

- видеть на основе созданной анимации относительный вклад тепловых потерь за счет естественной конвекции и теплового излучения.

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Баренблатт, Г.И. Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг: учебное пособие / Г.И. Баренблатт; пер. с англ. – Долгопродный: Издательский Дом «Интеллект», 2009. – 216 с. ISBN 978-5-91559-017-4.

2. Тепло- и массообмен: учебн. пособие: в 2 ч. / Б.М. Хрусталев [и др.]; под. общ. ред. А.П. Несенчука. – Минск: БНТУ, 2007. – Ч. 1 – 606 с.
3. Тепляков, С. Паттерны проектирования на платформе. NET. – СПб.: Питер, 2015. – 320 с.
4. Петцольд, Ч. Программирование с использованием Microsoft Windows Forms. Мастер-класс / Пер. с англ. – М.: Русская Редакция; СПб.: Питер, 2006. – 432 с.

Материал поступил в редакцию 13.01.2017

#### BEGEL A.N., HLADKOVSKY V.I., PINCHUK A.I. Computer simulation of complex heat self-similar solutions in a bounded domain

The aim of the work was to develop a program to calculate the physical properties of complex heat transfer in natural convection, using data that were obtained during the experimental study of heat transfer. Specially designed program is to display the progress of calculation of physical characteristics, as well as the dynamic plotting of the cylinder heating process.

УДК 517.91: 004.021

Швычкина Е.Н., Вацкель Р.С.

### КОМПЬЮТЕРНЫЙ МЕТОД ПОИСКА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ХЕМОСТАТ-МОДЕЛИ

**Введение.** Модель искусственного биосинтеза описывает процесс выращивания полезной биомассы микроорганизмов (бактерий) в условиях принудительного перемешивания. В лабораторных условиях такой процесс осуществляется в специальных приборах, называемых обычно *хемостатами*. Хемостат представляет собой резервуар, заполненный специальным раствором (субстратом), служащим питательной средой для выращивания полезной культуры микроорганизмов. В простейших моделях хемостата [1] рассматривается конкуренция нескольких видов микроорганизмов, которые питаются одним ограниченным питательным веществом, называемым субстратом.

Математическая модель хемостата, описывающая рост популяции микроорганизмов при проточном культивировании, предложенная Дж. Моно [1], имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = (s_0 - s(t))D - x_1(t)\mu_1(s(t)) - x_2(t)\mu_2(s(t)), \\ \dot{x}_1(t) = (\mu_1(s(t)) - D)x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = (\mu_2(s(t)) - D)x_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

где параметр  $D$  – называется потоком, и он численно равен скорости подачи питательного субстрата в ферментер;  $s(t)$  обозначает плотность питательного субстрата;  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  – плотности микроорганизмов в момент времени  $t$ ;  $\mu_i(s(t))$  ( $i=1,2$ ) – удельная скорость потребления  $i$ -м микроорганизмом субстрата  $s(t)$ ;  $S_0$  – концентрация субстрата в питательном растворе на входе. В работах [1, 2] приведено исследование системы (1) для случая, когда удельная скорость потребления субстрата  $i$ -м микроорганизмом задается при помощи функции Моно:

$$\mu_i(s(t)) = \frac{m_i s(t)}{a_i + s(t)} \quad (i=1,2), \quad (2)$$

где параметры  $a_i$  ( $i=1,2$ ) – постоянные равные концентрации субстрата, при которых удельная скорость роста микроорганизма равна половине максимальной (константы Михаэлиса-Ментен);  $m_i$  ( $i=1,2$ ) – максимальная скорость роста  $i$ -го микроорганизма.

Достаточно полный обзор и обобщения модели хемостата можно найти в монографии [1]. В большинстве работ, посвященных исследо-

ванию математических свойств хемостата, рассматриваются стационарные состояния при различных условиях [1, 2]. Нестационарное поведение хемостата изучалось в [1], где найдено предельное множество траекторий динамики хемостата в одномерном случае.

Существуют также различные модификации системы Михаэлиса-Ментен (1). Наряду с системой (1) рассматриваются системы с периодическими скоростями подачи и смыва питательного субстрата [3]. Также рассматриваются хемостат-модели, в которых взаимодействуют больше чем два микроорганизма, потребляющих лимитированный субстрат.

