МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

по курсу *«Математика»*

для студентов факультета
электронно-информационных систем

Интегральное исчисление функции одной переменной

II семестр

Брест 2016

УДК 517.3 (076)

Настоящие рекомендации содержат задачи и упражнения из раздела «Интегральное исчисление функции одной переменной». Представлены краткие теоретические сведения по темам и наборы заданий для аудиторных и индивидуальных работ. Рекомендации составлены в соответствии с действующей программой для студентов первого курса факультета электронно-информационных систем.

Составители: Жук А.И., к.ф.-м.н.
Каримова Т.И., доцент, к.ф.-м.н.
Лебедь С.Ф., доцент, к.ф.-м.н.
Гладкий И.И., доцент
Рубанов В.С., доцент, к.ф.-м.н.

Рецензент: Мирская Е.И., доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Комплексные числа. Различные формы их записи. Действия над комплексными числами

Комплексным числом называется упорядоченная пара (a, b) действительных чисел.

Алгебраическая форма записи комплексного числа имеет вид $z = a + i \cdot b$ $(z = a + b \cdot i)$, где a, b – действительные числа, i – мнимая единица, для которой $i \cdot i = i^2 = -1$. Число a называется действительной частью комплексного числа и обозначается $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа z.

Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, выполняются по правилам сложения, вычитания и умножения двучленов вида $a + bi$, учитывая, что $i^2 = -1$. *Деление* выполняется по формуле $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$, где $\bar{z}_2 = a_2 - i\, b_2$ – комплексное число, *сопряженное* числу $z_2 = a_2 + i\, b_2$.

Геометрически комплексное число $z = a + i \cdot b$ изображается точкой $M\,(a, b)$ на координатной плоскости.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа $z = a + i \cdot b$ имеет вид $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, где $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль числа z, $\varphi = \arg z$ – его аргумент, который определяется величиной угла между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$, причем величина угла считается положительной, если отсчет ведется против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет ведется по часовой стрелке. Величина угла определяется по формулам $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$, $0 \le \varphi < 2\pi$ $(-\pi \le \varphi < \pi)$.

Пусть заданы числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$. *Действия над комплексными числами в тригонометрической форме* определяются формулами:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right); \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right);$$

$$z^n = r^n \left(\cos n\varphi + i \sin n\varphi\right),\ n \in \Gamma;$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = \overline{0, n-1}.$$

Показательная форма записи комплексного числа имеет вид $z = r\, e^{i\varphi}$, где $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ – формула Эйлера.

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, тогда: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$; $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$;

$z^n = r^n e^{in\varphi}$; $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, \exp\left(i\,\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, $k = \overline{0, n-1}$.

Задания для аудиторной работы

1. Найти значение выражения $\dfrac{(z_1+z_3)\cdot\overline{z}_2}{z_3}$, если $z_1=3+5i$, $z_2=3-4i$, $z_3=1-2i$.

2. Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если: 1) $z=(2-i)^2\cdot(3+4i)$; 2) $z=i^8+\dfrac{5+i}{1-3i}$.

3. Вычислить:

1) $\dfrac{1+2i}{3-i}+(1-i)^2$; 2) $\dfrac{2+3i}{4-2i}+\dfrac{1-3i}{2i}$; 3) $i^2+i^3+i^4+i^5$.

4. Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной форме:

1) $z=2+2i$; 2) $z=-1+i\sqrt{3}$; 3) $z=-5i$; 4) $z=2$;

5) $z=1-i$; 6) $z=-3-2i$; 7) $z=-3\left(\cos\dfrac{\pi}{5}-i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$.

5. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $|z|=2$; 2) $\arg z=\dfrac{\pi}{3}$; 3) $0\le \operatorname{Im} z<1{,}5$;

4) $\operatorname{Re} z>1$; 5) $|z|\le 1$; $\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{3\pi}{4}$.

6. Упростить выражения:

1) $\dfrac{i\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)}{\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}}$; 2) $\dfrac{1}{\cos\dfrac{4\pi}{3}-i\sin\dfrac{4\pi}{3}}$; 3) $\dfrac{\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}}{\cos\dfrac{13\pi}{12}-i\sin\dfrac{13\pi}{12}}$.

7. Вычислить:

1) $(-1+i)^{20}$; 2) $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}$; 3) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^6}{(1+i\sqrt{3})^4}+(1+i)^2(\sqrt{3}-i)$.

8. Вычислить: $\sqrt[3]{-1+i}$.

9. Решить уравнения: 1) $z^5+32=0$; 2) $z^8-1=0$.

Задания для индивидуальной работы

10. Найти значение выражения

1) $(z_1+2z_2)z_3$, если $z_1=2+3i$, $z_2=3+2i$, $z_3=5-2i$;

2) $\dfrac{z_1(z_2+z_3)}{z_2}$, если $z_1=4+5i$, $z_2=1+i$, $z_3=7-9i$;

3) $\dfrac{z_1+2\overline{z}_2}{z_3}$, если $z_1=2+3i$, $z_2=3+2i$, $z_3=5-2i$;

4) $\dfrac{(\overline{z}_1+z_3)z_2}{z_3}$, если $z_1=3+5i$, $z_2=3-4i$, $z_3=1-2i$;

5) $\dfrac{(z_1+2z_3)}{\bar{z}_2}$, если $z_1 = 2+3i,\ z_2 = 5+2i,\ \ z_3 = 3-2i$;

6) $\dfrac{z_1(z_2+z_3)}{\bar{z}_2}$, если $z_1 = 4+5i,\ z_2 = 3-4i,\ \ z_3 = 2+3i$.

11. Вычислить, представив результат в алгебраической форме:

1) $(1-2i)(2+i)^2+5i$; 2) $(2i-i^2)+(1+3i)^3$;

3) $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56}$; 4) $\dfrac{(1+i)(3+i)}{3-i}-\dfrac{(1-i)(3-i)}{3+i}$;

5) $\dfrac{(1+2i)^3+(1-2i)^3}{(2-i)^2-(2+i)^2}$; 6) $\dfrac{5+2i}{2-5i}-\dfrac{3-4i}{4+3i}-\dfrac{1}{i}$;

7) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{11}+1}\right)^2$; 8) $\dfrac{(1+i)^8-1}{(1-i)^8+1}$.

12. Вычислить:

1) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot\ldots\cdot i^{100}$; 2) $i^4+i^{14}+i^{24}+i^{34}+i^{44}+i^{54}+i^{64}+i^{74}+i^{84}$.

13. Доказать, что:

1) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$; 2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$; 3) $\operatorname{Re} z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$.

14. Найти действительные решения уравнения:

$$12\big((2x+i)(1+i)+(x+y)(3-2i)\big)=17+6i.$$

15. Решить систему уравнений $\begin{cases}(2+i)z_1+(2-i)z_2=6;\\(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8.\end{cases}$

16. Записать в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

1) $-i$; 2) 4; 3) $1-i\sqrt{3}$; 4) $3+3i$;

5) $\dfrac{1-i}{1+i}$; 6) $2-2i$; 7) $-\sqrt{3}+i$; 8) $-5i$;

9) $2+2\sqrt{3}\,i$; 10) $3-3i$; 11) $4i$; 12) $-1-i$;

13) $\sqrt{3}+i$; 14) $-4+4\sqrt{3}\,i$; 15) $3\sqrt{3}+3i$; 16) $2-2\sqrt{3}\,i$;

17) $-1+i$; 18) $\dfrac{1}{\cos 12^\circ+i\sin 12^\circ}$.

