МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и варианты заданий для студентов экономических специальностей дневной формы обучения

Часть II

Издание 2-ое, исправленное

Брест 2012

УДК 51(075.8)

В учебном пособии предложены задания по разделам «Функции нескольких переменных», «Интегральное исчисление», «Дифференциальные уравнения», «Числовые и функциональные ряды» курса «Высшая математика» для студентов экономических специальностей дневной формы обучения. Приведено подробное решение типовых задач, даны некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения заданий. Издается в 2-х частях. Часть 2.

Составители: Гладкий И.И., доцент,
Каримова Т.И., к.ф.-м.н., доцент,
Кузьмина Е.В., ассистент
Махнист Л.П., к.т.н., доцент,
Наумовец С.Н., ассистент.

Рецензент: Матысик О.В., заведующий кафедрой алгебры и геометрии Учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент.

I. Практические задания по теме: «Функции нескольких переменных»

№1. Найти частные производные второго порядка функции.

1) $z(x,y)=3x^3y^2+2x^2y-4xy^3+5x-15y^2+3$.

2) $z(x,y)=4y^3x^2-5y^2x+3yx^3+3y-5x^2+7$.

3) $z(x,y)=2x^3y^2-2x^3y-4xy^3+5x-2y^3+7$.

4) $z(x,y)=7y^3x^2+3y^2x-yx^3+3y^2-5x^2+1$.

5) $z(x,y)=5x^3y^2-3x^2y+2xy^3-4x+8y^2-4$.

6) $z(x,y)=2y^3x^2-4y^2x+3yx^3-5y+7x^2-6$.

7) $z(x,y)=3x^2y^3-5x^2y+2xy^3+y-4x+7y^2-11$.

8) $z(x,y)=3y^3x^2+5y^2x+2yx^3-7y^2+2x-12$.

9) $z(x,y)=7x^3y^2-4x^2y-7xy^3+2y^2-2x-5$.

10) $z(x,y)=2x^3y^2-3xy+2xy^3-4x^2+4y-5$.

№2. Найти полный дифференциал функции.

1) $z(x,y)=\arccos^3\sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

2) $z(x,y)=\operatorname{arctg}^6\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

3) $z(x,y)=\sin^3\dfrac{\sqrt{y}}{x^4}$.

4) $z(x,y)=\operatorname{ctg}^4\dfrac{y^5}{\sqrt{x}}$.

5) $z(x,y)=\cos^2\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$.

6) $z(x,y)=\arcsin^5\sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

7) $z(x,y)=\operatorname{arcctg}^4\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

8) $z(x,y)=\cos^5\dfrac{\sqrt{x}}{y^3}$.

9) $z(x,y)=\operatorname{tg}^3\dfrac{x^4}{\sqrt{y}}$.

10) $z(x,y)=\sin^3\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$.

№3. Вычислить производную функции $z(x,y)$ в точке M в направлении вектора $\vec{a}$.

1) $z(x,y)=3x^3-3y^2x+3yx^2-1$, $M(1;-2)$, $\vec{a}=(3;-4)$.

2) $z(x,y)=3x^3+4y^2x+6yx^2-3$, $M(2;-1)$, $\vec{a}=(-6;-8)$.

3) $z(x,y)=2x^3-3y^2x-2xy+3x^2+2y+4$, $M(2;-1)$, $\vec{a}=(-4;-3)$.

4) $z(x,y)=x^3-2y^2x+xy+3y^2-x-3y+3$, $M(-1;3)$, $\vec{a}=(12;-5)$.

5) $z(x,y)=x^2+xy+y^2+2x+2y$, $M(1;1)$, $\vec{a}=(3;4)$.

6) $z(x,y)=2y^3-2x^2y+2xy^2-5$, $M(-2;1)$, $\vec{a}=(-4;3)$.

7) $z(x,y)=-3y^3-4x^2y-6xy^2+5$, $M(-1;2)$, $\vec{a}=(-8;-6)$.

8) $z(x,y)=2y^3-3x^2y-2xy+3y^2+2x+15$, $M(-1;2)$, $\vec{a}=(-3;4)$.

9) $z(x,y)=y^3-2x^2y+xy+3x^2-3x-y+5$, $M(3;-1)$, $\vec{a}=(-5;-12)$.

10) $z(x,y)=y^3+3xy^2-2x^2+4x+10y+3$, $M(-1;2)$, $\vec{a}=(4;-3)$.

№4. Исследовать на экстремум функцию.

1) $z(x,y) = 2x^3 + 12xy + 3y^2 - 6x - 12y + 13$.

2) $z(x,y) = -3x^2 - 12xy - 2y^3 + 12x + 6y - 10$.

3) $z(x,y) = 2x^3 - 6xy - 3y^2 - 6x + 6y + 1$.

4) $z(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 12y + 5$.

5) $z(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 - 12x + 1$.

6) $z(x,y) = 2x^3 - 12xy + 3y^2 + 30x - 6y + 6$.

7) $z(x,y) = -3x^2 + 12xy - 2y^3 + 6x - 30y + 1$.

8) $z(x,y) = 2y^3 - 6xy - 3x^2 - 6y + 6x + 10$.

9) $z(x,y) = -3x^2 + 6xy - 2y^3 + 12x + 2$.

10) $z(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 - 36x + 2$.

№5. Используя метод наименьших квадратов, найти линейную зависимость между x и y по данным, приведенным в таблице. Сделать чертеж.

	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1)	x_i	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
	y_i	−9	−7	−2	−1	3	−3	9	11	15	19
2)	x_i	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
	y_i	−9	−8	−4	−4	−1	−8	3	4	7	10
3)	x_i	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
	y_i	−15	−13	−8	−7	−3	−9	3	5	9	13
4)	x_i	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
	y_i	−4	−3	1	1	4	−3	8	9	12	15
5)	x_i	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	y_i	−3	−2	2	2	5	−2	9	10	13	16
6)	x_i	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
	y_i	−9	−7	−2	−1	3	−3	9	11	15	19
7)	x_i	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
	y_i	−6	−4	1	2	6	0	12	14	18	22
8)	x_i	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
	y_i	−4	−4	−1	−2	0	−8	2	2	4	6
9)	x_i	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
	y_i	−4	−3	1	1	4	−3	8	9	12	15
10)	x_i	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	y_i	−4	−3	1	1	4	−3	8	9	12	15

II. Практические задания по теме: «Интегральное исчисление»

№1. Найти неопределенные интегралы:

а)

1. $\int \frac{dx}{\sin^2(3x-4)}$.
2. $\int \sin(2-5x)dx$.
3. $\int e^{7-5x}dx$.
4. $\int \frac{dx}{2-7x}$.
5. $\int 2^{3-4x}dx$.
6. $\int \frac{dx}{\cos^2(2x-3)}$.
7. $\int \cos(3-4x)dx$.
8. $\int e^{-2x+5}dx$.
9. $\int \frac{dx}{5-3x}$.
10. $\int 3^{-5x+2}dx$.

б)

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{25+9x^2}}$.
2. $\int \frac{dx}{16x^2+9}$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$.
4. $\int \frac{dx}{16-25x^2}$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$.
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-25}}$.
7. $\int \frac{dx}{49x^2+25}$.
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$.
9. $\int \frac{dx}{36x^2-25}$.
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-16}}$.

в)

1. $\int \frac{x}{2x^2-1}dx$.
2. $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+9}}dx$.
3. $\int \frac{x}{3x^2-2}dx$.
4. $\int \frac{x}{\sqrt{4x^2-3}}dx$.
5. $\int \frac{x}{3x^2-5}dx$.
6. $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$.
7. $\int \frac{x}{5x^2-3}dx$.
8. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2+2}}dx$.
9. $\int \frac{x}{3x^2+4}dx$.
10. $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2-1}}dx$.

г)

1. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-3}}dx$.
6. $\int \frac{\sqrt{\mathrm{ctg}5x}}{\sin^2 5x}dx$.

2. $\int \frac{\sqrt{\ln(5x-3)}}{5x-3}dx$.

3. $\int tg(5x+3)dx$.

4. $\int ctg(3x+7)dx$.

5. $\int \frac{\sqrt{tg5x}}{\cos^2 5x}dx$.

7. $\int \frac{\sqrt{\arcsin 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}dx$.

8. $\int \frac{\sqrt{arcctg5x}}{1+25x^2}dx$.

9. $\int \frac{\sqrt{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

10. $\int \frac{\sqrt{arctg4x}}{1+16x^2}dx$.

№2. Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \frac{x}{\sqrt{5x-2}}dx$.

