SHVYCHKINA A.N., VATSKEL R.S. Computer search method of limit cycles the chemostat model

This paper presents a method for a computer study of nonlinear partial differential third-order system, which describes the interaction between microorganisms long food chain. Competition is based on the principle in which the "predator" consumes "prey", and it consumes a substrate. Using the capabilities of CAS *Mathematica*, we have studied the rest point in terms of their character and stability. Visualization of numerical solutions and their phase trajectories are considered.

УДК 517.983+519.6

Матысик О.В., Сидак С.В.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ I РОДА

1. Постановка задачи. Будем рассматривать в гильбертовом пространстве H уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с ограниченным положительным самосопряженным оператором A, для которого нуль является собственным значением оператора A (случай неединственного решения уравнения (1)). Предположим, что при точной правой части y решение неединственное уравнения (1) существует. Будем искать его с помощью неявного итерационного метода

$$\left(E+\alpha A^2\right)x_{n+1} = \left(E-\alpha A^2\right)x_n + 2\alpha Ay,\; x_0 = 0\,. \tag{2}$$

2. Сходимость метода в случае неединственного решения. Обозначим через $N(A) = \{x \in H \,/\, Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 1. Пусть $A \ge 0, y \in H, \alpha > 0$, тогда для итерационного метода (2) верны следующие утверждения:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y, \|Ax_n - y\| \to I(A,y) = \inf\limits_{x\in H}\|Ax - y\|$;

б) итерационный метод (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. В последнем случае $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, где x^* – минимальное решение.

Доказательство

Применим оператор A к (2), получим $A\left(E+\alpha A^2\right)x_n = A\left(E-\alpha A^2\right)x_{n-1} + 2\alpha A^2 y$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то получим $\left(E+\alpha A^2\right)(Ax_n - \Pi(A)y) = \left(E-\alpha A^2\right)(Ax_{n-1} - \Pi(A)y)$.

Обозначим $Ax_n - \Pi(A)y = v_n, v_n \in M(A)$, тогда $\left(E+\alpha A^2\right)v_n = \left(E-\alpha A^2\right)v_{n-1}$. Отсюда $v_n = \left(E+\alpha A^2\right)^{-1}\left(E-\alpha A^2\right)v_{n-1}$, следовательно, $v_n = \left(E+\alpha A^2\right)^{-n}\left(E-\alpha A^2\right)^n v_0$. Имеем $A \ge 0$ и A-положителен в $M(A)$, т. е. $(Ax,x) > 0 \;\; \forall x \in M(A)$. Так как $\alpha > 0$, то $\left\|\left(E+\alpha A^2\right)^{-1}\left(E-\alpha A^2\right)\right\| \le 1$. Поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \left\|\left(E+\alpha A^2\right)^{-n}\left(E-\alpha A^2\right)^n v_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|}\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n dE_\lambda v_0\right\| \le$$

$$\le \left\|\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n dE_\lambda v_0\right\| + \left\|\int_\varepsilon^{\|A\|}\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n dE_\lambda v_0\right\| \le$$

$$\le \left\|\int_0^{\varepsilon} dE_\lambda v_0\right\| + q^n(\varepsilon)\left\|\int_\varepsilon^{\|A\|} dE_\lambda v_0\right\| \le \|E_\varepsilon v_0\| + q^n(\varepsilon)\|v_0\| \to 0$$

при $\varepsilon \to 0, n \to \infty$. Здесь $\left|\dfrac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right| \le q(\varepsilon) < 1$ при $\lambda \in \left[\varepsilon, \|A\|\right]$. Следовательно, $v_n \to 0, n \to \infty$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Отсюда $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A,y)$ см. [1, 2]. Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2) примет вид

$$\left(E+\alpha A^2\right)x_n = \left(E-\alpha A^2\right)x_{n-1} + 2\alpha A\Pi(A)y = \left(E-\alpha A^2\right)x_{n-1} +$$
$$+2\alpha A^2x^* = \left(E+\alpha A^2\right)x_{n-1} - 2\alpha A^2 x_{n-1} + 2\alpha A^2 x^* =$$
$$= \left(E+\alpha A^2\right)x_{n-1} + 2\alpha A^2\left(x^* - x_{n-1}\right).$$

Отсюда $x_n = x_{n-1} + 2\alpha A^2\left(E+\alpha A^2\right)^{-1}\left(x^* - x_{n-1}\right)$. Последнее равенство разобьем на два

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha A^2\right)^{-1}A^2P(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) =$$
$$= P(A)x_{n-1} = P(A)x_0;$$

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha A^2\right)^{-1}A^2\Pi(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) =$$
$$= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha A^2\right)^{-1}A^2\left(\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right) =$$
$$= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha A^2\right)^{-1}A^2\left(x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right),$$

так как $x^* \in M(A)$. Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда из равенства