17. Выполнить действия:

1) $(1+i)^8\left(1+i\sqrt{3}\right)^{-6}$; 2) $\sqrt[4]{-1}$; 3) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$; 4) $\sqrt[3]{8+i}$;

5) $\dfrac{\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}$; 6) $\dfrac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right)^4}{\left(\sin\dfrac{3\pi}{10}+i\cos\dfrac{7\pi}{10}\right)^2}$.

18. Решить уравнения:

1) $z^2+2z+5=0$; 2) $(z+1)^4-16=0$;

3) $z^4+1=0$; 4) $z^6-1=0$;

5) $z^4-16=0$; 6) $z^6+64=0$;

7) $z^4-z^3+2z^2-z+1=0$; 8) $z^8-17z^4+16=0$;

8) $z^2-(2i-5)z+5-5i=0$; 9) $z^2-(5+3i)z+(10+5i)=0$;

10) $z^2-(3-2i)z+5-i=0$; 11) $z^2-(3+2i)z+(5+i)=0$;

12) $z^2-(1-2i)z+(1+5i)=0$; 13) $z^2-(5-3i)z+(10-5i)=0$.

19. Вычислить значение выражения, зная, что $z+z^{-1}=1$.

1) $z^{158}+z^{152}+2z^{-122}$; 2) $z^{158}+z^{140}+2z^{-98}$;

3) $z^{152}+z^{146}+2z^{-122}$; 4) $z^{164}+z^{158}+2z^{-122}$.

20. Изобразить на комплексной плоскости J множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\begin{cases} 1\le z\cdot\bar{z}\le 2; \\ -\sqrt{3}\le \operatorname{Im} z\le 0; \end{cases}$ 2) $|z-i|=|z+2|$; 3) $\begin{cases} |z-i|<1; \quad \arg z\ge \dfrac{\pi}{4}; \\ \arg(z+1-i)\ge \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

21. Вычислить суммы: $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\dots+\sin n\varphi$; $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\dots+\cos n\varphi$.

Ответы: **10.** 1) $54+19i$; 2) $40-32i$. **12.** 1) –1; 2) 1.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2. Простейшие методы интегрирования

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$, если $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in(a,\ b)$.

Теорема. Для любой непрерывной на интервале $(a,\ b)$ функции $f(x)$ существует бесконечное множество первообразных, причем любые две из них $F_1(x)$ и $F_2(x)$ отличаются друг от друга лишь постоянным слагаемым, т.е. $F_2(x)=F_1(x)+C$, $C=const$.

Множество всех первообразных функций $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \text{ где } C=const.$$

Нахождение неопределенного интеграла функции $f(x)$ называется *интегрированием* данной функции. Эта операция является обратной дифференцированию.

Основные правила интегрирования

1. $\int C f(x)dx=C\int f(x)dx$, $C=const$.

2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, а $u = \varphi(x)$ – дифференцируемая функция, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица интегралов

1) $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1;$ 2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$ 4) $\int e^x dx = e^x + C;$

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$ 6) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$ 8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

9) $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C;$ 10) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$

11) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C;$ 12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

13) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C;$ 14) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

15) $\int chx\, dx = shx + C;$ 16) $\int shx\, dx = chx + C;$

17) $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C;$ 18) $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C, \quad x \neq 0.$

Из основного правила 3) вытекает, что все интегральные формулы таблицы интегралов остаются справедливыми, если в них вместо переменной x подставить некоторую дифференцируемую функцию $\varphi(x)$. При этом для сведения рассматриваемого интеграла к табличному интегралу иногда достаточно представить dx по одной из формул: $dx = d(x+a)$ или $dx = \dfrac{1}{a} d(ax+b)$.

Простейшие методы интегрирования включают в себя нахождение неопределенных интегралов с помощью основных правил интегрирования и таблицы интегралов, интегрирование путем внесения производной под знак дифференциала.

Пример 1. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \left(4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2}{x^3} + 1\right)dx;$ 2) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{16x^2 + 9}};$ 3) $\int \dfrac{dx}{(2x-1)^5};$

4) $\int \frac{dx}{\sin^2 6x}$; 5) $\int \left(4x^3+1\right)\cos\left(x^4+x\right)dx$; 6) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$.

Решение.

1) Воспользуемся основными правилами 1), 2) и табличным интегралом $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+C, \;\; a \neq -1$:

$$\int\left(4x^3-2\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x^3}+1\right)dx = 4\int x^3 dx - 2\int x^{\frac{2}{3}}dx + 2\int x^{-3}dx + \int dx =$$

$$= 4\cdot\frac{x^4}{4} - 2\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + 2\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + x + C = x^4 - \frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{x^2} + x + C.$$

2) $$\int\frac{dx}{\sqrt{16x^2+9}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(4x)^2+3^2}} = \frac{1}{4}\int\frac{d(4x)}{\sqrt{(4x)^2+3^2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\,4x+\sqrt{16x^2+9}\,\right|+C.$$

3) $$\int\frac{dx}{(2x-1)^5}dx = \int(2x-1)^{-5}dx = \frac{1}{2}\int(2x-1)^{-5}d(2x-1) =$$

$$= -\frac{1}{8}(2x-1)^{-4}+C = -\frac{1}{8(2x-1)^4}+C.$$

4) $$\int\frac{dx}{\sin^2 6x} = \frac{1}{6}\int\frac{d(6x)}{\sin^2 6x} = -\frac{1}{6}ctg 6x + C.$$

5) $$\int\left(4x^3+1\right)\cos\left(x^4+x\right)dx = \int\cos\left(x^4+x\right)d\left(x^4+x\right) = \sin\left(x^4+x\right)+C.$$

6) $$\int\frac{dx}{x^2+2x+3} = \int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

После выделения полного квадрата в знаменателе и поднесения под дифференциал воспользовались табличным интегралом $\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$.

Ответ: 1) $x^4-\frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{1}{x^2}+x+C$; 2) $\frac{1}{4}\ln\left|\,4x+\sqrt{16x^2+9}\,\right|+C$; 3) $-\frac{1}{8(2x-1)^4}+C$; 4) $-\frac{1}{6}ctg 6x+C$; 5) $\sin\left(x^4+x\right)+C$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

В следующих примерах будет применен метод внесения производной под знак дифференциала. Он основан на использовании формулы $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$, из которой в частности следует, что:

$$xdx = \frac{1}{2}\left(x^2\right)' dx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right); \qquad x^2dx = \frac{1}{3}\left(x^3\right)' dx = \frac{1}{3}d\left(x^3\right);$$

$$\frac{dx}{x}=(\ln x)'dx=d(\ln x);\qquad \cos x dx=(\sin x)'dx=d(\sin x);$$

$$\sin x dx=-(\cos x)'dx=-d(\cos x);\qquad e^x dx=\left(e^x\right)'dx=d\left(e^x\right);$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x}=(tgx)'dx=d(tgx);\qquad \frac{dx}{\sin^2 x}=-(ctgx)'dx=-d(ctgx);$$

$$\frac{dx}{1+x^2}=(arctgx)'dx=d(arctgx).$$

Пример 2. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int x^2\sqrt{4+x^3}dx$; 2) $\int\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$;

3) $\int\frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$; 4) $\frac{x-arctgx}{1+x^2}dx$.

Решение.