2. $\int \frac{x}{\sqrt{3x+5}}dx$.

3. $\int \frac{x}{\sqrt{2x-6}}dx$.

4. $\int \frac{x}{\sqrt{4x+3}}dx$.

5. $\int \frac{x}{\sqrt{6x-4}}dx$.

6. $\int x\sqrt{2x+5}\,dx$.

7. $\int x\sqrt{4x-6}\,dx$.

8. $\int x\sqrt{5x+2}\,dx$.

9. $\int x\sqrt{6x-3}\,dx$.

10. $\int x\sqrt{3x+4}\,dx$.

№3. Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \arcsin 5x\,dx$.

2. $\int arctg\,4x\,dx$.

3. $\int x\cdot\sin 5x\,dx$.

4. $\int x\cdot e^{-2x}dx$.

5. $\int \left(3x^2-4x+2\right)\ln x\,dx$.

6. $\int arcctg\,2x\,dx$.

7. $\int \arccos 3x\,dx$.

8. $\int x\cdot\cos 3x\,dx$.

9. $\int x\cdot e^{-4x}dx$.

10. $\int \left(5+2x-6x^2\right)\ln x\,dx$.

№4. Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \frac{6x-1}{x^2+4x+8}dx$.

2. $\int \frac{3x-1}{x^2+8x+25}dx$.

3. $\int \frac{3x-1}{x^2+2x+5}dx$.

4. $\int \frac{4x-3}{x^2+6x+13}dx$.

5. $\int \frac{2x+5}{x^2+10x+29}dx$.

6. $\int \frac{6x+5}{x^2-4x+20}dx$.

7. $\int \frac{2x-3}{x^2-8x+20}dx$.

8. $\int \frac{2x+3}{x^2-2x+10}dx$.

9. $\int \frac{4x+5}{x^2-6x+18}dx$.

10. $\int \frac{2x+1}{x^2-10x+34}dx$.

№5. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой

1. $f(x) = -x^2 - 4x + 7$, $g(x) = -2x + 4$.
2. $g(x) = x^2 + 4x - 4$, $f(x) = 2x - 1$.
3. $f(x) = -x^2 - 2x + 1$, $g(x) = -3x - 1$.
4. $g(x) = x^2 + 4x + 1$, $f(x) = 3x + 3$.
5. $f(x) = -x^2 + 4x - 4$, $g(x) = 2x - 7$.
6. $g(x) = x^2 - 4x + 2$, $f(x) = -2x + 5$.
7. $f(x) = -x^2 + 2x + 5$, $g(x) = 3x + 3$.
8. $g(x) = x^2 + 2x + 2$, $f(x) = 3x + 4$.
9. $f(x) = -x^2 - 8x - 11$, $g(x) = -4x - 8$.
10. $g(x) = x^2 + 8x + 12$, $f(x) = 2x + 7$.

III. Практические задания по теме: «Дифференциальные уравнения»

№1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а)

1. $\operatorname{tg}x\,dy - y\,dx = 0$.
2. $\sqrt{16 + x^2}\,dy - y\,dx = 0$.
3. $x^2\,dy + y\,dx = 0$.
4. $\left(e^x + 2\right)dy - y e^x\,dx = 0$.
5. $\left(4 + x^2\right)dy - y\,dx = 0$.
6. $\operatorname{ctg}x\,dy + y\,dx = 0$.
7. $\sqrt{x^2 - 25}\,dy - y\,dx = 0$.
8. $\left(x^2 - 9\right)dy - y\,dx = 0$.
9. $\left(e^x - 3\right)dy - y e^x\,dx = 0$.
10. $\sqrt{16 - x^2}\,dy - y\,dx = 0$.

б)

1. $\left(x^2 + 3\right)y' - 2yx = 0$.
2. $\cos^2 x \cdot y' - y = 0$.
3. $(5x + 2)\cdot y' - (5x + 7)y = 0$.
4. $\sqrt{1 + x^2}\cdot y' - xy = 0$.
5. $\left(1 + x^3\right)y' - 3x^2 y = 0$.
6. $\left(x^2 - 4\right)y' - 2yx = 0$.
7. $\sin^2 x \cdot y' + y = 0$.
8. $(3x + 4)y' - y(3x + 7) = 0$.
9. $\sqrt{x^2 + 4}\cdot y' - xy = 0$.
10. $\left(1 + x^4\right)y' - 4x^3 y = 0$.

№2. Найти частное решение дифференциального уравнения:

1. $y' - \dfrac{2}{x}y = 3e^{3x-6}x^2$, $y(2) = 8$.
2. $y' - \dfrac{5}{x}y = 3e^{3x+6}x^5$, $y(-2) = 32$.
3. $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{3e^{3x+6}}{x^2}$, $y(-2) = 1$.

4. $y' - \frac{2}{x}y = 3x^2\cos(3x-6)$, $y(2) = 16$.

5. $y' - \frac{5}{x}y = 6x^5\sin(6x+6)$. $y(-1) = 2$.

6. $y' - \frac{3}{x}y = 2e^{2x-6}x^3$, $y(3) = 54$.

7. $y' - \frac{4}{x}y = 2e^{2x+4}x^4$, $y(-2) = 32$.

8. $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2e^{2x+4}}{x^3}$, $y(-1) = 2$.

9. $y' - \frac{3}{x}y = 2x^3\cos(2x-6)$, $y(3) = 54$.

10. $y' - \frac{4}{x}y = 2x^4\sin(2x-4)$, $y(2) = 32$.

№3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. а) $y'' + 4y' - 12y = 0$, б) $y'' - 4y' + 4y = 0$, в) $y'' + 6y' + 13y = 0$.
2. а) $y'' - 2y' - 15y = 0$, б) $y'' + 8y' + 16y = 0$, в) $y'' - 10y' + 29y = 0$.
3. а) $y'' + 2y' - 8y = 0$, б) $y'' - 14y' + 49y = 0$, в) $y'' + 6y' + 34y = 0$.
4. а) $y'' - 3y' - 10y = 0$, б) $y'' + 10y' + 25y = 0$, в) $y'' - 8y' + 25y = 0$.
5. а) $y'' + 6y' - 16y = 0$, б) $y'' - 6y' + 9y = 0$, в) $y'' + 4y' + 20y = 0$.
6. а) $y'' - 5y' - 14y = 0$, б) $y'' + 22y' + 121y = 0$, в) $y'' - 8y' + 41y = 0$.
7. а) $y'' + y' - 12y = 0$, б) $y'' - 18y' + 81y = 0$, в) $y'' + 4y' + 40y = 0$.
8. а) $y'' - y' - 20y = 0$, б) $y'' + 12y' + 36y = 0$, в) $y'' - 14y' + 53y = 0$.
9. а) $y'' + 4y' - 21y = 0$, б) $y'' - 20y' + 100y = 0$, в) $y'' + 8y' + 20y = 0$.
10. а) $y'' - 3y' - 18y = 0$, б) $y'' + 16y' + 64y = 0$, в) $y'' - 10y' + 34y = 0$.

№4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $y'' + 2y' - 8y = -16x^2 + 16x - 22$.
2. $y'' - y' - 6y = -24x^2 - 2x - 9$.
3. $y'' - 4y' - 5y = -15x^2 + 6x + 10$.
4. $y'' - 6y' - 7y = -14x^2 + 4x + 7$.
5. $y'' + y' - 6y = -24x^2 - 4x + 16$.
6. $y'' + y' - 12y = -24x^2 + 40x - 11$.
7. $y'' - 3y' - 10y = -40x^2 - 4x + 4$.
8. $y'' + 7y' - 8y = -32x^2 + 16x + 35$.
9. $y'' + 4y' - 5y = -25x^2 - 5x + 6$.
10. $y'' - 2y' - 15y = -30x^2 + 7x - 9$.

№5. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $y'' + 2y' - 15y = 16e^{3x}$.
2. $y'' + 6y' + 9y = 8e^{-3x}$.
3. $y'' - 4y' - 12y = 24e^{-2x}$.
4. $y'' - 10y' + 25y = 10e^{5x}$.
5. $y'' - 2y' - 15y = 24e^{5x}$.
6. $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$.
7. $y'' - 2y' - 8y = 18e^{4x}$.
8. $y'' - 8y' + 16y = 6e^{4x}$.
9. $y'' + 3y' - 10y = 14e^{2x}$.
10. $y'' - 6y' + 9y = 10e^{3x}$.

IV. Практические задания по теме: «Числовые и функциональные ряды»

№1. Исследовать сходимость ряда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3+n+6}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+4n+3}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^3+3n+5}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2n+4}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+4n+2}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+4}{n^3+5n+1}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+n+5}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+3n^2+2}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n^3+n+5}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+11}{n^3+3n^2+1}$.