В работах [4–6] было показано, что в случае, когда коэффициенты Михаэлиса-Ментен удовлетворяют условию  $a_1 = a_2$  интегрирование дифференциальной системы третьего порядка (1) удается свести к интегрированию одного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка. Работы [5, 6] содержат программные модули, которые в зависимости от изменения параметров системы в заданных интервалах моделируют процессы хемостатного культивирования, а также обеспечивают визуализацию этих процессов для каждого микроорганизма. Там же для моделей хемостата Михаэлиса-Ментен (1)–(2) найдены коэффициентные соотношения, при выполнении которых построены двухпараметрические семейства решений в аналитической форме и приведена визуализация этих решений.

**В простейших моделях, когда в хемостате конкурируют две или более популяции эксплуататорским образом для одного лимитируемого субстрата, происходит вымирание всех, кроме одной, популяций.** Перечисленные выше методы показывают, что такое конкурентное исключение имеет место при разнообразии условий в хемостате и его модификаций.

В [1, 7, 9] показано, что если конкуренция перемещается вверх на один уровень, то есть допускается, что некоторые микроорганизмы, участвующие в культивировании, питаются другими микроорганизмами (многоуровневая или трофическая модель), то сосуществование может произойти в форме устойчивого предельного цикла.

Рассмотрим специальный случай модели хемостата [1, 10]. Возьмем в качестве модели простой хемостат, рассмотренный в работах [7, 9], с питательным веществом  $s(t)$  и организмом  $x(t)$ , который потребляет этот субстрат. Добавим хищника  $y(t)$ , который потребляет  $x(t)$ , но не может потреблять субстрат. Эта задача интересна как с

Швычкина Елена Николаевна, к.ф.м.н., доцент, доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.

Вацкель Роман Сергеевич, студент второго курса машиностроительного факультета Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

математической стороны, так и с практической. Например, такой процесс возникает в обработке отходов. Бактерии, представленные как  $x(t)$ , живут на отходах (или субстрат) в то время как другие организмы, такие как инфузории, питаются бактериями.

Используя формулировку Моно (2), которая описывает функциональную зависимость скорости потребления микроорганизмом питательного вещества от времени, для описания скорости потребления питательных веществ, описанная модель примет форму:

$$s'(t) = 1 - s(t) - \frac{m_1 x(t)s(t)}{a_1 + s(t)},$$

$$x'(t) = \left( \frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - 1 - \frac{m_2 y(t)}{a_2 + x(t)} \right) x(t), \quad (3)$$

$$y'(t) = \left( \frac{m_2 x(t)}{a_2 + x(t)} - 1 \right) y(t).$$

$$s(0) = s_0 \geq 0, \quad x(0) = x_0 \geq 0, \quad y(0) = y_0 \geq 0. \quad (4)$$

Константы  $m_1, m_2$  и  $a_1, a_2$  имеют тот же биологический смысл, что и для модели (1). Приведем ниже компьютерную реализацию в СКА *Mathematica* вопроса нахождения, классификации точек покоя и предельных циклов системы (3), а также определения их устойчивости. Определим систему (3).

$$f[u_, i_] := \frac{m_i u}{a_i + u}$$

$$\text{sys1} = \{s'[t] == 1 - s[t] - f[s[t], 1] x[t], x'[t] == (f[s[t], 1] - 1) x[t] - f[x[t], 2] y[t],$$

$$y'[t] == (f[x[t], 2] - 1) y[t];$$

**TraditionalForm[sys1]**

$$\{s'(t) == -\frac{m_1 s(t) x(t)}{a_1 + s(t)} - s(t) + 1,$$

$$x'(t) == x(t) \left( \frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - 1 \right) - \frac{m_2 x(t) y(t)}{a_2 + x(t)},$$

$$y'(t) == y(t) \left( \frac{m_2 x(t)}{a_2 + x(t)} - 1 \right) \}.$$

Сложим три уравнения системы **sys1** и рассмотрим функцию  $\Sigma(t) = 1 + x(t) + y(t) + s(t)$ . Согласно [1]  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t) = 0$  и система (3) может быть записана в виде:

$$\text{sys2} = \{x'[t] == \text{sys1}[[2, 2]], y'[t] == \text{sys1}[[3, 2]]\} / . s[t] \rightarrow (1 - x[t] - y[t]);$$

$$\text{sys3} = \{\text{sys2}[[1, 2]] == 0, \text{sys2}[[2, 2]] == 0\} / . \{x[t] \rightarrow x, y[t] \rightarrow y\}$$

$$\left\{ x \left( -1 + \frac{(-1 + x + y) m_1}{-1 + x + y - a_1} - \frac{y m_2}{x + a_2} \right) == 0,$$

$$y \left( -1 + \frac{x m_2}{x + a_2} \right) == 0 \}.$$

Используя систему двух алгебраических уравнений **sys3**, найдем точки покоя и предельные циклы дифференциальной системы (3), а также определим их локальную. Найдем точки покоя системы (3).

**rP = Solve[sys3, {x, y}] // Simplify**

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow 1 - \frac{a_1}{-1 + m_1}, y \rightarrow 0 \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{a_2}{-1 + m_2}, \right.$$

$$y \rightarrow \frac{1}{2(-1 + m_2)} (a_2(-2 + m_1) + (1 + a_1)(-1 + m_2) + \sqrt{(1 + a_2 m_1 - m_2)^2 + a_1^2(-1 + m_2)^2 + 2a_1(-1 + m_2)(-1 + a_2 m_1 + m_2)}) \},$$

$$\left\{ x \rightarrow \frac{a_2}{-1 + m_2}, y \rightarrow \frac{1}{2(-1 + m_2)} (a_2(-2 + m_1) + (1 + a_1)(-1 + m_2) - \sqrt{(1 + a_2 m_1 - m_2)^2 + a_1^2(-1 + m_2)^2 + 2a_1(-1 + m_2)(-1 + a_2 m_1 + m_2)}) \},$$

$$\{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0\} \}.$$

Система (3) имеет четыре точки покоя. Рассмотрим сначала граничные точки. Для точки  $E_1(0, 0)$  найдем характеристические числа матрицы Якоби системы **sys3**.

**j<sub>1</sub> = {{D[sys3][[1, 1]], x}, D[sys3][[1, 1]], y}},**  
**{D[sys3][[2, 1]], x}, D[sys3][[2, 1]], y}} / . rP[[4];**  
**Eigenvalues[j<sub>1</sub>] // FullSimplify**

$$\left\{ -1, -1 + \frac{m_1}{1 + a_1} \right\}.$$

Предварительно определим соотношения

$$\omega_i = \frac{a_i}{m_i - 1} \quad (i = 1, 2),$$

называемыми *безубыточными концентрациями*. Значения  $\omega_i$ , согласно [1], определяют исход конкуренции в хемостат-модели. В контексте решения нашей задачи желательно, чтобы точка  $E_1(0, 0)$  была неустойчивой. Таким образом, получаем условие на биологические параметры системы (3):  $\omega_1 > 1$  или  $m_1 > 1$ . Из условия  $m_1 > 1$  следует, что граничная точка  $E_2(1 - \omega_1, 0)$  находится на положительной части оси абсцисс и может являться устойчивой или неустойчивой.

**Замечание.** В работе [10] кратко приведена процедура нахождения точек  $E_1$  и  $E_2$ , вычисление характеристических чисел соответствующих Якобианов этим точкам в кодах СКА *Mathematica*. На этом исследование системы (3) заканчивается.

Рассмотрим условия существования внутренней точки покоя, которую обозначим как  $E_c(x_c, y_c)$ . Точка  $E_c$  существует, если ее координаты находятся в первой четверти системы координат  $xOy$ . Из **rP** видно, что  $x_c = \omega_2$ , откуда возникает условие на параметр  $m_2$ , т. е.  $m_2 > 1$ . Используя последнее равенство, найдем матрицу Якоби системы **sys3** в точке  $y_c$

$$\omega[i_] := a_i / (\omega_i - 1)$$

$$j = \{ \{D[\text{sys3}][[1, 1, 2]], x\}, D[\text{sys3}][[1, 1, 2]], y\}, \{D[\text{sys3}][[2, 1, 2]], x\}, D[\text{sys3}][[2, 1, 2]], y\} \} / .$$