***Матысик О.В.,** к.ф-м.н., доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и технологий программирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина.*

***Сидак С.В.,** ассистент кафедры ИиПМ Брестского государственного технического университета, магистрант специальности «Математика» Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина.*

Беларусь, БрГУ им. А.С. Пушкина, 224016, бульвар Космонавтов 21.

$$\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* +$$
$$+2\alpha\left(E+\alpha A^2\right)^{-1}A^2\left(x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right)$$

получим

$$\omega_n = \omega_{n-1} - 2\alpha\left(E+\alpha A^2\right)^{-1}A^2\omega_{n-1} =$$
$$= \left(E+\alpha A^2\right)^{-1}\left(E-\alpha A^2\right)\omega_{n-1}$$

и, аналогично v_n, можно показать, что $\omega_n \to 0, n \to \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + +\Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$, ч. т. д.

Замечание 1. Так как у нас $x_0 = 0$, то $x_n \to x^*$, т. е. итерационный метод (2) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

3. Сходимость метода в энергетической норме. Ниже предполагается, что нуль не является собственным значением оператора A, следовательно, уравнение (1) имеет единственное решение. Однако нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, значит, некорректна. Для отыскания её решения используем метод (2). Правую часть уравнения (1), как это обычно бывает на практике, считаем известной приближенно, то есть вместо y известно δ – приближение y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Тогда итерационный процесс (2) запишется в виде

$$\left(E+\alpha A^2\right)x_{n+1,\delta} = \left(E-\alpha A^2\right)x_{n,\delta} + 2\alpha A y_\delta, x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

Сходимость процессов (2) и (3) в исходной норме пространства H была рассмотрена в статье [3]. Там показано, что предложенный неявный метод (3) сходится при условии $\alpha > 0$, если число итераций n выбирать в зависимости от уровня погрешности δ так, чтобы $n^{\frac{1}{2}}\delta \to 0$ при $n \to \infty, \delta \to 0$. В предположении, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, получены априорные оценки погрешности и априорный момент останова. В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, затруднительно получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова. И тем не менее, метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться энергетической нормой гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$ (см. [4–5]). Покажем сходимость метода (3) в энергетической норме и получим для него априорные оценки погрешности в энергетической норме. Рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = \left(x - x_n\right) + \left(x_n - x_{n,\delta}\right). \quad (4)$$

Запишем первое слагаемое в виде

$$x - x_n = A^{-1}\left(E+\alpha A^2\right)^{-n}\left(E-\alpha A^2\right)^n y =$$
$$= \left(E+\alpha A^2\right)^{-n}\left(E+\alpha A^2\right)^n x.$$

Как было показано в [3], $x - x_n$ бесконечно мало в исходной норме гильбертова пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для её оценки делалось предположение об истокообразной представимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не понадобится. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и E_λ – соответствующая спектральная функция, имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = \left(A\left(E+\alpha A^2\right)^{-n}\left(E-\alpha A^2\right)^n x, \left(E+\alpha A^2\right)^{-n}\left(E-\alpha A^2\right)^n x\right) =$$
$$= \int_0^M \lambda\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^{2n} d\left(E_\lambda x, x\right).$$

Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^{2n}$ при $\lambda \in [0, M]$.

Функция $f(\lambda)$ – частный случай при $s = 1$ функций, оцененных в [3]. Там показано, что при условии $\alpha > 0$

$\max\limits_{\lambda\in[0,M]}\left|f(\lambda)\right| \le (4n\lambda e)^{-\frac{1}{2}}$.

Следовательно, справедлива оценка $\|x - x_n\|_A^2 \le (4n\alpha e)^{-\frac{1}{2}}\|x\|^2$. Отсюда

$$\|x - x_n\|_A \le (4n\alpha e)^{-\frac{1}{4}}\|x\|.$$

Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокообразной представимости порядка $s = \frac{1}{2}$ для точного решения.

Оценим второе слагаемое в (4). Как показано в [3], справедливо равенство

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E+\alpha A^2\right)^{-n}\left(E-\alpha A^2\right)^n\right](y - y_\delta).$$

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1-\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n\right]^2 d\left(E_\lambda(y-y_\delta), y-y_\delta\right)$$

.

Обозначим через $g(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1-\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n\right]^2$ подынтегральную функцию, а через $g_1(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1-\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n\right]$, тогда $g(\lambda) = g_1(\lambda)\left[1-\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n\right]$. Функция $g_1(\lambda)$ была оценена в [3]. Там показано, что при условии $\alpha > 0$ $g_1(\lambda) \le 4n^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}$.