1) $$\int x^2\sqrt{4+x^3}dx=\frac{1}{3}\int\left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}\left(4+x^3\right)'dx=\frac{1}{3}\int\left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}d\left(4+x^3\right)=$$
$$=\frac{2}{9}\left(4+x^3\right)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}\sqrt{\left(4+x^3\right)^3}+C.$$

2) $$\int\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\int\frac{\left(\ln(x+1)\right)'dx}{\ln(x+1)}=\int\frac{d\left(\ln(x+1)\right)}{\ln(x+1)}=\ln\left|\ln(x+1)\right|+C.$$

3) $$\int\frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{(\arcsin x)'dx}{\arcsin x}=\int\frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x}=\ln\left|\arcsin x\right|+C.$$

4) $$\int\frac{x-arctgx}{1+x^2}dx=\int\frac{xdx}{1+x^2}-\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}-\int arctgx\,d\left(arctgx\right)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}arctg^2x+C.$$

Ответ: 1) $\frac{2}{9}\sqrt{\left(4+x^3\right)^3}+C$; 2) $\ln\left|\ln(x+1)\right|+C$; 3) $\ln\left|\arcsin x\right|+C$;
4) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}arctg^2x+C$.

Задания для аудиторной работы

22. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\left(5x^7-3\sqrt[5]{x^3}+\frac{3}{x^4}\right)dx$; 2) $\int\left(\left(1-2x\right)^2+2^x\cdot e^x\right)dx$;

3) $\int\left(3\sin x-2^{x}\cdot 3^{2x}+\dfrac{3}{9+x^{2}}\right)dx$;

4) $\int\dfrac{\cos 2x}{\cos^{2}x\cdot\sin^{2}x}dx$;

5) $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx$;

6) $\int\dfrac{3\cdot 2^{x}-2\cdot 3^{x}}{5^{x}}dx$;

7) $\int\dfrac{1+2x^{2}}{x^{2}(1+x^{2})}dx$;

8) $\int\dfrac{(1+x)^{2}}{x(1+x^{2})}dx$;

9) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^{2}-5}}$;

10) $\int\dfrac{dx}{x^{2}-9}$;

11) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{3-3x^{2}}}$;

12) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^{2}+5}}$.

23. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\dfrac{dx}{x+5}$;

2) $\int\sqrt{x+15}\,dx$;

3) $\int\dfrac{1}{2x+3}dx$;

4) $\int\left(2\sin(1-6x)+5e^{7x+6}\right)dx$;

5) $\int\sqrt{\sin x}\cdot\cos x\,dx$;

6) $\int 2x\sqrt{x^{2}+8}\,dx$;

7) $\int\dfrac{x^{4}}{\sqrt{4+x^{5}}}dx$;

8) $\int\dfrac{(arctg\,x)^{2}}{1+x^{2}}dx$;

9) $\int e^{x}\sin e^{x}\,dx$;

10) $\int\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$;

11) $\int\dfrac{2x-3}{x^{2}-3x+8}dx$;

12) $\int\dfrac{dx}{x^{2}+4x+13}$;

13) $\int\dfrac{3x-1}{x^{2}+9}dx$;

14) $\int\dfrac{x\left(1-x^{2}\right)}{1+x^{4}}dx$;

15) $\int\dfrac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$;

16) $\int e^{\sin^{2}x}\sin 2x\,dx$.

24. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\dfrac{x}{x+9}dx$;

2) $\int\dfrac{3x-1}{x-2}dx$;

3) $\int\dfrac{(1+x)^{2}}{x^{2}+1}dx$;

4) $\int\dfrac{x^{4}}{1-x}dx$.

Задания для индивидуальной работы

25. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\left(a+bx^{3}\right)dx$;

2) $\int\left(6x^{2}+8x+3\right)dx$;

3) $\int\left(2\sqrt{x^{5}}-\dfrac{8}{x^{3}}+\dfrac{4x}{\sqrt{x^{3}}}\right)dx$;

4) $\int\dfrac{\left(x^{2}+1\right)\left(x^{2}-2\right)}{\sqrt[3]{x^{2}}}dx$;

5) $\int \frac{dx}{x^2+7}$;

6) $\int \frac{dx}{x^2-10}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$;

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$;

9) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{5x^2+4}} - \frac{1}{3x^2-4} \right) dx$;

10) $\int \left(\frac{6}{(2+4x)^{13}} - 5(3x+1)^{15} \right) dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$;

12) $\int ctg^2 x dx$.

26. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \left(\frac{6}{(2+4x)^6} - 5(3x+7)^7 \right) dx$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$;

3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$;

4) $\int x \sin\left(2x^2-5\right) dx$;

5) $\int x^2 e^{x^3} dx$;

6) $\int \left(\frac{1}{7x^2-8} + \frac{1}{\sqrt{7-5x^2}} \right) dx$;

7) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} dx$;

8) $\int \frac{xdx}{2x^2+3}$;

9) $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$;

10) $\int \frac{e^x}{2e^x-1} dx$;

11) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$;

12) $\int 5^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

13) $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x} dx$;

14) $\int x \sqrt[5]{5-x^2} dx$.

27. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \left(2\sqrt{x^9} - \frac{10}{x^6} + \frac{4x^4}{\sqrt{x^3}} \right) dx$;

2) $\int \left(9\sqrt{x^5} - \frac{1}{2x} - \frac{8\sqrt{x}}{x^2} \right) dx$;

3) $\int \left(2\sqrt{x^5} - \frac{5}{x^4} + \frac{7x}{\sqrt{x^3}} \right) dx$;

4) $\int \left(4\sqrt{x^3} - \frac{5}{x^3} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^3}} \right) dx$;

5) $\int \left(\frac{7}{\sqrt{4x^2+4}} - \frac{1}{3x^2+18} \right) dx$;

6) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-2x^2}} + \frac{1}{2x^2-4} \right) dx$;

7) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{2x^2+4}} - \frac{1}{3x^2+4} \right) dx$;

8) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{3x^2+1} \right) dx$;

9) $\int \left(\frac{7}{(2+8x)^{13}} + (4-5x)^{10} \right) dx$;

10) $\int \left(\frac{1}{(2x-1)^5} - (3x+4)^{10} \right) dx$;

11) $\int\left(\frac{6}{(7x-11)^{13}}+(5x+3)^9\right)dx$;

12) $\int\left(\frac{2}{(8+3x)^{15}}-(8x+7)^{20}\right)dx$;

13) $\int\left(2\sin(1-6x)+4e^{3+5x}\right)dx$;

14) $\int\left(2\sin(1-8x)+6e^{3+4x}\right)dx$;

15) $\int\left(2\cos(8-4x)+6e^{3-7x}\right)dx$;

16) $\int \sin x\cos^2 xdx$;

17) $\int\sqrt{\sin x}\cos xdx$;

18) $\int tgxdx$;

19) $\int \sin x\cos^{-2} xdx$;

20) $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{\sin^5 x}}$;

21) $\int\frac{x-\sqrt{arctg\,2x}}{1+4x^2}dx$;

22) $\int\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$;

23) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$;

24) $\int\frac{dx}{\sin^2(1-3x)}$;

25) $\int\frac{dx}{\cos^2(3x+2)}$;

26) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{5+x^4}}$;

27) $\int\frac{tg^4x+1}{\cos^2 x}dx$;

28) $\int\frac{2x-5\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

29) $\int\frac{e^{3x}}{e^{6x}+25}dx$;

30) $\int\frac{arctg^3 4x}{1+16x^2}dx$;

31) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{7+x^3}}$;

32) $\int\frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}dx$;

33) $\int\sqrt{\arcsin 2x}\,\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

34) $\int\frac{x^4dx}{x^{10}+8}$;

35) $\int\frac{2x-5arctg^2x}{1+x^2}dx$;

36) $\int\arcsin^3 2x\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

3. Замена переменной в неопределенном интеграле

Если в неопределенном интеграле подынтегральное выражение $f(x)dx$ имеет вид $g\left(\varphi(x)\right)\varphi'\left(x\right)dx$, то, положив $\varphi(x)=t$, приведем интеграл к виду

$$\int f(x)dx=\int g\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx=\int g(t)dt.$$

Пусть $F(t)$ – первообразная функции $g(t)$, тогда $\int g(t)dt=F(t)+C$, а $\int f(x)dx=F(\varphi(x))+C$.