**x -> \omega[2] // Simplify.**

При нахождении **j<sub>c</sub>** дифференцировали систему алгебраических уравнений, которая определяет внутреннюю точку  $E_c$ , а именно:

$$\{\text{sys3}[[1, 1, 2]] == 0, \text{sys3}[[2, 1, 2]] == 0\}$$

$$\left\{ -1 + \frac{(-1 + x + y) m_1}{-1 + x + y - a_1} - \frac{y m_2}{x + a_2} == 0,$$

$$-1 + \frac{x m_2}{x + a_2} == 0 \}.$$

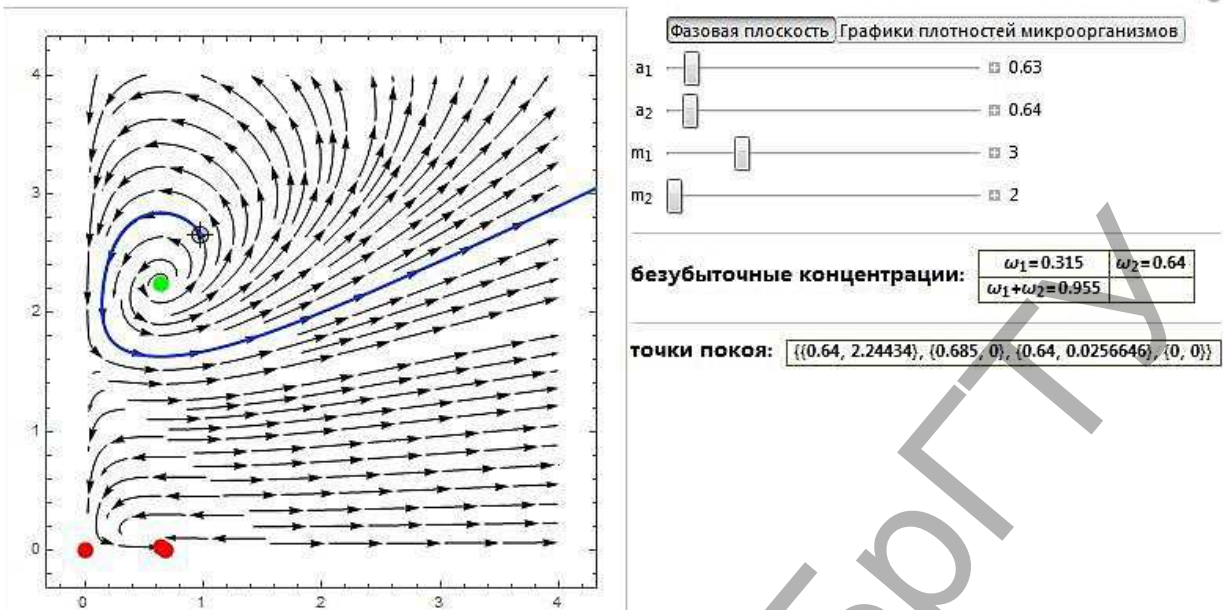


Рисунок 1 – Скриншот программного модуля фазовой плоскости, точек покоя и фазовой траектории с заданными начальными условиями  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$

Действительные части собственных чисел матрицы  $j_c$  имеют одинаковый знак, так как ее определитель при рассмотренных выше условиях на биологические параметры системы (3) является положительным.

**Det[j<sub>c</sub>] // Simplify**

$$\frac{(-1+m_2)^3}{a_2^2 m_2} \left( 1 + \frac{a_1 a_2 m_1 (-1+m_2)}{(1-y+a_1+a_2+(-1+y-a_1)m_2)^2} \right)$$

Устойчивость точки  $E_c$  зависит от следа матрицы  $j_c$ .

**signEgV = Tr[j<sub>c</sub>]**

$$-\frac{a_1 m_1}{\left(-1+y-a_1+\frac{a_2}{-1+m_2}\right)^2} + \frac{y(-1+m_2)^2}{a_2^2 m_2}$$

В [1, 7] сформулирована следующая

**Теорема 1.** Если точка  $E_c$  расположена в первой четверти системы координат  $Oxy$  и если  $signEgV > 0$ , то существует асимптотически устойчивый предельный цикл для системы **sys3**.