№2. Исследовать сходимость ряда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)\cdot 10^n}{3^{2n-4}}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+7)\cdot 15^n}{2^{4n+1}}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)\cdot 17^{n+2}}{4^{2n-3}}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)\cdot 5^{2n+1}}{3^{3n-4}}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)\cdot 3^{4n-1}}{4^{3n+2}}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)\cdot 7^n}{2^{3n-2}}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)\cdot 3^{2n+4}}{2^{3n}}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)\cdot 8^n}{3^{2n-3}}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)\cdot 2^{2n+1}}{3^n}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)\cdot 11^{2n-2}}{2^{7n+1}}$.

№3. Исследовать сходимость ряда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{3n+1}(n+3)^{n^2}}{14^{3n-2}\cdot n^{n^2}}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n+3}(n+2)^{n^2}}{19^{2n-1}\cdot n^{n^2}}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{4n+3}(n+4)^{n^2}}{10^{4n-2}\cdot n^{n^2}}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^{4n+2}(n+4)^{n^2}}{27^{4n-1}\cdot n^{n^2}}$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^{3n+1}(n+3)^{n^2}}{17^{3n-2}\cdot n^{n^2}}$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}(n+2)^{n^2}}{8^{2n-1}\cdot n^{n^2}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n+1}(n+2)^{n^2}}{13^{2n-3}\cdot n^{n^2}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{5n+2}(n+5)^{n^2}}{20^{5n-1}\cdot n^{n^2}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{5n+2}(n+5)^{n^2}}{11^{5n-3}\cdot n^{n^2}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^{3n+1}(n+3)^{n^2}}{21^{3n-2}\cdot n^{n^2}}$

№4. Исследовать сходимость ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2+2n+73}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+2}{n^2+4n+94}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2+2n+57}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+2}{n^2+4n+114}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2+2n+241}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+3}{n^2+6n+99}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+2}{n^2+4n+136}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+2}{n^2+4n+114}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2+2n+157}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+2}{n^2+4n+186}$.

№5. Найти область сходимости степенного ряда:

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^n(n+2)}$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{5^n(n+3)}$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n+4)}$.

4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$.

5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{10^n(n+8)}$.

6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{7^n(n+4)}$.

7. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{11^n(n+9)}$.

8. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{9^n(n+10)}$.

9. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{12^n(n+7)}$.

10. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{8^n(n+3)}$.

V. Решение практических заданий по теме: «Функции нескольких переменных»

№1. Найти частные производные второго порядка функции

$$z(x,y) = 4y^3x^2 - 6y^2x + 7yx^3 - 2y + 3x^2 - 5.$$

Решение.

Вычислим частные производные первого порядка функции $z(x,y)$:

$$z'_x = \left(4y^3x^2 - 6y^2x + 7yx^3 - 2y + 3x^2 - 5\right)'_x =$$

$$= 4y^3\left(x^2\right)'_x - 6y^2(x)'_x + 7y\left(x^3\right)'_x - 0 + 3\left(x^2\right)'_x - 0 = 8y^3x - 6y^2 + 21yx^2 + 6x;$$

$$z'_y = \left(4y^3x^2 - 6y^2x + 7yx^3 - 2y + 3x^2 - 5\right)'_y =$$

$$= 4\left(y^3\right)'_y x^2 - 6\left(y^2\right)'_y x + 7(y)'_y x^3 - 2(y)'_y + 0 - 0 = 12y^2x^2 - 12yx + 7x^3 - 2.$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(8y^3x - 6y^2 + 21yx^2 + 6x\right)'_x = 8y^3(x)'_x - 0 + 21y\left(x^2\right)'_x + 6(x)'_x =$$

$$= 8y^3 + 42yx + 6;$$

$$z''_{xy} = (z'_x)_y = \left(8y^3x - 6y^2 + 21yx^2 + 6x\right)'_y = 8\left(y^3\right)'_y x - 6\left(y^2\right)'_y + 21(y)'_y x^2 + 0 =$$

$$= 24y^2x - 12y + 21x^2;$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(12y^2x^2 - 12yx + 7x^3 - 2\right)'_x = 12y^2\left(x^2\right)'_x - 12y(x)'_x + 7\left(x^3\right)'_x - 0 =$$

$$= 24y^2x - 12y + 21x^2;$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(12y^2x^2 - 12yx + 7x^3 - 2\right)'_y = 12\left(y^2\right)'_y x^2 - 12(y)'_y x + 0 - 0 =$$

$$= 24yx^2 - 12x.$$

Заметим, что для смешанных частных производных функции второго порядка z''_{xy}, z''_{yx} выполняется соотношение $z''_{xy} = z''_{yx}$.

№2. Найти полный дифференциал функции

$$z(x,y) = \mathrm{tg}^5\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Решение.

Вычисляя частные производные первого порядка функции $z(x,y)$, получим:

$$z'_x = \left(\mathrm{tg}^5\sqrt{\frac{y}{x}}\right)'_x = 5\mathrm{tg}^4\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\left(\mathrm{tg}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)'_x = 5\mathrm{tg}^4\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)'_x =$$

$$=5\mathrm{tg}^4\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\sqrt{y}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'_x=5\mathrm{tg}^4\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\sqrt{y}\cdot\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=-5\,\mathrm{tg}^4\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}},$$

$$z'_y=\left(\mathrm{tg}^5\sqrt{\frac{y}{x}}\right)'_y=5\mathrm{tg}^4\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\left(\mathrm{tg}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)'_y=5\mathrm{tg}^4\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)'_y=$$

$$=5\mathrm{tg}^4\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{y}\right)'_y=5\mathrm{tg}^4\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=5\mathrm{tg}^4\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{xy}}.$$

Тогда полный дифференциал функции равен

$$dz=z'_x\,dx+z'_y\,dy=-5\mathrm{tg}^4\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}dx+5\mathrm{tg}^4\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{xy}}dy.$$

Ответ: $dz=-5\mathrm{tg}^4\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}dx+5\mathrm{tg}^4\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{xy}}dy.$

№3. Вычислить производную функции

$$z(x,y)=y^3+x^2y-xy^2-5x-4y$$

в точке $M(-1;2)$ в направлении вектора $\vec{a}=(12;-5)$.

Решение.

Вычислим частные производные первого порядка функции $z(x,y)$:

$$z'_x=\left(y^3+x^2y-xy^2-5x-4y\right)'_x=0+\left(x^2\right)'_x y-(x)'_x y^2-5(x)'_x-0=2xy-y^2-5;$$

$$z'_y=\left(y^3+x^2y-xy^2-5x-4y\right)'_y=\left(y^3\right)'_y+x^2(y)'_y-x\left(y^2\right)'_y-0-4(y)'_y=$$

$$=3y^2+x^2-2xy-4.$$

Найдем значения частных производных первого порядка функции в точке $M(-1;2)$:

$$z'_x\Big|_{(-1;2)}=\left(2xy-y^2-5\right)\Big|_{(-1;2)}=2\cdot(-1)\cdot2-2^2-5=-13;$$

$$z'_y\Big|_{(-1;2)}=\left(3y^2+x^2-2xy-4\right)\Big|_{(-1;2)}=3\cdot2^2+(-1)^2-2\cdot(-1)\cdot2-4=13$$

Вычислим координаты вектора $\vec{e}$, длина которого равна 1, коллинеарного вектору $\vec{a}$:

$$\vec{e} = \left(e_x; e_y\right) = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}; \frac{a_y}{|\vec{a}|}\right),$$

длина которого равна единице.

Учитывая, что $|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$, получим

$$\vec{e} = \left(e_x; e_y\right) = \left(\frac{12}{13}; \frac{-5}{13}\right).$$

Тогда производная функции $z(x,y) = y^3 + x^2y - xy^2 - 5x - 4y$ в точке $M(-1;2)$ в направлении вектора $\vec{e} = \left(\frac{12}{13}; -\frac{5}{13}\right)$ равна

$$z'_{\vec{e}}\Big|_{(-1;2)} = z'_x\Big|_{(-1;2)} \cdot e_x + z'_y\Big|_{(-1;2)} \cdot e_y = -13 \cdot \frac{12}{13} + 13 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -17.$$

Ответ: $z'_{\vec{e}}\Big|_{(-1;2)} = -17$.

№4. Исследовать функцию $z(x,y) = 2x^3 - 12xy + 3y^2 - 18x - 6y + 3$ на экстремум.

Решение.