Рассмотренная выше операция внесения производной $\varphi'(x)$ под знак дифференциала в интеграле $\int g\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx$ эквивалентна замене переменной $\varphi(x)=t$.

Пример 3. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int x\sqrt{x-1}\,dx$; 2) $\int (1+\sin x)^{\frac{1}{3}}\cos x dx$;

3) $\int \frac{\sqrt[4]{x+1}+2}{\sqrt{x+1}}dx$; 4) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Решение.

$$1)\ \int x\sqrt{x-1}\,dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=t \\ t^2 = x-1 \\ x = t^2+1 \\ dx = 2tdt \end{array}\right] = 2\int\left(t^2+1\right)t^2\,dt = 2\int\left(t^4+t^2\right)dt =$$

$$= \frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C = \frac{2}{15}t^3\left(3t^2+5\right)+C = \frac{2}{15}\sqrt{(x-1)^3}\,(3x+2)+C.$$

$$2)\ \int(1+\sin x)^{\frac{1}{3}}\cos x dx = \int(1+\sin x)^{\frac{1}{3}}d\left(1+\sin x\right) =$$

$$= \int t^{\frac{1}{3}}dt = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+C = \frac{3}{4}(1+\sin x)^{\frac{4}{3}}+C.$$

$$3)\ \int\frac{\sqrt[4]{x+1}+2}{\sqrt{x+1}}dx = \left[\begin{array}{l} x+1 = t^4 \\ x = t^4-1 \\ dx = 4t^3dt \end{array}\right] = \int\frac{t+2}{t^2}4t^3dt = 4\int\left(t^2+2t\right)dt =$$

$$= \frac{4}{3}t^3+4t^2+C = \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{4}}+4\sqrt{x+1}+C.$$

$$4)\ \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} x = a\sin t \ \Rightarrow\ \sin t = \dfrac{x}{a} \\ dx = a\cos t dt; \\ t = \arcsin\dfrac{x}{a};\ \cos t = \sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2} \end{array}\right] =$$

$$= a\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cos t dt = a^2\int\cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C = \frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\cos t\right)+C = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C.$$

Ответ: 1) $\frac{2}{15}\sqrt{(x-1)^3}(3x+2)+C$; 2) $\frac{3}{4}(1+\sin x)^{\frac{4}{3}}+C$;

3) $\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{4}}+4\sqrt{x+1}+C$; 4) $\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$.

Рассмотрим применение замены переменной при интегрировании некоторых функций, *содержащих квадратный трехчлен.*

Для нахождения интегралов вида $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$, $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ квадратный трехчлен в знаменателе подынтегральной функции записывают в виде:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a},$$

то есть выделяют полный квадрат. Затем делают замену переменной $x+\frac{b}{2a}=t$, $x=t-\frac{b}{2a}$, $dx=dt$.

Пример 4. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}$; 2) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx$.

Решение.

1) $$\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}=\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+x+\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}=$$

$$=\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{2}=t,\ \ x=t-\frac{1}{2} \\ dx=dt \end{array}\right]=\frac{1}{2}\int \frac{t-\frac{1}{2}}{t^2+\frac{9}{4}}dt.$$

Разобьем полученный интеграл на сумму (алгебраическую) двух интегралов. Первый интеграл найдем внесением производной под знак дифференциала, а второй интеграл – табличный.

$$\frac{1}{2}\int \frac{t-\frac{1}{2}}{t^2+\frac{9}{4}}dt=\frac{1}{2}\int \frac{tdt}{t^2+\frac{9}{4}}-\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+\frac{9}{4}}=\frac{1}{4}\left(\int \frac{d\left(t^2+\frac{9}{4}\right)}{t^2+\frac{9}{4}}-\int \frac{dt}{t^2+\frac{9}{4}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln\left(t^2+\frac{9}{4}\right)-\frac{2}{3}arctg\frac{2t}{3}\right)+C=\frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{6}arctg\frac{2x+1}{3}+C.$$

2) $$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx=\int \frac{3x-1}{\sqrt{(x-2)^2+4}}dx=\left[\begin{array}{l} x-2=t,\quad x=t+2 \\ dx=dt \end{array}\right]=$$

$$=\int \frac{3t+5}{\sqrt{t^2+4}}dt=3\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+4}}+5\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{3}{2}\int \frac{d\left(t^2+4\right)}{\sqrt{t^2+4}}+5\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=$$

$$=3\sqrt{t^2+4}+5\ln|t+\sqrt{t^2+4}|+C=3\sqrt{x^2-4x+8}+5\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+8}|+C.$$

Ответ: 1) $\frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{6}arctg\frac{2x+1}{3}+C$;

2) $3\sqrt{x^2-4x+8}+5\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+8}|+C$.

Для нахождения интегралов вида $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$ применяют замену вида $\frac{1}{x-\alpha}=t$.

Задания для аудиторной работы

28. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$; 2) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$; 3) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$;

4) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt{x}}dx$; 5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$; 6) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

29. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{(x-1)^2-9}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$; 3) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

4) $\int \frac{(x+2)dx}{2x^2+6x+4}$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$;

7) $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{2x^2+4x+6}}$; 8) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; 9) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

Задания для индивидуальной работы

30. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int e^{\sqrt{4-3x}}\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$; 2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}$; 3) $\int x(2x+5)^{10}dx$;

4) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt{x}}dx$; 5) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$; 6) $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}+3}{\sqrt{x+1}}dx$.

31. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{1-4x}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; 3) $\int x\left(5x^2-3\right)^7dx$;

4) $\int x\sqrt{1-2x}dx$; 5) $\int \frac{dx}{e^x+1}$; 6) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$; 8) $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}\frac{dx}{x}$; 9) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$;

32. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int e^{\sqrt{5+x}}\frac{dx}{\sqrt{5+x}}$; 2) $\int e^{\sqrt{4-3x}}\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$; 3) $\int \sin\sqrt{3x+4}\frac{dx}{\sqrt{4+3x}}$;

4) $\int \cos\sqrt{3-5x}\frac{dx}{\sqrt{3-5x}}$; 5) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{3-x}}$; 6) $\int x\sqrt{6-7x}dx$;

7) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$; 8) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2x-1}{\sqrt{x}}dx$; 9) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{\sqrt{x}}}dx$.

33. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^2-8x-9}$; 2) $\int \frac{xdx}{x^2+6x+5}$; 3) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+6x+13}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+20}}$; 5) $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{2x^2+8x+10}}$; 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$.

34. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^2+4x+6}$; 2) $\int \frac{(x-1)dx}{4x^2+6x+4}$ 3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+8x+5}}$;

4) $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{2x^2-2x+3}}$; 5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$; 6) $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{2x^2+1}}$.

35. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{2x^2+6x+4}$; 2) $\int \frac{xdx}{x^2+6x+14}$; 3) $\int \frac{xdx}{2x^2+4x+9}$;

4) $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{2x^2+8x+6}}$; 5) $\int \frac{(4x+1)dx}{\sqrt{x^2-2x+4}}$; 6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+8x+5}}$;

7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+1}}$; 8) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-3x^2}}$; 9) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$.

Ответы: **28.** 3) $2\sqrt{1+\ln x}-\ln\left|\ln x\right|+2\ln\left|\sqrt{1+\ln x}-1\right|+C$;

5) $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|+C$. **29.** 8) $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|+C$.