Приведем ниже часть листинга программного модуля, написанного в СКА *Mathematica* [9], который находит точки покоя системы **sys3** для различных значений ее параметров системы, а также для задаваемых при помощи локатора начальных условий  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ . Для этого используем встроенную функцию **Manipulate**.

```
Manipulate[Module[{signEgV, sol1, pV, rP, restF, sol}, Switch[cur,
1, LocatorPane[Dynamic[p, {p == #[[1]], #[[2]]}] &],
Dynamic[signEgV = -\frac{a_1 m_1}{(-1+y-a_1+\frac{a_2}{-1+m_2})^2} + \frac{y(-1+m_2)^2}{a_2^2 m_2};
sol1 = NDSolve[{x'[t] ==
-- x[t] ( 1 \frac{m_2 y[t]}{a_2 + x[t]} | m_1 (-1 + x[t] + y[t])},
y'[t] == (-1 + \frac{m_2 x[t]}{a_2 + x[t]}) y[t], x[0] == p[[1]],
y[0] == p[[2]]], {x[t], y[t]}, {t, 0, 10}][[1]];
```

```
...
Delimiter, Dynamic[Grid[{{Style["безубыточные концентрации: ", Bold],
Grid[{{Style[\omega_1 = "\frac{a_1}{m_1 - 1}, Bold], Style[\omega_2 = "\frac{a_2}{m_2 - 1}, Bold]}, {Style[\omega_1 + "\omega_2", Bold]}]}], {Style[\omega_1 + "\omega_2", Bold]}]}],
= r \frac{a_1}{m_1 - 1} + \frac{a_2}{m_2 - 1}, Bold]]],
Frame -> All, FrameStyle -> Brown]]], SynchronousUpdating
-> False], Delimiter, Dynamic[Module[{restP},
restP = NSolve[{x (-1 + \frac{(-1 + x + y) m_1}{-1 + x + y - a_1} - \frac{y m_2}{x + a_2}) ==
== 0, y (-1 + \frac{x m_2}{x + a_2}) = 0}, {x, y};
Grid[{{Style["точки покоя: ", Bold],
Column[{{Table[{{Style[Chop[restP][[t, 1, 2]]], Bold],
Style[Chop[restP][[t, 2, 2]]], Bold}},
{t, 1, Length[restP]}]], Frame -> All,
FrameStyle -> Brown]]], SynchronousUpdating -> False],
ControlPlacement -> Right]
```

В построенном модуле для найденных внутренних точек  $E_c$  проверяется условие теоремы 1 на предмет их локальной устойчивости. Для граничной точки  $E_2(1-\omega_1, 0)$  также осуществляется исследование на вопрос ее устойчивости [7]. В результате получаем следующую визуализацию найденных численных решений (рис. 1).

На скриншоте (рис. 1) показана фазовая кривая зависимости изменения численности популяции хищников  $y(t)$  и популяции жертвы  $x(t)$ . Красными точками отмечены неустойчивые точки покоя, зеленой – внутренняя, устойчивая точка  $(0.64; 0.026)$ , для которой выполнено условие теоремы 1 [1].

Для тех же значений параметров, при переключении кнопки в положение «Графики плотностей микроорганизмов», осуществляется визуализация численных решений функций  $s(t), x(t),$  и  $y(t)$  (рис. 2).

Анализ фазовой плоскости показывает, что может быть до двух стационарных состояний в зависимости значений биологических параметров системы (3). Можно перетащить локатор, чтобы изменить начальные условия. На рисунках 1 и 3 сплошная кривая синего

