0$, то $f(x_0,y_0)$ есть минимум функции $f(x,y)$;

в) если $d^2f(x_0,y_0)<0$, меняет знак, то $f(x_0,y_0)$ не является экстремумом функции $f(x,y)$.

Эти достаточные условия эквивалентны следующим: пусть $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$ и $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$.

Составим дискриминант $\triangle=AC-B^2$, тогда:

1. если $\triangle>0$, то функция имеет в точке M_0 экстремум, а именно: максимум при $A<0$ (или $C<0$) и минимум при $A>0$ (или $C>0$);
2. если $\triangle<0$, то в точке M_0 экстремума нет;
3. если $\triangle=0$, то требуется дальнейшее исследование.

Для двух функционально связанных величин *x* и *y* известны *n* пар соответствующих значений $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, ..., $(x_n;y_n)$. Будем предлагать, что зависимость между ними выражается линейной функцией $y=ax+b$. Тогда по методу наименьших квадратов наилучшими будут те значения параметров *a* и *b*, которые обращают в минимум сумму

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2.$$

В точке минимума $\begin{cases}\dfrac{\partial s}{\partial a}=0,\\ \dfrac{\partial s}{\partial b}=0;\end{cases}$ или $\begin{cases}a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i,\\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+nb=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i.\end{cases}$

Задания для аудиторных занятий

1. Найти экстремум функций двух переменных:

   а) $z=x^3+3xy^2-15x-12y$; б) $z=e^{x-y}\left(x^2-2y^2\right)$.

   Ответ: а) $z_{\min}(2;1)=-28$, $z_{\max}(-2;-1)=28$;

   б) $z_{\max}(-4;-2)=8e^{-2}$.

2. Найти экстремум функции трех переменных $u=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$.

   Ответ: $u_{\min}\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3};1\right)=-\frac{4}{3}$.

3. Табличные данные

x	19,1	25,0	30,1	36,0	40,0	45,1	50,0
y	76,30	77,80	79,75	80,80	82,35	83,90	85,10

отвечают формуле $y=ax+b$. Найти *a* и *b*.

Ответ: $y=0{,}279x+71{,}14$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти экстремум функции двух переменных

I	$z = x^3 + y^3 - 15xy$;	**III**	$z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$;
II	$z = xy^2(1 - x - y)$;	**IV**	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$;

Ответ:

I	$z_{\min}(5;5) = -125$;	**III**	$z_{\min}\left(0;-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$;
II	$z_{\max}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64}$;	**IV**	$z_{\min} = \left(1;\frac{1}{2}\right) = 0$.

2. По методу наименьших квадратов построить эмпирическую формулу $y = ax + b$, если

	x	0,30	0,90	1,52	2,13	2,74	3,35	3,96
I	**y**	3,29	3,41	3,72	4,25	4,36	4,58	5,23
II	**y**	1,51	1,62	2,25	2,46	2,57	2,97	3,42
III	**y**	3,82	3,55	3,17	3,00	2,52	2,55	2,19
IV	**y**	4,19	4,26	4,44	5,01	5,19	5,36	5,74

Ответ:

I	$y = 0,51x + 3,02$;	**III**	$y = -0,44x + 3,91$;
II	$y = 0,51x + 1,31$;	**IV**	$y = 0,44x + 3,94$.

5.5. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Наибольшие и наименьшие значения функции двух переменных в замкнутой области.

Условным экстремумом функции $f(x,y)$ называется максимум или минимум этой функции, достигнутый при условии, что ее аргументы связаны уравнением $\varphi(x,y) = 0$. Чтобы найти условный экстремум функции $z = f(x,y)$ при условии, что $\varphi(x,y) = 0$, составляют функцию Лагранжа $F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$, где λ - неопределенный постоянный множитель, и ищут обычный экстремум этой вспомогательной функции.

Необходимые условия экстремума сводится к системе трех уравнений:

$$\begin{cases} F'_x(x,y) = 0, \\ F'_y(x,y) = 0, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании изучения знака второго дифференциала $d^2F(x,y)$ функции Лагранжа.