31. 6) $2\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right)+C$; 7) $2arctg\sqrt{e^x-1}+C$;

8) $\ln x-\ln 2\,\ln\left|\ln x+2\ln 2\right|+C$; 9) $\frac{2}{3}\left(e^x-2\right)\sqrt{e^x+1}+C$.

4. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы

$$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x) \text{ или } \int udv=uv-\int vdu,$$

где $u=u\left(x\right)$ и $v=v\left(x\right)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

Применение формулы целесообразно, когда под знаком интеграла имеется произведение функций разных классов. В некоторых случаях формулу интегрирования по частям приходится применять несколько раз.

Пример 5. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \ln x dx$; 2) $\int (2x+1)\cos 3x dx$;

3) $\int 2x arctgx dx$; 4) $\int x^2 \sin x dx$.

Решение.

1) $$\int \ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = x \end{bmatrix} = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} =$$

$$x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

2) $$\int (2x+1)\cos 3x dx = \begin{bmatrix} u = 2x+1, & du = 2dx \\ dv = \cos 3x dx, & v = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2x+1}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\int \sin 3x dx = \frac{2x+1}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + C.$$

3) $$\int 2x arctgx dx = \begin{bmatrix} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = 2xdx, & v = x^2 \end{bmatrix} = x^2 arctgx - \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} =$$

$$= x^2 arctgx - \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx = x^2 arctgx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= x^2 arctgx - x + arctgx + C.$$

4) $$\int x^2 \sin x dx = \begin{bmatrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \cos x dx, & v = \sin x \end{bmatrix} = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x dx\right) =$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Ответ: 1) $x(\ln x - 1) + C$; 2) $\dfrac{2x+1}{3}\sin 3x + \dfrac{2}{9}\cos 3x + C$;

3) $x^2 arctgx - x + arctgx + C$; 4) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$.

Задания для аудиторной работы

36. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int x\cos 3x\, dx$; 2) $\int \arccos x dx$; 3) $\int (1-3x)\ln(4x) dx$;

4) $\int \left(x^2 - 2x + 5\right)e^{-x}\, dx$; 5) $\int \ln^2 x\, dx$; 6) $\int \dfrac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$;

7) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$; 8) $\int \sin(\ln x)\,dx$; 9) $\int e^{x}\sin x\,dx$;

10) $\int \sqrt{x^2+169}\,dx$; 11) $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$.

Задания для индивидуальной работы

37. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int xe^{-7x}dx$; 6) $\int \ln(x-3)dx$ 3) $\int x\,arctg\,2x\,dx$;

4) $\int (x^2-4)\cos x dx$; 5) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$; 6) $\int \cos(\ln x)dx$.

38. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int x\cos\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$; 2) $\int x2^{3x}dx$; 3) $\int \ln\left(1+x^2\right)dx$;

4) $\int x\arcsin x dx$; 5) $\int x^3e^{-x^2}dx$; 6) $\int \frac{x^2arctgx}{1+x^2}dx$;

7) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$; 8) $\int \frac{\arcsin x dx}{x^2}$; 9) $\int \ln^2 x dx$.

39. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int (1-3x)\ln(4x)dx$; 2) $\int (2x+3)\cos 5x dx$; 3) $\int (1-x^2)\sin x dx$;

4) $\int x\ln(2x)dx$; 5) $\int x\ln(5x)dx$; 6) $\int \ln(1-2x)dx$;

7) $\int (x+1)\ln(2x)dx$; 8) $\int (3-x)\sin 4x dx$; 9) $\int (1-x)\cos 2x dx$;

10) $\int (x-2)\cos 3x dx$; 11) $\int x\sin 6x dx$; 12) $\int (3-x^2)\sin x dx$;

13) $\int (2-x^2)\sin x dx$; 14) $\int (x^2-4x)\cos x dx$; 15) $\int \arcsin x dx$;

16) $\int \arccos x dx$; 17) $\int (1-x)arctgx dx$; 18) $\int (x^2-4x+3)e^{-2x}dx$;

19) $\int (x^2+3)e^{-2x}dx$; 20) $\int (x^2-4)e^{3x}dx$; 21) $\int (x^2+3x+2)e^{-x}dx$.

Ответы: **36.** 1) $\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C$; 2) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$;

4) $-e^{-x}\left(x^2+5\right)+C$; 5) $x\ln^2 x-2x\ln+2x+C$; 6) $-\frac{x}{\sin x}+\ln\left|tg\frac{1-x}{2}\right|+C$;

7) $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C$. **38.** 5) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(x^2+1\right)+C$;

6) $xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2}arctg^2x+C$.

5. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной функцией (рациональной дробью) называется отношение двух многочленов, то есть дробь вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $Q_m(x)$ – многочлен степени m.

Если $n \geq m$, то рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, называется *неправильной*, если $n < m$, то дробь называется *правильной*.

Теорема. Любая неправильная рациональная дробь может быть единственным образом представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Например, рациональная дробь вида $\frac{x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 1}{x^3 - 2x}$ является неправильной, так как степень числителя $(n=5)$ больше степени знаменателя $(m=3)$.

Делим многочлен числителя «уголком» на многочлен знаменателя. Тогда в частном получим многочлен $M(x)$, а в остатке многочлен $R(x)$.

$$\frac{x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 1}{x^3 - 2x} = x^2 - 3x + 7 - \frac{6x^2 - 14x + 1}{x^3 - 2x}.$$

Простейшими рациональными функциями называются рациональные дроби следующих видов:

1) $\frac{A}{x-a}$; 2) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $D = p^2 - 4q < 0$;

3) $\frac{A}{(x-a)^m}, m > 1, m \in N$; 4) $\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^m}$, где $D < 0, m > 1, m \in N$.

Рассмотрим интегрирование таких функций:

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$;

2. $\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = A\int (x-a)^{-m}d(x-a) = \frac{A}{-m+1}(x-a)^{-m+1} + C$;

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ рассмотрен в п.3;

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}dx$ находят с помощью рекуррентной формулы (см. лекции или справочные пособия).

Теорема. Каждую правильную рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно единственным образом представить в виде суммы простейших рациональных функций.

Знаменатель дроби $Q(x)$ раскладываем на множители, каждый из которых является либо степенью линейной функции $x-a$, либо степенью квадратичной функции x^2+px+q, не имеющей действительных корней. Например, знаменатель имеет следующее разложение:

$$Q(x)=(x-a)^k(x-b)(x^2+px+q)(x^2+px+q)^m,$$

тогда рациональная функция $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_k}{x-a}+\frac{B}{x-b}+$$

$$+\frac{Cx+D}{x^2+px+q}+\frac{E_1x+F_1}{(x^2+px+q)^m}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\ldots+\frac{E_mx+F_m}{x^2+px+q},$$

где $A_1, A_2, ..., A_k, B, C, D, E_1, F_1, \ldots, E_m, F_m$ – действительные числа, которые надо определить.

Данное разложение предложено Лейбницем. Определим неизвестные коэффициенты (метод Иоганна Бернулли).

Полученные простейшие дроби приведем к общему знаменателю. В правой и левой части равенства получим две дроби, знаменатели которых равны $Q(x)$. Приравняем числители. Полученное равенство верно для любых x. Неизвестные коэффициенты найдем либо способом частных значений, либо приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, либо комбинируя оба способа.

Пример 6. Найти интегралы:

1) $\displaystyle\int\frac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x}dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{x^2+4}{x^3(x+1)^2}dx$; 3) $\displaystyle\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$.

Решение.

1) Знаменатель подынтегральной функции раскладываем на множители: $Q(x)=x^3+x^2-2x=x(x^2+x-2)=x(x-1)(x+2)$.