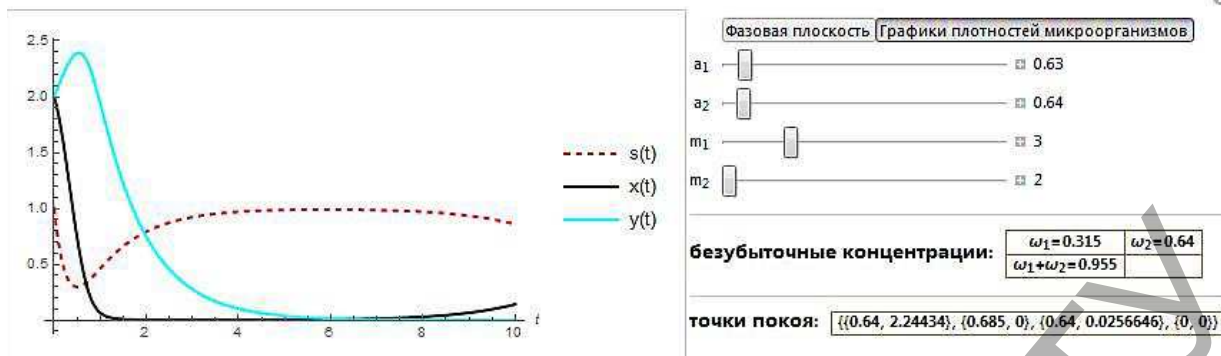


Рисунок 2 – Графики численных решений функций  $s(t)$ ,  $x(t)$ , и  $y(t)$

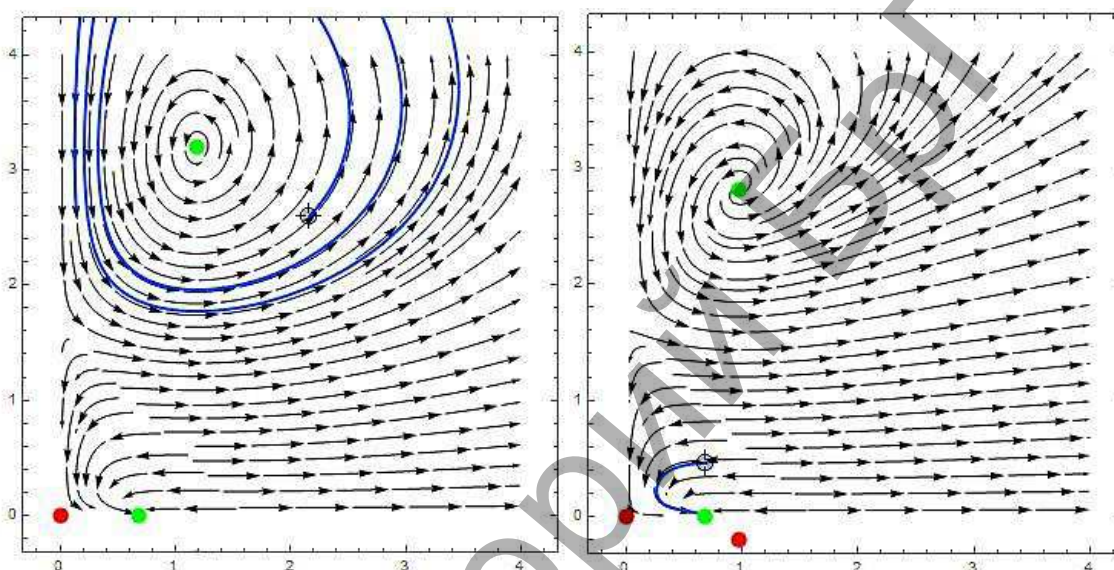


Рисунок 3 – Фазовые траектории при значении параметров  $a_1 = 0.63$ ,  $a_2 = 0.98$ ,  $m_1 = 3$ ,  $m_2 = 2$ , но при различных начальных условиях

цвета является фазовой траекторией, демонстрирующей параметрическую зависимость изменения  $y(t)$  от  $x(t)$ . На рисунке 3 показано, что при изменении положения локатора, при различных начальных условиях  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ , принципиально изменяется характер фазовой траектории.

**Заключение.** В работе представлена программная реализация теоретического метода, рассмотренного в работах [1, 7, 9]. Используя построенный программный модуль, удастся осуществить визуализацию и численное моделирование решений дифференциальной системы (3) для разных значений биологических параметров  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  и начальных условий  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ . Описан программный метод исследования стационарных точек системы **sys3** на локальную устойчивость.

**СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Smith, H.L. The theory of chemostat: dynamics of microbial competition / H.L. Smith, P. Waltman. – Cambridge University Press, 1995. – 313 p.
2. Перт, Д.С. Основы культивирования микроорганизмов и клеток / Д.С. Перт; под ред. проф. И.Л. Работновой. – М.: Мир, 1978. – 331 с.
3. Pilyugin, S.S. Competition in the unstirred chemostat with periodic input and washout / P. Waltman // SIAM J. Appl. Math. – 1999. – Vol. 59, № 4. – P. 1157–1177.

4. Chichurin, A. Numerical research of the chemostat model for the single-nutrient competition / A. Chichurin, H. Shvychkina // Computer Algebra Systems in Teaching and Research: proc. of the 7th International Workshop CASTR'2013, Siedlce, Poland, 22–25 Sep. 2013 / University of Podlasie; Eds.: M. Jakubiak [and others]. – Siedlce, 2013. – Vol. IV, № 1. – P. 130–136.
5. Чичурин, А.В. Компьютерное моделирование двух моделей хемостата для одного питательного ресурса / А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // Вестник БрГТУ: Физика, математика, информатика. – 2013. – Т. 83, № 5. – С. 9–14.
6. Чичурин, А.В. О построении решений с заданными предельными свойствами у систем, описывающих модели хемостата / А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // Весці НАН Беларусі. – 2014. – № 1: Сер. фіз.-мат. навук. – С. 69–76.
7. Kuang, Y. Limit cycles in a chemostat-related model / Y. Kuang // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1989. – № 49. – P. 1759–1767.
8. Wagon, S. *Mathematica in action: problem solving through visualization and computation* / S. Wagon. – 3rd ed. – New York: Springer, 2010. – 578 p.
9. Waltman, P. Competition models in population biology / P. Waltman. – Society for Industrial Mathematics, 1987. – 88 p.
10. Abell, M.L. *Differential Equations with Mathematica* / M.L. Abell, J.P. Braselton. – 3rd ed. – Elsevier Academic press, 2004. – 876 p.

Материал поступил в редакцию 06.01.2017

This paper presents a method for a computer study of nonlinear partial differential third-order system, which describes the interaction between microorganisms long food chain. Competition is based on the principle in which the "predator" consumes "prey", and it consumes a substrate. Using the capabilities of CAS *Mathematica*, we have studied the rest point in terms of their character and stability. Visualization of numerical solutions and their phase trajectories are considered.

УДК 517.983+519.6

Матысик О.В., Сидак С.В.

## РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ I РОДА

1. **Постановка задачи.** Будем рассматривать в гильбертовом пространстве  $H$  уравнение

$$Ax = y \quad (1)$$

с ограниченным положительным самосопряженным оператором  $A$ , для которого нуль является собственным значением оператора  $A$  (случай неединственного решения уравнения (1)). Предположим, что при точной правой части  $y$  решение неединственное уравнения (1) существует. Будем искать его с помощью неявного итерационного метода

$$(E + \alpha A^2)x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + 2\alpha Ay, x_0 = 0. \quad (2)$$

2. **Сходимость метода в случае неединственного решения.**

Обозначим через  $N(A) = \{x \in H / Ax = 0\}$ ,  $M(A)$  – ортогональное дополнение ядра  $N(A)$  до  $H$ . Пусть  $P(A)x$  – проекция  $x \in H$  на  $N(A)$ , а  $\Pi(A)x$  – проекция  $x \in H$  на  $M(A)$ . Справедлива

**Теорема 1.** Пусть  $A \geq 0, y \in H, \alpha > 0$ , тогда для итерационного метода (2) верны следующие утверждения:

- а)  $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y, \|Ax_n - y\| \rightarrow I(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$ ;
- б) итерационный метод (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение  $Ax = \Pi(A)y$  разрешимо. В последнем случае  $x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$ , где  $x^*$  – минимальное решение.

Доказательство

Применим оператор  $A$  к (2), получим  $A(E + \alpha A^2)x_n = A(E - \alpha A^2)x_{n-1} + 2\alpha A^2y$ , где  $y = P(A)y + \Pi(A)y$ . Так как  $AP(A)y = 0$ , то получим  $(E + \alpha A^2)(Ax_n - \Pi(A)y) = (E - \alpha A^2)(Ax_{n-1} - \Pi(A)y)$ .