Экстремумы функции

$$z(x,y) = 2x^3 - 12xy + 3y^2 - 18x - 6y + 3$$

должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}.$$

Тогда, вычисляя частные производные функции первого порядка:

$$z'_x = \left(2x^3 - 12xy + 3y^2 - 18x - 6y + 3\right)'_x = 2\left(x^3\right)'_x - 12(x)'_x y + 0 - 18(x)'_x - 0 + 0 =$$

$$= 2 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 1 \cdot y - 18 \cdot 1 = 6x^2 - 12y - 18,$$

$$z'_y = \left(2x^3 - 12xy + 3y^2 - 18x - 6y + 3\right)'_y = 0 - 12x(y)'_y + 3\left(y^2\right)'_y - 0 - 6(y)'_y + 0 =$$

$$= -12x \cdot 1 + 3 \cdot 2y - 6 \cdot 1 = -12x + 6y - 6,$$

приходим к системе $\begin{cases} 6x^2 - 12y - 18 = 0, \\ -12x + 6y - 6 = 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 - 2y - 3 = 0, \\ -2x + y - 1 = 0. \end{cases}$

Решая последнюю систему методом подстановки, получим

$$\begin{cases} x^2 - 2(2x+1) - 3 = 0, \\ y = 2x + 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 0, \\ y = 2x + 1. \end{cases}$$

Откуда

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot(-5)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}.$$

Следовательно, $\begin{cases} x = \dfrac{4-6}{2} = -1, \\ y = 2\cdot(-1)+1 = -1, \end{cases}$ или $\begin{cases} x = \dfrac{4+6}{2} = 5, \\ y = 2\cdot 5+1 = 11. \end{cases}$

Таким образом, точки $M_1(-1;-1)$ и $M_2(5;11)$ – критические точки функции.

Вычислим частные производные второго порядка функции $z(x,y)$:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(6x^2 - 12y - 18\right)'_x = 6\left(x^2\right)'_x - 0 - 0 = 6\cdot 2x = 12x,$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(6x^2 - 12y - 18\right)'_y = 0 - 12(y)'_y - 0 = -12\cdot 1 = -12,$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = (-12x + 6y - 6)'_x = -12(x)'_x + 0 - 0 = -12\cdot 1 = -12,$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = (-12x + 6y - 6)'_y = 0 + 6(y)'_y - 0 = 6\cdot 1 = 6.$$

Заметим, что для смешанных частных производных второго порядка z''_{xy}, z''_{yx} выполняется соотношение $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Вычислим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = z''_{xx}\cdot z''_{yy} - z''_{xy}\cdot z''_{yx} = 12x\cdot 6 - (-12)\cdot(-12) = 72x - 144.$$

Тогда в точке $M_1(-1;-1)$ определитель равен

$$\Delta(M_1) = 72\cdot(-1) - 144 = -216 < 0,$$

а в точке $M_2(5;11)$:

$$\Delta(M_2) = 72\cdot 5 - 144 = 360 - 144 = 216 > 0.$$

Так как $\Delta(M_2) > 0$, то в точке M_2 функция достигает экстремума.

Учитывая, что $z''_{xx}(M_2) = z''_{xx}(5;11) = 12x\big|_{M_2} = 12\cdot 5 = 60 > 0$, то в точке M_2 функция имеет минимум.

Заметим, что если в критической точке M выполняется $\Delta(M) > 0$ и $z''_{xx}(M) < 0$, то в этой точке функция имеет максимум.

Вычислим значение функции в точке $M_2(5;11)$:

$$z(M_2) = z(5;11) = 2x^3 - 12xy + 3y^2 - 18x - 6y + 3\big|_{M_2} =$$

$$= 2\cdot 5^3 - 12\cdot 5\cdot 11 + 3\cdot 11^2 - 18\cdot 5 - 6\cdot 11 + 3 = 250 - 660 + 363 - 90 - 66 + 3 = -200.$$

Ответ: $z_{min}(x;y) = z(5;11) = -200$.

№5. Используя метод наименьших квадратов, найти линейную зависимость между x и y по данным, приведенным в таблице. Сделать чертеж.

Решение.

Исходные данные представлены в таблице:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y_i	-10	-9	-5	-5	-2	-9	2	3	6	9

Параметры (a) и (b) линейной зависимости $y = ax + b$ определим, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot a + n \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i . \end{cases}$$

Составим расчетную таблицу:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	-4	-10	16	40
2	-3	-9	9	27
3	-2	-5	4	10
4	-1	-5	1	5
5	0	-2	0	0
6	1	-9	1	-9
7	2	2	4	4
8	3	3	9	9
9	4	6	16	24
10	5	9	25	45
$\sum$	**5**	**-20**	**85**	**155**

Тогда

$$n = 10,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 85,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 5,\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 155,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = -20 .$$

Решаем систему

$$\begin{cases} 85a + 5b = 155, \\ 5a + 10b = -20, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 17a + b = 31, \\ a + 2b = -4, \end{cases}$$

используя, например, правило Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 17 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 34 - 1 = 33,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 31 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 31 \cdot 2 - 1 \cdot (-4) = 62 + 4 = 66,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 17 & 31 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 17 \cdot (-4) - 31 \cdot 1 = -68 - 31 = -99 .$$

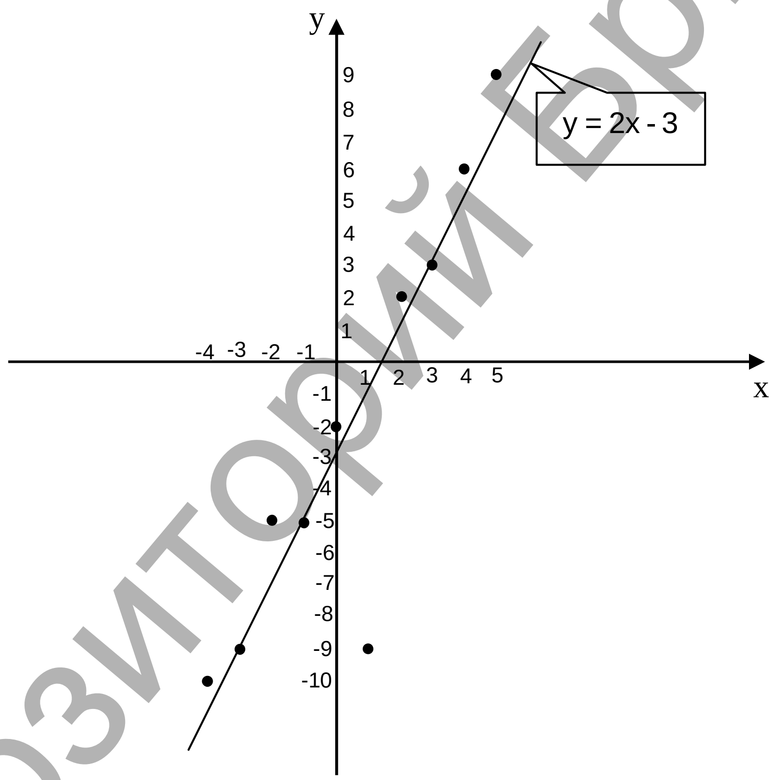
Тогда

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{66}{33} = 2,$$

$$b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-99}{33} = -3 .$$

Следовательно, уравнение $y = 2x - 3$ определяет линейную зависимость между x и y.

В системе координат изображаем точки (x_i, y_i) и прямую $y = 2x - 3$ (см. рис.).



VI. Решение практических заданий по теме: «Интегральное исчисление»

№1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int e^{3-4x}dx$; б) $\int \frac{dx}{36-25x^2}$; в) $\int \frac{xdx}{3-5x^2}$; г) $\int \frac{e^{2x}dx}{3-e^{2x}}$.

Решение.

а) Учитывая, что

$$d(3-4x)=(3-4x)'dx=(0-4\cdot 1)dx=-4dx \text{ или } dx=-\frac{1}{4}d(3-4x),$$

получим

$$\int e^{3-4x}dx=\int e^{3-4x}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)d(3-4x)=-\frac{1}{4}\int e^{3-4x}d(3-4x)=-\frac{1}{4}\cdot e^{3-4x}+C.$$

Ответ: $-\frac{1}{4}\cdot e^{3-4x}+C$.

б) Вычисления основаны на использовании одного из табличных интегралов:

1. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\ a\neq 0$; 2. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,\ a\neq 0$;

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,\ a\neq 0$; 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+b}\right|+C,\ b\neq 0$.