Каждый множитель станет знаменателем простейшей дроби.

$$\frac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x}=\frac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}=$$

$$=\frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}.$$

Приравниваем числители первой и последней дробей:

$$2x^2-x+3=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1).$$

Это равенство справедливо для любых $x\in\mathbb{R}$. Для определения неизвестных коэффициентов A, B и C применим метод частных значений: будем подставлять в полученное равенство корни знаменателя и находить значения коэффициентов A, B и C.

Если $x=0$, то $3=A(-1)2$, значит $A=-\dfrac{3}{2}$.

Если $x=1$, то $2-1+3=3B$, значит $B=\dfrac{4}{3}$.

Если $x=-2$, то $8+2+3=C(-2)(-3)$, значит $C=\dfrac{13}{6}$.

Итак, получили разложение рациональной функции на простейшие дроби:

$$\int \frac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x}dx=\int\left(-\frac{3}{2x}+\frac{4}{3(x-1)}+\frac{13}{6(x+2)}\right)dx=$$
$$=-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{4}{3}\ln|x-1|+\frac{13}{6}\ln|x+2|+C.$$

2) Подынтегральную функцию $\dfrac{x^2+4}{x^3(x+1)^2}$ представим в виде суммы пяти простейших дробей, так как каждый множитель в знаменателе дает столько дробей, какова его кратность.

$$\frac{x^2+4}{x^3(x+1)^2}=\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{x+1}=$$
$$=\frac{\left(A+Bx+Cx^2\right)(x+1)^2+\left(D+E(x+1)\right)x^3}{x^3(x+1)^2}.$$

Приравняем числители полученных дробей:

$$x^2+4=\left(A+Bx+Cx^2\right)\left(x^2+2x+1\right)+\left(D+Ex+E\right)x^3;$$
$$x^2+4=\left(C+E\right)x^4+\left(B+2C+D+E\right)x^3+\left(A+2B+C\right)x^2+\left(B+2A\right)x+A.$$

Многочлены равны, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях x.

x^4: $C+E=0$, $\quad E=-C=-13.$

x^3: $B+2C+D+E=0$, $\quad D=-B-2C-E=8-26+13=-5.$

x^2: $A+2B+C=1$, $\quad C=1-A-2B=1-4+16=13.$

x^1: $B+2A=0$, $\quad B=-2A=-8.$

x^0: $A=4.$ $\quad A=4.$

Получим следующее разложение:

$$\frac{x^2+4}{x^3(x+1)^2}=\frac{4}{x^3}-\frac{8}{x^2}+\frac{13}{x}-\frac{5}{(x+1)^2}-\frac{13}{x+1}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{x^2+4}{x^3(x+1)^2}dx=\int\left(\frac{4}{x^3}-\frac{8}{x^2}+\frac{13}{x}-\frac{5}{(x+1)^2}-\frac{13}{x+1}\right)dx=$$
$$=-\frac{2}{x^2}+\frac{8}{x}+13\ln|x|+\frac{5}{x+1}-13\ln|x+1|+C.$$

3) Рассмотрим интеграл $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}=\frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

$$2x^2-3x+1=A\left(x^2-x+1\right)+\left(Bx+C\right)(x+1)=$$

$$=\left(A+B\right)x^2+\left(-A+B+C\right)x+\left(A+C\right).$$

Приравнивая коэффициенты многочленов при одинаковых степенях переменной, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A, B и C.

$$\begin{cases} A+B=2, \\ -A+B+C=-3, \\ A+C=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=2-A, \\ C=1-A, \\ -A+2-A+1-A=-3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=2-A, \\ C=1-A, \\ -3A=-6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2, \\ B=0, \\ C=-1. \end{cases}$$

$$\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx=\int\left(\frac{2dx}{x+1}-\frac{dx}{x^2-x+1}\right)=2\ln|x+1|-\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=2\ln|x+1|-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Ответ: 1) $-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{4}{3}\ln|x-1|+\frac{13}{6}\ln|x+2|+C$;

2) $-\frac{2}{x^2}+\frac{8}{x}+13\ln|x|+\frac{5}{x+1}-13\ln|x+1|+C$;

3) $2\ln|x+1|-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

Задания для аудиторной работы

40. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{x-4}{x^2-5x+6}dx$;

2) $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$;

3) $\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$;

4) $\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)\left(x^3-7x^2+3x\right)}dx$;

5) $\int\frac{x^2}{x^4-1}dx$;

6) $\int\frac{x^4-4x^3+5x^2+10x-10}{x^3-3x^2+x+5}dx$;

7) $\int\frac{dx}{x^4+1}$;

8) $\int\frac{2x}{(x+1)\left(x^2+1\right)^2}dx$.

Задания для индивидуальной работы

41. Представить рациональные дроби в виде суммы простейших дробей, не вычисляя коэффициентов.

1) $\dfrac{4x^3-2x^2+6x-1}{(x^2-1)^2}$; 2) $\dfrac{2x^2-7}{(x^3+16x)(x-3)}$;

3) $\dfrac{6x^2-3x+7}{(x+2)(x^2+4)^2}$; 4) $\dfrac{7x^3-10}{(x-1)^3(3x^2+x+7)}$;

5) $\dfrac{7x^3+x^2-4x+5}{(x^2-4)^2}$; 6) $\dfrac{3x^2-5x+7}{(x+2)(x^2+1)}$.

42. Представить рациональные дроби в виде суммы простейших дробей, не вычисляя коэффициентов.

1) $\dfrac{2x^2-4}{(x+1)^2(x+3)^3}$; 2) $\dfrac{4x^3-x^2+5x-1}{(x^2-4x+3)^2(x-5)}$;

3) $\dfrac{x^3+6x+5}{(2x^2+2x+5)(x-8)^2}$; 4) $\dfrac{x^3+9}{x^3-5x^2+6x}$;

5) $\dfrac{3x-11}{\left(x^3+4x\right)\left(x^2+8x+18\right)}$; 6) $\dfrac{2x^2-4x+6}{(x+2)^2\left(x^2-1\right)}$; 7) $\dfrac{3x+5}{x^4-x^2}$;

8) $\dfrac{4x+1}{(x-3)^2(x^2+2x+5)}$; 9) $\dfrac{2x^4+x^3+5}{(x-4)^3(x^2+5x+17)}$.

43. Найти неопределенные интегралы:

1) $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2+x+4}dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$;

3) $\displaystyle\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{4dx}{x\left(x^2+4\right)}$;

5) $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+2}{x\left(x^2+2x+1\right)}dx$; 6) $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$.

44. Найти неопределенные интегралы:

1) $\displaystyle\int\frac{x^2+x-8}{x^3-4x}dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{2x-3}{(x^2-1)(x+2)}dx$;

3) $\displaystyle\int\frac{2x^2+6x+7}{x^3-1}dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{6x^2-12x+6}{(x-2)^3}dx$;

5) $\displaystyle\int\frac{2x^2+x+3}{x^3+2x^2-3x}dx$; 6) $\displaystyle\int\frac{3x+31}{\left(x^2+1\right)x}dx$;

7) $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^3+2x^2+5x}dx$; 8) $\displaystyle\int\frac{3x^2-6x+7}{(x+1)^2(x-2)}dx$; 9) $\displaystyle\int\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$.

Ответы: **40.** 2) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{7}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$; 3) $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$; 4) $\frac{1}{x-1}+\ln\frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|}+C$; 5) $\frac{1}{2}arctgx+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C$;

7) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}arctg\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$; (в знаменателе подынтегрального выражения прибавить и вычесть $2x^2$).