Обозначим  $Ax_n - \Pi(A)y = v_n, v_n \in M(A)$ , тогда  $(E + \alpha A^2)v_n = (E - \alpha A^2)v_{n-1}$ . Отсюда

$$v_n = (E + \alpha A^2)^{-1}(E - \alpha A^2)v_{n-1}, \quad \text{следовательно,}$$

$$v_n = (E + \alpha A^2)^{-n}(E - \alpha A^2)^n v_0. \quad \text{Имеем } A \geq 0 \text{ и } A\text{-положителен в } M(A), \text{ т. е. } (Ax, x) > 0 \quad \forall x \in M(A). \text{ Так как}$$

$\alpha > 0$ , то  $\|(E + \alpha A^2)^{-1}(E - \alpha A^2)\| \leq 1$ . Поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \|(E + \alpha A^2)^{-n}(E - \alpha A^2)^n v_0\| = \left\| \int_0^{\|A\|} \left( \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right)^n dE_\lambda v_0 \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \int_0^\varepsilon \left( \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right)^n dE_\lambda v_0 \right\| + \left\| \int_\varepsilon^{\|A\|} \left( \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right)^n dE_\lambda v_0 \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \int_0^\varepsilon dE_\lambda v_0 \right\| + q^n(\varepsilon) \left\| \int_\varepsilon^{\|A\|} dE_\lambda v_0 \right\| \leq \|E_\varepsilon v_0\| + q^n(\varepsilon) \|v_0\| \rightarrow 0$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Здесь  $\left| \frac{1 - \alpha \lambda^2}{1 + \alpha \lambda^2} \right| \leq q(\varepsilon) < 1$  при

$\lambda \in [\varepsilon, \|A\|]$ . Следовательно,  $v_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , откуда

$Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$  и  $\Pi(A)y \in A(H)$ . Отсюда

$$\|Ax_n - y\| \rightarrow \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y) \text{ см. [1, 2].}$$

Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение  $Ax = \Pi(A)y$  разрешимо. Из сходимости  $\{x_n\} \in H$  к  $z \in H$  из а) следует, что  $Ax_n \rightarrow Az = \Pi(A)y$ , следовательно,  $\Pi(A)y \in A(H)$  и уравнение  $\Pi(A)y = Ax$  разрешимо.

Пусть теперь  $\Pi(A)y \in A(H)$  (уравнение  $\Pi(A)y = Ax$  разрешимо), следовательно,  $\Pi(A)y = Ax^*$ , где  $x^*$  – минимальное решение уравнения  $Ax = y$  (оно единственно в  $M(A)$ ). Тогда (2) примет вид

$$(E + \alpha A^2)x_n = (E - \alpha A^2)x_{n-1} + 2\alpha \Pi(A)y = (E - \alpha A^2)x_{n-1} + 2\alpha A^2x^* = (E + \alpha A^2)x_{n-1} - 2\alpha A^2x_{n-1} + 2\alpha A^2x^* = (E + \alpha A^2)x_{n-1} + 2\alpha A^2(x^* - x_{n-1}).$$

Отсюда  $x_n = x_{n-1} + 2\alpha A^2(E + \alpha A^2)^{-1}(x^* - x_{n-1})$ . Последнее равенство разобьем на два

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + 2\alpha(E + \alpha A^2)^{-1}A^2P(A)(x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0;$$

$$\begin{aligned} \Pi(A)x_n &= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha(E + \alpha A^2)^{-1}A^2\Pi(A)(x^* - x_{n-1}) = \\ &= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha(E + \alpha A^2)^{-1}A^2(\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1}) = \\ &= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha(E + \alpha A^2)^{-1}A^2(x^* - \Pi(A)x_{n-1}), \end{aligned}$$

так как  $x^* \in M(A)$ . Обозначим  $\alpha_n = \Pi(A)x_n - x^*$ , тогда из равенства

**Матысик О.В.**, к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и технологий программирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина.

**Сидак С.В.**, ассистент кафедры ИиПМ Брестского государственного технического университета, магистрант специальности «Математика» Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина.

Беларусь, БрГУ им. А.С. Пушкина, 224016, бульвар Космонавтов 21.