При этом же условии имеем $\left|\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right| \le 1, \forall\lambda \in [0, M]$, поэтому $1-\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n \le 2$, откуда $g(\lambda) \le 8n^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}$. Таким образом, $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 \le 8n^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}\delta^2$, отсюда $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le 2^{\frac{3}{2}}(n\alpha)^{\frac{1}{4}}\delta, n \ge 1$. Поскольку

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le \|x - x_n\|_A + 2^{\frac{3}{2}}(n\alpha)^{\frac{1}{4}}\delta$$

и $\|x - x_n\|_A \to 0, n \to \infty$,

то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \to 0, n \to \infty$, достаточно, чтобы $n^{\frac{1}{4}}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$.

Итак, доказана

Теорема 2. При условии $\alpha > 0$ итерационный метод (3) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций *n* выбирать из условия $n^{\frac{1}{4}}\delta \to 0$ при $n \to \infty, \delta \to 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3) в энергетической норме

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le (4n\alpha e)^{-\frac{1}{4}}\|x\| + 2^{\frac{3}{2}}(n\alpha)^{\frac{1}{4}}\delta,\ n \ge 1. \qquad (5)$$

Оптимизируем оценку (5) по n. Для этого при заданном δ найдем такое значение числа итераций *n,* при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по n от правой части неравенства (5), получим

$$n_{опт} = 2^{-1}\alpha^{-1}e^{-\frac{1}{2}}\delta^{-2}\|x\|^2. \qquad (6)$$

Подставив $n_{опт}$ в оценку (5), найдем её оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{опт} \le 2^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{8}}\delta^{\frac{1}{2}}\|x\|^{\frac{1}{2}}. \qquad (7)$$

Таким образом, справедлива.

Теорема 3. Оптимальная оценка погрешности для метода (3) при условии $\alpha > 0$ в энергетической норме имеет вид (7) и получается при $n_{опт}$ из (6).

Замечание 2. Из неравенства (7) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α. Но $n_{опт}$ зависит от α и, поскольку на α нет ограничений сверху ($\alpha > 0$), то за счет выбора α можно получить $n_{опт} = 1$, то есть оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первом шаге итераций. Для этого достаточно взять $\alpha_{опт} = 2^{-1}e^{-\frac{1}{2}}\delta^{-2}\|x\|^2$.

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства *H*. Очевидно, для этого достаточно, чтобы при некотором фиксированном $\varepsilon\ (0<\varepsilon<\|A\|)$, было $P_\varepsilon x = 0, P_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, где

$$P_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \lambda dE_\lambda.$$

Так как $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E+\alpha A^2)^{-n}(E-\alpha A^2)^n\right]y_\delta$, то для выполнения последнего из указанных условий должно выполняться условие $P_\varepsilon y_\delta = 0$. Таким образом, если решение x и приближенная правая часть y_δ таковы, что $P_\varepsilon x = 0$ и $P_\varepsilon y_\delta = 0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства H, и, следовательно, для сходимости в исходной норме пространства H не требуется истокопредставимости точного решения.

Для решения уравнений с несамосопряженным или неположительным, но ограниченным оператором A следует перейти к уравнению $A^*Ax = A^*y$. Тогда при приближенном элементе y_δ метод (3) примет вид

$$\left(E+\alpha\left(A^*A\right)^2\right)x_{n+1,\delta} = \left(E-\alpha\left(A^*A\right)^2\right)x_{n,\delta} + 2\alpha A^{*2}Ay_\delta,\ x_{0,\delta} = 0.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Bialy, H. Iterative Behandlung linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166–176.
2. Савчук, В.Ф. Об одном неявном итеративном методе решения операторных уравнений / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49. – № 4. – С. 38–42.
3. Матысик, О.В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявной итерацион-ной процедуры решения линейных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вестник Брестского университета. – 2008. – № 1(30). – С. 15–21.
4. Лисковец, О.А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений I-го рода / О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук // Известия АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. – 1976. – № 2. – С.19–23.
5. Савчук, В. Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50. – № 5. – С. 37–42.

Материал поступил в редакцию 12.09.2017

MATYSIK O.V., SIDAK S.V. Regularization of ill-posed problems in the case of non-uniqueness of the solution of operator equations of the first kind

In the Hilbert space for solving operator equations of type I with affirmative limited and self–conjugate operator the implicite iteration method is proposed. The case of non–uniqueness of solving operator equation is investigated. It is shown, that in this case the iteration method converges to the decision with the minimal norm. In energy norm of Hilbert space for the proposed method convergence is proved and apriori estimations of this method error have been received. Use of energy norm allows to make a method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution of the equation.

УДК 519.6 + 517.983.54

Матысик О.В., Сидак С.В.

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НАХОЖДЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ НЕЯВНОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Введение. В гильбертовом пространстве для решения операторного уравнения первого рода с положительным ограниченным и самосопряженным оператором изучается неявный итерационный метод. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по невязке, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. Рассматриваемым методом решена численная модельная некорректная задача в виде интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

1. Постановка задачи. В действительном гильбертовом пространстве H исследуется операторное уравнение I рода