Так, например:

1. $$\int \frac{dx}{36-25x^2}=\int \frac{dx}{-25\left(x^2-\frac{36}{25}\right)}=-\frac{1}{25}\int \frac{dx}{x^2-\left(\frac{6}{5}\right)^2}=-\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{6}{5}}\ln\left|\frac{x-\frac{6}{5}}{x+\frac{6}{5}}\right|+C=$$
$$=-\frac{1}{60}\ln\left|\frac{5x-6}{5x+6}\right|+C;$$

2. $$\int \frac{dx}{36+25x^2}=\int \frac{dx}{25\left(\frac{36}{25}+x^2\right)}=\frac{1}{25}\int \frac{dx}{\left(\frac{6}{5}\right)^2+x^2}=\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{\frac{6}{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\frac{6}{5}}+C=$$
$$=\frac{1}{25}\cdot\frac{5}{6}\operatorname{arctg}\frac{5x}{6}+C=\frac{1}{30}\operatorname{arctg}\frac{5x}{6}+C;$$

3. $$\int \frac{dx}{\sqrt{36-25x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{25\left(\frac{36}{25}-x^2\right)}}=\frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{5}\arcsin\frac{x}{\frac{6}{5}}+C=$$
$$=\frac{1}{5}\arcsin\frac{5x}{6}+C;$$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 \pm 36}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25\left(x^2 \pm \frac{36}{25}\right)}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \frac{36}{25}}} = \frac{1}{5}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm \frac{36}{25}}\right| + C_1 =$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|5x + \sqrt{25x^2 \pm 36}\right| + C.$$

в) Используем метод подстановки (замены переменной).

$$\int \frac{xdx}{3-5x^2} = \left| \begin{array}{l} t = 3-5x^2 \\ dt = d\left(3-5x^2\right) = \left(3-5x^2\right)' dx = -10xdx \\ xdx = -\frac{1}{10}dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{10}dt}{t} = -\frac{1}{10}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{10}\ln|t| + C = -\frac{1}{10}\ln\left|3-5x^2\right| + C.$$

Ответ: $-\frac{1}{10}\ln\left|3-5x^2\right| + C$.

г) Используем метод подстановки (замены переменной).

$$\int \frac{e^{2x}dx}{3-e^{2x}} = \left| \begin{array}{l} t = 3-e^{2x} \\ dt = d\left(3-e^{2x}\right) = \left(3-e^{2x}\right)' dx = -2e^{2x}dx \\ e^{2x}dx = -\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{2}dt}{t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|3-e^{2x}\right| + C.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}\ln\left|3-e^{2x}\right| + C$.

№2. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x}{\sqrt{7x-2}}dx$; б) $\int x\sqrt{8x+3}\,dx$.

Решение.

Используем метод подстановки (замены переменной).

а) $\int \frac{x}{\sqrt{7x-2}}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{7x-2} = t,\ 7x-2 = t^2, \\ 7x = t^2+2, \quad x = \frac{t^2+2}{7}, \\ dx = d\left(\frac{t^2+2}{7}\right) = \frac{2t}{7}dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2+2}{7}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{7}dt = \frac{2}{7^2}\int\left(t^2+2\right)dt =$

$$=\frac{2}{49}\left(\frac{t^3}{3}+2t\right)+C=\frac{2}{3\cdot 49}t^3+\frac{4}{49}t+C=\frac{2}{147}\left(\sqrt{7x-2}\right)^3+\frac{4}{49}\sqrt{7x-2}+C.$$

б) $$\int x\sqrt{8x+3}\,dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{8x+3}=t,\ \ 8x+3=t^2,\\ 8x=t^2-3,\quad x=\dfrac{t^2-3}{8},\\ dx=d\left(\dfrac{t^2-3}{8}\right)=\dfrac{2t}{8}dt=\dfrac{t}{4}dt\end{array}\right|=\int\frac{t^2-3}{8}\cdot t\cdot\frac{t}{4}dt=$$

$$=\frac{1}{32}\int\left(t^2-3\right)t^2\,dt=\frac{1}{32}\int(t^4-3t^2)\,dt=\frac{1}{32}\int t^4\,dt-\frac{3}{32}\int t^2\,dt=$$

$$=\frac{1}{32}\cdot\frac{t^5}{5}-\frac{3}{32}\cdot\frac{t^3}{3}+C=\frac{1}{160}\left(\sqrt{8x+3}\right)^5-\frac{1}{32}\left(\sqrt{8x+3}\right)^3+C.$$

№3. Найти неопределенный интеграл:

$$\int xe^{-3x}\,dx.$$

Решение.

Заметим, что $d\left(e^{-3x}\right)=\left(e^{-3x}\right)'dx=-3e^{-3x}dx$. Откуда $e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}d\left(e^{-3x}\right)$.

Тогда $\int x\,e^{-3x}\,dx=\int x\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)d\left(e^{-3x}\right)=-\frac{1}{3}\cdot\int x\,d\left(e^{-3x}\right)$.

Далее, используя формулу интегрирования по частям $\int v\,du=vu-\int u\,dv$, где $v=x$, а $u=e^{-3x}$, получим

$$-\frac{1}{3}\cdot\int x\,d\left(e^{-3x}\right)=-\frac{1}{3}\cdot\left(xe^{-3x}-\int e^{-3x}\,dx\right)=-\frac{1}{3}x\,e^{-3x}+\frac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx.$$

Учитывая, что $e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}d\left(e^{-3x}\right)$, имеем

$$\int e^{-3x}\,dx=-\frac{1}{3}\int d\left(e^{-3x}\right)=-\frac{1}{3}e^{-3x}+C_1.$$

Таким образом,

$$\int x\,e^{-3x}\,dx=-\frac{1}{3}x\,e^{-3x}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)+C=-\frac{1}{3}x\,e^{-3x}-\frac{1}{9}\cdot e^{-3x}+C.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}x\,e^{-3x}-\frac{1}{9}\cdot e^{-3x}+C$.

№4. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{3x+2}{x^2-8x+20}dx.$$

Решение.

Вычисляем интеграл от простейшей рациональной дроби вида

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

где $\frac{p^2}{4}-q<0$ и знаменатель дроби представляется в виде

$$x^2+px+q=x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

$$\int\frac{3x+2}{x^2-8x+25}dx=\int\frac{3x+2}{x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2-4^2+25}dx=$$

$$=\int\frac{3x+2}{\left(x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2\right)-16+25}dx=\int\frac{3x+2}{(x-4)^2+9}dx=\int\frac{3(x-4+4)+2}{(x-4)^2+9}dx=$$

$$=\int\frac{3(x-4)+12+2}{(x-4)^2+9}dx=\int\frac{3(x-4)+14}{(x-4)^2+9}dx=\int\left(\frac{3(x-4)}{(x-4)^2+9}+\frac{14}{(x-4)^2+9}\right)dx=$$

$$=\int\frac{3(x-4)}{(x-4)^2+9}dx+\int\frac{14}{(x-4)^2+9}dx=3\int\frac{(x-4)dx}{(x-4)^2+9}+14\int\frac{dx}{(x-4)^2+9}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2(x-4)dx}{(x-4)^2+9}+14\int\frac{dx}{(x-4)^2+3^2}=\frac{3}{2}\int\frac{d(x-4)^2}{(x-4)^2+9}+14\int\frac{dx}{(x-4)^2+3^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d\left((x-4)^2+9\right)}{(x-4)^2+9}+14\int\frac{d(x-4)}{(x-4)^2+3^2}.$$

Учитывая, что $\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C$ и $\int\frac{dt}{a^2+t^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C$, получим

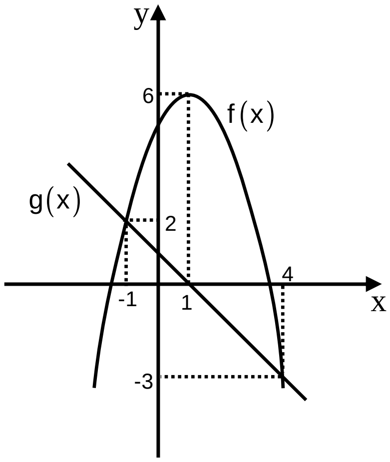
$$\int\frac{3x+2}{x^2-8x+25}dx=\frac{3}{2}\ln\left|(x-4)^2+9\right|+14\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{3}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left(x^2-8x+25\right)+\frac{14}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{3}+C.$$

Ответ: $\frac{3}{2}\ln\left(x^2-8x+25\right)+\frac{14}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{3}+C.$

№5. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ и прямой $g(x) = -x + 1$

Решение.



Строим графики функций $f(x)$ и $g(x)$.