Если функция $F(x,y)$ дифференцируема в ограниченной замкнутой области, то она достигает своего наибольшего (наименьшего) значения в стационарной точке или в граничной точке области.

Задания для аудиторных занятий

1. Определить условные экстремумы функций:
 а) $z = x + 2y$, при $x^2 + y^2 = 5$; б) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, при $x + y + 3 = 0$.
 Ответ: а) $z_{\max}(1;2) = 5$, $z_{\min}(-1;-2) = -5$; б) $z_{\min}\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right) = -\frac{19}{4}$.
2. Определить наибольшее и наименьшее значения функций: а) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$; б) $z = xy^2$ в области $x^2 + y^2 \le 1$.
 Ответ: а) $z_{наиб}(2;-1) = 13$, $z_{наим}(1;1) = z(0;-1) = -1$;
 б) $z_{наиб}\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $z_{наим}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.
3. Найти прямоугольный параллелепипед с данной площадью поверхности S, имеющий наибольший объем.
4. Русла двух рек (в пределах некоторой области) приближенно представляют параболу $y = x^2$ и прямую $x - y - 2 = 0$. Требуется соединить данные реки прямолинейным каналом наименьшей длины. Через какие точки его провести?

Задания для индивидуального выполнения

1. Определить условный экстремум функции

I	$z = xy$ при $2x + 3y - 5 = 0$;	**III**	$z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$;
II	$z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$;	**IV**	$z = z^2 + y^2$ при $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

Ответы:

I	$z_{\max}\left(\frac{5}{4};\frac{5}{6}\right) = \frac{25}{24}$;
II	$z_{\min}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$; $z_{\max}\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$;

III	$z_{\min}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1-2\sqrt{2}$; $z_{\max}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1-2\sqrt{2}$;
IV	$z_{\min}\left(\frac{18}{13};\frac{12}{13}\right)=\frac{36}{13}$.

2. Определить наибольшее и наименьшее значения функции.

I	$z=1+x+2y$ в области $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+y\leq 1$;
II	$z=x^2-xy+y^2-4x$ в области $x\geq 0$, $y\geq 0$, $2x+3y\leq 12$;
III	$z=1+x+2y$ в области $x\geq 0$, $y\leq 0$, $x-y\leq 1$;
IV	$z=xy+x+y$ в области $1\leq x\leq 2$, $2\leq y\leq 3$.

Ответы:

I	$z_{наим}(0;0)=1$, $z_{наиб}(0;1)=3$;
II	$z_{наим}\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right)=-\frac{16}{3}$; $z_{наиб}(0;4)=16$;
III	$z_{наим}(0;-1)=-1$, $z_{наиб}(1;0)=2$;
IV	$z_{наим}(1;2)=5$, $z_{наиб}(2;3)=11$.

Литература

1. Индивидуальные задания по высшей математике: Учебное пособие. В трех частях. Часть 1 / под общей редакцией Рябушко А.П. – Мн., Высш. шк., 2000. – 303 с.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1969. – 256 с.
3. Сборник задач по математике для ВПУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа. / Под редакцией Ефимова А.В., Димидовича Б.П. – М.: Наука, 1981. – 464 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. – М.: Высш. шк., 1997. – 415 с.
5. Сборник задач по высшей математике. Часть 1. / Лунгу К.Н., Письменний Д.Т, Федин С.Н., Шевченко Ю.А. – М.: Айрис – пресс, 2004.-576 с.

Содержание

Учебное издание

Составители:
Лизунова Ирина Владимировна
Денисович Ольга Константиновна
Остапчук Евгений Матвеевич

Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных.

Практикум по дисциплине «Высшая математика»
для студентов технических специальностей.

Редактор Т.В. Строкач
Ответственный за выпуск И.В. Лизунова
Верстка: Кармаш Е.Л.

Подписано в печать 21.12.2006. Формат $60 \times 84\ 1/16$. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. 6,5. Уч. изд. л. 7,0. Тираж 150 экз. Заказ № 1203.

Отпечатано на ризографе УО «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул. Московская, 267.