8) $\frac{x-1}{2\left(x^2+1\right)}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)+C$. **43.** 2) $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|+C$;

4) $\ln\frac{\sqrt{x^2+4}}{|x|}+C$; 6) $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$.

44. 9) $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-arctgx+C$.

6. Интегрирование иррациональных функций

Первообразные иррациональных функций являются элементарными функциями в сравнительно редких случаях.

Рассмотрим такие иррациональные функции, интегрирование которых сводится, с помощью определенной замены переменной, к интегрированию рациональных функций.

1. Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt[k]{x},\sqrt[m]{x},\ldots,\sqrt[s]{x}\right)dx$,

где подынтегральная функция является рациональной функцией своих аргументов.

Замена $x=t^n$, где n – наименьшее общее кратное всех показателей $k,m,...,s$, приводит исходный интеграл к интегралу от рациональной функции переменной *t.*

2. В интегралах вида $\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx$ используется замена $ax+b=t^n$.

3. Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ вычисляются заменой $x=a\cos t$ или $x=a\sin t$.

Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ вычисляются с помощью замены $x=\frac{a}{\cos t}$ или $x=\frac{a}{\sin t}$.

Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx$ можно вычислить с помощью замены $x=a\,tgt$ или $x=a\,ctgt$.

4. Рассмотрим интеграл: $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, где $m,\ n,\ p$ – рациональные числа, $a,\ b$ – действительные числа. Подынтегральное выражение называется *дифференциальным биномом*. Интеграл от него сводится к интегралам от рациональных функций в трех случаях:

1) Если p – целое, то выполняется подстановка $x=t^N$, где N – общий знаменатель дробей m и n.

2) Если p не является целым числом, но $\frac{m+1}{n}$ – целое, то выполняется подстановка $a+bx^n=t^N$, где N – знаменатель числа p.

3) Если числа p и $\frac{m+1}{n}$ не являются целыми, но $\frac{m+1}{n}+p$ – целое, то выполняется подстановка $a+\frac{b}{x^n}=t^N$, где N – знаменатель числа p.

Если ни одно из трех чисел p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ не является целым числом, то по теореме Чебышева интегралы данного вида не могут быть выражены конечной комбинацией элементарных функций.

Пример 7. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[6]{(x+1)^5}}$.

Решение.

1) $$\int\frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}=\begin{bmatrix}x=t^6, & dx=6t^5dt\\ \sqrt{x}=t^3, & \sqrt[3]{x}=t^2\end{bmatrix}=\int\frac{t^3\cdot 6t^5dt}{t^6-t^4}=6\int\frac{t^4}{t^2-1}dt,$$

Подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью, поэтому выделим ее целую часть и остаток:

$$=6\int\frac{\left(t^4-1\right)+1}{t^2-1}dt=6\int\left(t^2+1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=2t^3+6t+3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$

$$=2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.$$

2) $$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[6]{(x+1)^5}}=\begin{bmatrix}x+1=t^6, & dx=6t^5dt\\ \sqrt[6]{x+1}=t, & \sqrt[3]{x+1}=t^2\end{bmatrix}=\int\frac{\left(t^6-1\right)6t^5dt}{t^8-t^5}=$$

$$=6\int\frac{\left(t^6-1\right)t^5dt}{t^5\left(t^3-1\right)}=6\int\left(t^3+1\right)dt=6\left(\frac{t^4}{4}+t\right)+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+6\sqrt[6]{x+1}+C.$$

Ответ: 1) $2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C$; 2) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+6\sqrt[6]{x+1}+C$.

Задания для аудиторной работы

45. Найти интегралы от иррациональных функций:

1) $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; 3) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$; 5) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$; 6) $\int x^5\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}dx$;

7) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$; 8) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; 9) $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx$.

Задания для индивидуальной работы

46. Найти интегралы от иррациональных функций:

1) $\int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}}dx$; 2) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; 3) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$;

4) $\int \frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt[3]{x+2}}dx$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-1}-\sqrt[4]{4x-1}}$; 6) $\int x^3\sqrt{9-x^2}dx$.

47. Найти интегралы от иррациональных функций:

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$; 2) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x+\sqrt[3]{x^4}}dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}$; 4) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$;

5) $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$; 6) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}dx$; 7) $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2+\sqrt[3]{x+1}+1}}dx$.

48. Найти интегралы:

1) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[12]{x^5}-\sqrt[3]{x}\right)}$;

3) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}}dx$; 4) $\int \frac{x+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$;

5) $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}-1}{(x+3)\left(1+\sqrt[3]{x+3}\right)}dx$; 6) $\int \frac{dx}{2\sqrt[4]{x-4}+\sqrt{x-4}}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+7}+\sqrt[3]{4x+7}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{8-x}+\sqrt{8-x}}$;

9) $\int \frac{dx}{3\sqrt[6]{3x-4}+\sqrt{3x-4}}$; 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}-9\sqrt[6]{2-5x}}$;

11) $\int \frac{\sqrt{2x-1}dx}{\sqrt{2x-1}+1}$; 12) $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 dx$.

Ответы: **45.** 3) $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{12}{5}\sqrt[12]{x^5}+\frac{12}{5}\ln|x^{\frac{5}{12}}-1|+C$;

4) $\left(1+\sqrt[4]{2x-1}\right)^2+2\ln\left|\sqrt[4]{2x-1}\right|+C$; 5) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$;

6) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^5}+C$. **47.** 1) $\frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{4}}-\ln|x^{\frac{3}{4}}+1|\right)+C$;

5) $-\arcsin\frac{1}{x+1}+C$; 6) $\frac{1}{3}\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2+2}+C$.

7. Интегрирование тригонометрических функций

Интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где R – рациональная функция своих аргументов, с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t=tg\frac{x}{2}$ сводится к интегралу от рациональной функции переменной t. При этом, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

В ряде случаев для нахождения интеграла от тригонометрических функций удобны другие подстановки. Например, $t=tgx$, $t=ctgx$, $t=\sin x$, $t=\cos x$.

Отметим некоторые *частные случаи* применения таких подстановок.

1) Если $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то удобно использовать подстановку $t=\cos x$.

2) Если $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то можно использовать подстановку $t=\sin x$.

3) Если $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, можно использовать подстановку $t=tgx$.

4) В интегралах вида $\int\sin^{2m}x\cos^{2n}xdx$ $(m>0,n>0)$, подынтегральное выражение можно преобразовать с помощью формул понижения степени:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\qquad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

5) В интегралах вида $\int\sin mx\cos nxdx$, $\int\sin mx\sin nxdx$, $\int\cos mx\cos nxdx$ произведения тригонометрических функций можно заменить суммой, используя формулы:

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right);$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right);$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right)$$

Пример 8. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{ctg^6 3x}{\sin^2 3x}dx$;   2) $\int\sin^3 2x\cos^4 2xdx$; 3) $\int\sin^2 x\cos^2 xdx$; 4) $\int tg^5 dx$;

5) $\int\sin x\sin 3x\sin 2xdx$;   6) $\int\frac{dx}{2\sin x+3\cos x+5}$;   7) $\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Решение.