Для нахождения точек пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$, решаем уравнение $f(x) = g(x)$, т.е.

$$-x^2 + 2x + 5 = -x + 1.$$

Откуда

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Корнями уравнения являются значения:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2},$$

т.е. $x_1 = \frac{3-5}{2} = -1$ и $x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$.

Значения функций $f(x)$ и $g(x)$ в этих точках $f(-1) = g(-1) = 2$ и $f(4) = g(4) = -3$. Таким образом $(-1;2)$ и $(4;-3)$ – точки пересечения графиков функций.

Площадь фигуры определяем по формуле: $S = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(f(x) - g(x)\right)dx$, где x_1 и x_2 – решения уравнения $f(x) = g(x)$.

Тогда

$$S = \int\limits_{-1}^{4} \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int\limits_{-1}^{4} \left(-x^2 + 2x + 5 - (-x+1)\right)dx = \int\limits_{-1}^{4} \left(-x^2 + 2x + 5 + x - 1\right)dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{4} \left(-x^2 + 3x + 4\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= \left(-\frac{4^3}{3} + 3 \cdot \frac{4^2}{2} + 4 \cdot 4\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + 3 \cdot \frac{(-1)^2}{2} + 4 \cdot (-1)\right) =$$

$$= \left(-\frac{64}{3} + 24 + 16\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4\right) = -\frac{64}{3} + 40 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 = 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} =$$

$$= 44 - 21\frac{2}{3} - 1\frac{1}{2} = 22 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = 22 - \frac{7}{6} = 20\frac{5}{6}.$$

Ответ: $20\frac{5}{6}$.

VII. Решение практических заданий по теме: «Дифференциальные уравнения»

№1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $\sin^2 3x \cdot dy + 3y\,dx = 0$.

Решение.

Исходное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными.

Заметим, что $y = 0$ является одним из решений исходного дифференциального уравнения.

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{y} = -\frac{3dx}{\sin^2 3x} \text{ или } \frac{dy}{y} = -\frac{d(3x)}{\sin^2 3x}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{d(3x)}{\sin^2 3x} + C \text{ или } \ln|y| = \operatorname{ctg} 3x + C.$$

Откуда, $|y| = e^{\operatorname{ctg}3x + C}$ или $y = \pm e^C \cdot e^{\operatorname{ctg}3x}$. Тогда, полагая $C_1 = \pm e^C$ $(C_1 \neq 0)$ и учитывая, что $y = 0$ также является решением исходного уравнения, получим $y = C_1 e^{\operatorname{ctg}3x}$ $(C_1 \in R)$ – общее решение уравнения $\sin^2 3x \cdot dy + 3y\,dx = 0$.

Ответ: $y = C_1 e^{\operatorname{ctg}3x}$, $(C_1 \in R)$.

б) $(3x^2 + 2)y' - 6yx = 0$.

Решение.

Исходное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными.

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, получим уравнение

$$(3x^2 + 2)\frac{dy}{dx} - 6yx = 0 \text{ или } (3x^2 + 2)dy = 6yx\,dx.$$

Заметим, что $y = 0$ является одним из решений исходного дифференциального уравнения.

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{y} = \frac{6x\,dx}{3x^2 + 2}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{6x}{3x^2 + 2}dx + C.$$

Учитывая, что

$$d\left(3x^2+2\right)=\left(3x^2+2\right)'dx=\left(6x+0\right)dx=6x\,dx,$$

имеем

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{d\left(3x^2+2\right)}{3x^2+2}+C.$$

Откуда, полагая $C=\ln C_1$ $\left(C_1>0\right)$, получим

$$\ln\left|y\right|=\ln\left|3x^2+2\right|+\ln C_1.$$

Используя свойства логарифмов, приходим к уравнению

$$\ln\left|y\right|=\ln C_1\left|3x^2+2\right|.$$

Откуда

$$\left|y\right|=C_1\left|3x^2+2\right| \text{ или } y=\pm C_1\left(3x^2+2\right).$$

Тогда, полагая $C_2=\pm C_1$ $\left(C_2\neq 0\right)$ и учитывая, что $y=0$ также является решением исходного уравнения, получим

$$y=C_2\left(3x^2+2\right),\ \left(C_2\in R\right),$$

общее решение уравнения $\left(3x^2+2\right)y'-6yx=0$.

Ответ: $y=C_2(3x^2+2)$.

№2. Найти частное решение дифференциального уравнения:

$$y'-\frac{6}{x}y=2e^{2x+2}x^6,\ y\left(-1\right)=3.$$

Решение.

Исходное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка вида: $y'+p(x)y=q(x)$. Найдем общее решение дифференциального уравнения методом Бернулли.

Решение уравнения будем искать в виде: $y=uv$. Так как $y'=u'v+uv'$, то, подставляя y и y' в исходное уравнение, получим

$$\left(u'v+uv'\right)-\frac{6}{x}\times uv=2e^{2x+2}x^6.$$

Группируя второе и третье слагаемое в левой части последнего уравнения, имеем

$$u'v+u\left(v'-\frac{6}{x}v\right)=2e^{2x+2}x^6.$$

Найдем одно из ненулевых решений уравнения $v'-\frac{6}{x}v=0$ или $v'=\frac{6}{x}v$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Учитывая, что $v'=\frac{dv}{dx}$, имеем $\frac{dv}{dx}=\frac{6}{x}v$ и, разделяя переменные, получим

$$\frac{dv}{v}=\frac{6dx}{x}.$$

Интегрируя последнее уравнение, имеем $\int\frac{dv}{v}=6\int\frac{dx}{x}+C$. Откуда, полагая $C=\ln C_1$ $(C_1>0)$, получим $\ln|v|=6\ln|x|+\ln C_1$ и, используя свойства логарифмов, приходим к уравнению $\ln|v|=\ln|x|^6+\ln C_1$ или $\ln|v|=\ln C_1|x|^6$. Откуда $|v|=C_1|x|^6$ или $v=\pm C_1x^6$.

Тогда, полагая $C_2=\pm C_1$ $(C_2\neq 0)$ и учитывая, что $v=0$ также является решением уравнения $v'-\frac{6}{x}v=0$, получим $v=C_2x^6$ $(C_2\in R)$ – общее решение уравнения $v'-\frac{6}{x}v=0$.

В качестве одного из ненулевых решений возьмем, например $v=x^6$, полагая $C_2=1$.

Учитывая, что $v'-\frac{6}{x}v=0$ и подставляя $v=x^6$ в уравнение

$$u'v+u\left(v'-\frac{6}{x}v\right)=2e^{2x+2}x^6,$$

получим $u'\cdot x^6=2e^{2x+2}x^6$ или $u'=2e^{2x+2}$– неполное дифференциальное уравнение первого порядка вида: $u'=f(x)$.

Откуда

$$u=\int 2e^{2x+2}dx+C.$$

Учитывая $d(2x+2)=(2x+2)'dx=2dx$, имеем

$$u=\int e^{2x+2}d(2x+2)+C=e^{2x+2}+C.$$

Таким образом, $y=uv=\left(e^{2x+2}+C\right)x^6$ – общее решение дифференциального уравнения.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(-1)=3$. Подставляя, $x=-1$ и $y=3$ в уравнение $y=\left(e^{2x+2}+C\right)x^6$, получим: $3=\left(e^{2(-1)+2}+C\right)(-1)^6$ или $3=1+C$ и $C=2$.

Следовательно, $y=\left(e^{2x+2}+2\right)x^6$ – частное решение исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(-1)=3$.

Ответ: $y=\left(e^{2x+2}+2\right)x^6$.

№3. Найти общее решение дифференциального уравнения:
а) $y'' - 2y' - 35y = 0$; б) $y'' + 12y' + 36y = 0$; в) $y'' + 6y' + 25y = 0$.

Решение.

а) Решим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0$, производя в уравнении $y'' - 2y' - 35y = 0$ замену $y'' = \lambda^2$, $y' = \lambda^1 = \lambda$ и $y = \lambda^0 = 1$.

Тогда

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2}.$$

Откуда

$$\lambda_1 = \frac{2 - 12}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \text{ и } \lambda_2 = \frac{2 + 12}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

Если характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2, то общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Следовательно, $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{7x}$ – общее решение исходного уравнения.

Ответ: $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{7x}$.

б) Решим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 12\lambda + 36 = 0$, производя в уравнении $y'' + 12y' + 36y = 0$ замену $y'' = \lambda^2$, $y' = \lambda^1 = \lambda$ и $y = \lambda^0 = 1$.

Тогда

$$\lambda_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-12 \pm 0}{2}.$$

Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = -6$.

Если характеристическое уравнение имеет два равных действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (кратный корень), то общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}.$$

Следовательно, $y = (C_1 + C_2 x) e^{-6x}$ – общее решение исходного уравнения.

Ответ: $y = (C_1 + C_2 x) e^{-6x}$.

в) Решим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$, производя в уравнении $y'' + 6y' + 25y = 0$ замену $y'' = \lambda^2$, $y' = \lambda^1 = \lambda$ и $y = \lambda^0 = 1$.

Тогда

$$\lambda_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot25}}{2\cdot1}=\frac{-6\pm\sqrt{36-100}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{-64}}{2}=\frac{-6\pm8i}{2}=-3\pm4i.$$

Откуда $\lambda_1=-3-4i$ и $\lambda_2=-3+4i$, т.е. корни характеристического уравнения имеют вид $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, где $\alpha=-3$, $\beta=4$.

Если характеристическое уравнение имеет два сопряженных комплексных корня $\lambda_1=\alpha-\beta i$ и $\lambda_2=\alpha+\beta i$, то общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\mathbf{y=e^{\alpha x}\left(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x\right).}$$

Следовательно, $y=e^{-3x}\left(C_1\sin4x+C_2\cos4x\right)$ – общее решение исходного уравнения.

Ответ: $y=e^{-3x}(C_1\sin4x+C_2\cos4x)$.

№4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''+3y'-4y=-4x^2-6x+19.$$

Решение.

Исходное уравнение является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью, вида: $P_n(x)e^{\alpha x}$, где $\alpha=0$, $P_n(x)=-4x^2-6x+19$ – многочлен степени $n=2$.

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y=y_0+y_1$, где y_0 – общее решение однородного дифференциального уравнения $y''+3y'-4y=0$, а y_1 – частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Решим характеристическое уравнение $\lambda^2+3\lambda-4=0$, производя в уравнении $y''+3y'-4y=0$ замену $y''=\lambda^2$, $y'=\lambda^1=\lambda$ и $y=\lambda^0=1$.

Тогда

$$\lambda_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-3\pm5}{2}.$$

Откуда $\lambda_1=\frac{-3-5}{2}=\frac{-8}{2}=-4$ и $\lambda_2=\frac{-3+5}{2}=\frac{2}{2}=1$.

Если характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2, то общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\mathbf{y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}.}$$

Следовательно, $y_0=C_1e^{-4x}+C_2e^{x}$ – общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y''+3y'-4y=0$.

Найдем частное решение исходного дифференциального уравнения, которое будем отыскивать в виде: $y_1 = Ax^2 + Bx + C$, так как $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения. Так как $y_1' = 2Ax + B$ и $y_1'' = 2A$, то, подставляя y_1'', y_1', y_1 в исходное уравнение, получим:

$$2A + 3(2Ax + B) - 4\left(Ax^2 + Bx + C\right) = -4x^2 - 6x + 19$$

или

$$-4Ax^2 + (6A - 4B)x + (2A + 3B - 4C) = -4x^2 - 6x + 19.$$

Откуда

$$\begin{cases} -4A = -4, \\ 6A - 4B = -6, \\ 2A + 3B - 4C = 19, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = 3, \\ C = -2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$y_1 = Ax^2 + Bx + C = x^2 + 3x - 2$$

– частное решение исходного дифференциального уравнения.

Таким образом,

$$y = y_0 + y_1 = C_1e^{-4x} + C_2e^{x} + x^2 + 3x - 2$$

– общее решение дифференциального уравнения.

Ответ: $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{x} + x^2 + 3x - 2$.

№5. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 10y' + 25y = 6e^{-5x}.$$

Решение.

Исходное уравнение является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида: $P_n(x)e^{\alpha x}$, где $\alpha = -5$, $P_n(x) = 6$ – многочлен степени $n = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y = y_0 + y_1$, где y_0 – общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' + 10y' + 25y = 0$, а y_1 – общее решение неоднородного дифференциального уравнения.

Решим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$, производя в уравнении $y'' + 10y' + 25y = 0$ замену $y'' = \lambda^2$, $y' = \lambda^1 = \lambda$ и $y = \lambda^0 = 1$.

Тогда

$$\lambda_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-10 \pm 0}{2}.$$

Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$.

Если характеристическое уравнение имеет два равных действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (кратный корень), то общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\mathbf{y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}}.$$

Следовательно, $y = (C_1 + C_2 x) e^{-5x}$ – общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 10y' + 25y = 0$.

Заметим, что если характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2, то общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\mathbf{y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}.$$

Найдем частное решение исходного дифференциального уравнения, которое будем искать в виде: $y_1 = Ae^{-5x} \cdot x^2 = Ax^2 e^{-5x}$, так как $\alpha = -5$ является кратным корнем характеристического уравнения.

Заметим, что если α является одним из действительных корней характеристического уравнения, то частное решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_1 = A e^{\alpha x} \cdot x^1 = A x e^{\alpha x}.$$

Так как

$$y_1' = A\left(x^2\right)' e^{-5x} + Ax^2\left(e^{-5x}\right)' = A(2x) \cdot e^{-5x} + Ax^2 \cdot \left(-5e^{-5x}\right) = A\left(2x - 5x^2\right) \cdot e^{-5x}$$

и

$$y_1'' = A\left(2x - 5x^2\right)' e^{-5x} + A\left(2x - 5x^2\right)\left(e^{-5x}\right)' = A(2 - 10x)e^{-5x} + A\left(2x - 5x^2\right)\left(-5e^{-5x}\right) =$$

$$= A(2 - 10x)e^{-5x} + A(-10x + 25x)^2 e^{-5x} = A\left(2 - 20x + 25x^2\right)e^{-5x},$$

то, подставляя y_1'', y_1', y_1 в исходное уравнение $y'' + 10y' + 25y = 6e^{-5x}$, получим:

$$A\left(2 - 20x + 25x^2\right) \cdot e^{-5x} + 10 \cdot A\left(2x - 5x^2\right)e^{-5x} + 25 A x^2 e^{-5x} = 6e^{-5x}$$

или

$$A\left(2 - 20x + 25x^2 + 20x - 50x^2 + 25x^2\right)e^{-5x} = 6e^{-5x}, \text{ т. е. } 2Ae^{-5x} = 6e^{-5x}.$$

Откуда $2A = 6$, т. е. $A = 3$.

Следовательно,

$$y_1 = Ax^2 e^{-5x} = 3x^2 e^{-5x}$$

– частное решение исходного дифференциального уравнения.

Таким образом,

$$y = y_0 + y_1 = (C_1 + C_2 x)e^{-5x} + 3x^2 e^{-5x}$$

– общее решение дифференциального уравнения.

Ответ: $y = y_0 + y_1 = (C_1 + C_2 x)e^{-5x} + 3x^2 e^{-5x}$.

VIII. Решение практических заданий по теме: «Числовые и функциональные ряды»

№1. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3+3n-2}$$

Решение.

Воспользуемся признаком сравнения.

Общий член исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$a_n = \frac{n+5}{n^3+3n-2}.$$

Учитывая, что для больших значений n: $\frac{n+5}{n^3+3n-2} \approx \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$, то сравним исходный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, общий член которого равен

$$b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Вычислим предел:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+5}{n^3+3n-2} \cdot \frac{n^2}{1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+5n^2}{n^3+3n-2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^3}{n^3} + \frac{5n^2}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} + \frac{3n}{n^3} - \frac{2}{n^3}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^3}} = \frac{1+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{n}}{1+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n^2} - \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n^3}} = \frac{1+0}{1+0-0} = 1 \neq 0.$$

Так как значение предела не равно 0, то оба ряда являются сходящимися или расходящимися.

Заметим, что ***обобщенный гармонический ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ ***является сходящимся, если*** $\alpha > 1$ ***и расходится, если*** $\alpha \le 1$.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится $(\alpha = 2 > 1)$, то и исходный ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

№2. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)\cdot 3^{2n+1}}{2^{3n-4}}.$$

Решение.

Воспользуемся признаком Д'Аламбера.
Определим a_n и a_{n+1} члены ряда:

$$a_n=\frac{(n+5)\cdot 3^{2n+1}}{2^{3n-4}} \text{ и } a_{n+1}=\frac{((n+1)+5)\cdot 3^{2(n+1)+1}}{2^{3(n+1)-4}}=\frac{(n+6)\cdot 3^{2n+3}}{2^{3n-1}}.$$

Вычислим предел:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+6)\cdot 3^{2n+3}}{2^{3n-1}}\cdot\frac{2^{3n-4}}{(n+5)\cdot 3^{2n+1}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^{3n-4}\cdot 3^{2n+3}}{2^{3n-1}\cdot 3^{2n+1}}\cdot\frac{n+6}{n+5}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^2}{2^3}\cdot\frac{n+6}{n+5}=\frac{3^2}{2^3}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n}+\frac{6}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{5}{n}}=\frac{9}{8}\cdot\frac{1+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6}{n}}{1+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{n}}=\frac{9}{8}\cdot\frac{1+0}{1+0}=\frac{9}{8}>1$$

Ряд ***расходится***, так как значение предела больше 1.
Заметим, что если значение предела меньше 1, то ряд ***сходится***.

Ответ: ряд расходится.

№3. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11^{6n+4}(n+6)^{n^2}}{30^{6n-5}n^{n^2}}.$$

Решение.

Воспользуемся признаком Коши.

Общий член ряда $a_n=\dfrac{11^{6n+4}(n+6)^{n^2}}{30^{6n-5}n^{n^2}}$.

Вычислим предел:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{11^{6n+4}(n+6)^{n^2}}{30^{6n-5}n^{n^2}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{11^{\frac{6n+4}{n}}(n+6)^{\frac{n^2}{n}}}{30^{\frac{6n-5}{n}}n^{\frac{n^2}{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{11^{6+\frac{4}{n}}(n+6)^n}{30^{6-\frac{5}{n}}n^n}=$$

$$=\frac{11^6}{30^6}\lim_{n\to+\infty}\frac{11^{\frac{4}{n}}}{30^{-\frac{5}{n}}}\cdot\left(\frac{n+6}{n}\right)^n=\left(\frac{11}{30}\right)^6\cdot\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}11^{\frac{4}{n}}}{\lim\limits_{n\to+\infty}30^{-\frac{5}{n}}}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+6}{n}\right)^n=$$

$$=\left(\frac{11}{30}\right)^6\cdot\frac{11^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n}}}{30^{\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{5}{n}}}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{6}{n}\right)^{\frac{n}{6}\cdot 6}=\left(\frac{11}{30}\right)^6\cdot\frac{11^0}{30^0}\cdot\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{6}{n}\right)^{\frac{n}{6}}\right)^6=$$

$$=\left(\frac{11}{30}\right)^6\cdot\frac{1}{1}\cdot e^6=\left(\frac{11e}{30}\right)^6<1,\text{ так как } 11e\approx 11\cdot 2{,}72=29{,}92<30.$$

Ряд ***сходится***, так как значение предела меньше 1.
Заметим, что если значение предела больше 1, то ряд ***расходится***.

Ответ: ряд сходится.

№4. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+2}{n^2+4n+136}.$$

Решение.

Исходный ряд является знакочередующимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, где $a_n=\dfrac{n+2}{n^2+4n+136}$. Воспользуемся следствием признака Лейбница о сходимости таких рядов: ***если члены знакочередующегося ряда*** $\boldsymbol{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n}$***,*** $\boldsymbol{a_n>0}$***, монотонно убывают*** $\boldsymbol{(a_n\ge a_{n+1})}$***, начиная с некоторого номера*** $\boldsymbol{n_0}$***, и стремятся к нулю*** $\boldsymbol{\left(\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0\right)}$***, то ряд сходится***.

Очевидно, что $a_n=\dfrac{n+2}{n^2+4n+136}>0$.

Вычислим предел:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4n}{n^2}+\frac{136}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{136}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n^2}}{1+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n}+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{136}{n^2}}=$$

$$=\frac{0+0}{1+0+0}=0.$$

Так как $a_n=\dfrac{n+2}{n^2+4n+136}$, то

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)+2}{(n+1)^2+4(n+1)+136}=\frac{n+3}{n^2+2n+1+4n+4+136}=\frac{n+3}{n^2+6n+141}.$$

Решим неравенство: $a_n\ge a_{n+1}$, т.е. $\dfrac{n+2}{n^2+4n+136}\ge\dfrac{n+3}{n^2+6n+141}$

Тогда $(n+2)\left(n^2+6n+141\right) \geq (n+3)\left(n^2+4n+136\right)$ и

$$n^3+6n^2+141n+$$
$$+2n^2+12n+282 \geq n^3+4n^2+136n+$$
$$+3n^2+12n+408.$$

Следовательно,

$$n^3+8n^2+153n+282 \geq n^3+7n^2+148n+408 \text{ и } n^2+5n-126 \geq 0.$$

Разложим левую часть неравенства на множители. Для этого решим уравнение $n^2+5n-126=0$, дискриминант которого равен $D=5^2-4\cdot 1\cdot(-126)=25+504=529=23^2$.

Откуда

$$n_1=\frac{-5-23}{2\cdot 1}=-14 \text{ и } n_2=\frac{-5+23}{2\cdot 1}=9.$$

Таким образом, $(n-(-14))(n-9) \geq 0$ или $(n+14)(n-9) \geq 0$ и неравенство $a_n \geq a_{n+1}$ выполняется для любого натурального $n \geq n_0 = 9$.

Следовательно, исходный ряд является сходящимся.

Ответ: ряд сходится.

№5. Найти область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{6^n(n+2)}.$$

Решение.

Исходный ряд является степенным рядом вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, где

$$c_n=\frac{1}{6^n(n+2)}.$$

Тогда $c_{n+1}=\dfrac{1}{6^{(n+1)}((n+1)+2)}=\dfrac{1}{6^{n+1}(n+3)}$.

Вычислим ***радиус сходимости*** степенного ряда:

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6^n(n+2)}\cdot\frac{6^{n+1}(n+3)}{1}\right)=6\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n+2}=6\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}=$$

$$=6\cdot\frac{1+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}}{1+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}}=6\cdot\frac{1+0}{1+0}=6.$$

Следовательно, $(-R,R)$, т.е. $(-6,6)$ ***интервал сходимости*** ряда.

Если, $x = R = 6$, то получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{6^n (n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{6^n (n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2},$$

который расходится, как и гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Если, $x = -R = -6$, то получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{6^n (n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6)^n}{6^n (n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6^n}{6^n (n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}.$$

Полученный ряд сходится, как знакочередующийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, где

$a_n = \frac{1}{n+2}$. Так как $a_n = \frac{1}{n+2} > 0$, то

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+2} = 0,$$

и

$$a_0 = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2} > a_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} > a_2 = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} > \ldots$$

- монотонно убывающая последовательность.

Таким образом, $[-6,6)$ – ***область сходимости*** степенного ряда.

Ответ: $[-6,6)$.

Литература

1. Высшая математика для экономических специальностей: Учебник и Практикум (части I и II) / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., пераб. b доп. – М.: Высшее образование, 2008. – 893 с.

2. Высшая математика: Общий курс: Учебник для студентов экономических специальностей вузов / Под общ. ред. проф. А.И. Яблонского. – Мн.: Выш. шк., 1993. – 349 с.

3. Гусак, А.А. Высшая математика: в 2-х частях / А.А. Гусак. − Мн.: ТетраСистемс, 2000-2001. − Ч.1. – 544 с., Ч.2. – 442 с.

4. Индивидуальные задания по высшей математике / Под ред. А.П. Рябушко, I-IIIч. − Мн.: Выш. шк., 2004-2008. − Ч.1 304 с., Ч.2. – 367 с., Ч.3. – 367 с.

5. Красс, М.С. Математика для экономических специальностей: Учебник / М.С. Красс. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 464 с.

6. Кузнецов, А.В. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов / А.В. Кузнецов, Д.С. Кузнецова, Е.И. Шилкина и [др]. – Мн: Выш. шк., 1994. – 284 с.

7. Малыхин, В.И. Математика в экономике: Учебник / В.И. Малыхин. – М.: ИНФРА-М, 1999. – 356 с.

8. Минюк, С.А. Высшая математика: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов / С.А. Минюк, Е.А. Ровба. – Гродно: ГрГУ, 2000. – 394 с.

9. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 656 с.

10. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 575 с.

Содержание

Учебное издание

Составители:
Гладкий Иван Иванович
Каримова Татьяна Ивановна
Кузьмина Елена Викторовна
Махнист Леонид Петрович
Наумовец Светлана Николаевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и варианты заданий для студентов экономических специальностей дневной формы обучения

Часть II

Издание 2-ое, исправленное

Ответственный за выпуск: Махнист Л.П.
Редактор: Строкач Т.В.
Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 10.02.2012 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. 2,1. Уч. изд. л. 2,25. Заказ № . Тираж 100 экз.
Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.