1) $$\int\frac{ctg^6 3x}{\sin^2 3x}dx=\left[\begin{array}{l} t=ctg3x;\ dt=\dfrac{-3dx}{\sin^2 3x} \\ \dfrac{dx}{\sin^2 3x}=-\dfrac{dt}{3}\end{array}\right]=-\frac{1}{3}\int t^6dt=-\frac{t^7}{21}+C=-\frac{ctg^7 3x}{21}+C.$$

2) $$\int\sin^3 2x\cos^4 2xdx=\int\sin^2 2x\cos^4 2x\sin 2xdx=$$

$$=\left[\begin{array}{l} t=\cos 2x \\ \sin 2xdx=-\dfrac{1}{2}d\left(\cos 2x\right)=-\dfrac{1}{2}dt \\ \sin^2 2x=1-\cos^2 2x=1-t^2\end{array}\right]=-\frac{1}{2}\int\left(1-t^2\right)t^4dt=\frac{1}{2}\int\left(t^6-t^4\right)dt=$$

$$=\frac{t^7}{14}-\frac{t^5}{10}+C=\frac{\cos^7 2x}{14}-\frac{\cos^5 2x}{10}+C.$$

3) $$\int\sin^2 x\cos^2 xdx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2xdx=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{8}\int(dx-\cos 4xdx)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

4) $$\int tg^5dx=\left[\begin{array}{l} t=tgx;\ \ x=arctg\ t \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right]=\int\frac{t^5dt}{1+t^2}=\int\frac{t^4}{1+t^2}tdt=\frac{1}{2}\int\frac{t^4}{1+t^2}d\left(t^2\right)=$$

$$=\left[t^2=z\right]=\frac{1}{2}\int\frac{z^2}{1+z}dz=\frac{1}{2}\int\frac{\left(z^2-1\right)+1}{z+1}dz=\frac{1}{2}\int\left(z-1+\frac{1}{z+1}\right)dz=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2}-z+\ln|z+1|\right)+C=\frac{1}{4}\left(tg^4x-2tg^2x+2\ln\left(1+tg^2x\right)\right)+C.$$

5) $\int \sin x \sin 3x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x)\sin 2x dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x \sin 2x dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin 4x dx - \frac{1}{4}\int (\sin 6x - \sin 2x) dx = -\frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 6x}{24} - \frac{\cos 2x}{8} + C.$$

6) $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 5} = \begin{bmatrix} tg\frac{x}{2} = t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{bmatrix} =$

$$= \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{4t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5\right)} = \int \frac{2dt}{4t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 4} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{t+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{1 + tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

7) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x\left(2 + ctg^2 x\right)} = \int \frac{d(ctgx)}{ctg^2 x + 2} =$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{ctgx}{\sqrt{2}} + C.$$

Ответ: 1) $-\frac{ctg^7 3x}{21} + C$; 2) $\frac{\cos^7 2x}{14} - \frac{\cos^5 2x}{10} + C$; 3) $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$;
4) $\frac{1}{4}\left(tg^4 x - 2tg^2 x + 2\ln\left(1 + tg^2 x\right)\right) + C$; 5) $-\frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 6x}{24} - \frac{\cos 2x}{8} + C$;
6) $\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{1 + tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C$; 7) $-\frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{ctgx}{\sqrt{2}} + C$.

Задания для аудиторной работы

49. Найти интегралы от тригонометрических функций

1) $\int \frac{\sin x\, dx}{(1-\cos x)^2}$; 2) $\int \frac{\sin 4x\, dx}{\cos x}$; 3) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$;

4) $\int \cos^4 2x\, dx$; 5) $\int tg^5 x\, dx$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{3}\cos x + \sin x}$;

7) $\int \sin 3x \cos 5x\, dx$; 8) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$; 9) $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x + 1}$;

10) $\int \frac{dx}{16\sin^2 x + \cos^2 x}$; 11) $\int \frac{\cos x - 2\sin x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$; 12) $\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx$.

Задания для индивидуальной работы

50. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{\sin 8x}{16-\cos^2 8x}dx$; 2) $\int \sqrt[9]{\cos^7 x}\sin 2x dx$;

3) $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^3 x}dx$; 4) $\int \sin^4 2x\cos^2 2x dx$;

5) $\int \cos^6 3x dx$; 6) $\int tg^2 5x dx$;

7) $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{5x}{3}dx$; 8) $\int \frac{dx}{2+5\cos x}$; 9) $\int \frac{4\cos x}{\sin^2 x+5\sin x+6}dx$.

51. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{\sin 3x}{1+\cos^2 3x}dx$; 2) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{3+4\sin^2 2x}}dx$;

3) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$; 4) $\int \sin^4 3x dx$;

5) $\int \cos^3 x\sin^{10} x dx$; 6) $\int \cos 3x\sin 6x\,dx$;

7) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx$; 8) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$;

9) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$; 10) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$;

11) $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}$; 12) $\int \sqrt{tgx}dx$.

52. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{tg^7 3x}{\cos^2 3x}dx$; 2) $\int \cos^4 5x\sin 5x\,dx$;

3) $\int \frac{\sin x dx}{4+\cos^2 x}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{tg^3 2x}\cos^2 2x}$;

5) $\int \sin^7 x\cos^5 x\,dx$; 6) $\int \sin 2x\cos^2 x\,dx$;

7) $\int \sqrt[7]{\cos^2 x}\sin^3 x\,dx$; 8) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$;

9) $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$; 10) $\int \sin^4 3x\,dx$;

11) $\int \sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}dx$; 12) $\int \frac{dx}{\cos^4 5x}$;

13) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$; 14) $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos x}$;

15) $\int \frac{\sin^4 3x}{\cos^2 3x} dx$; 16) $\int \sin 7x \sin x \, dx$;

17) $\int \sin x \cos 9x \, dx$; 18) $\int \cos 6x \cos 8x \, dx$;

19) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x}$; 20) $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x}$;

21) $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 6\cos x}$; 22) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + \cos^2 x + 6}$.

Ответы: **50.** 8) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right|$; 9) $4\ln\left|\frac{t+3}{t+2}\right|+C$. **51.** 9) $\frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{\sqrt{3}tgx}{\sqrt{5}} + C$;

10) $\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right|+C$; 11) $\ln|tgx| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C$;

12) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left(\sin x + \cos x - \sqrt{\sin 2x}\right) + \arcsin(\sin x - \cos x)\right) + C$.

Варианты самостоятельной работы

Вариант 1

1) $\int \frac{x^4 dx}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$; 2) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$; 3) $\int \frac{\cos x \, dx}{7\sin^2 x + 4\cos^2 x}$.

Вариант 2

1) $\int \frac{x^2 - 72}{x^4 + x^3 - 12x^2} dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)}$; 3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x}$.

Вариант 3

1) $\int \frac{3x^4 - x^2 + 1}{x^3 - x} dx$; 2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}}$; 3) $\int \frac{\sin x \, dx}{\sin^2 x - 6\cos^2 x}$.

Вариант 4

1) $\int \frac{2x-1}{x^2 - 3x + 2} dx$; 2) $\int x\sqrt{x-8} \, dx$; 3) $\int \frac{\sin^2 4x dx}{\cos^4 4x}$.

Вариант 5

1) $\int \frac{(4x-19)dx}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$; 2) $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}} dx$; 3) $\int tg^3 x \, dx$.

Вариант 6

1) $\int \frac{4x^2 + 9}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x} + \sqrt[4]{3x}}$; 3) $\int \cos^2 3x \cos 9x \, dx$.

8. Определенный интеграл, его свойства и вычисление

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Разобьем этот отрезок с помощью системы точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n частичных отрезков. На каждом из отрезков $[x_{i-1},\ x_i]$, $i = \overline{1, n}$ выберем произвольную точку ξ_i, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ и составим так называемую *интегральную сумму* функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$: $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Обозначим $\lambda = \max\limits_i \{\Delta x_i\}$.

Определенным интегралом функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральной суммы

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}} \sigma_n = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то этот предел всегда существует независимо от разбиения отрезка на частичные отрезки длиной Δx_i и выбора на них точек ξ_i.

Таким образом, функция, непрерывная на отрезке, *интегрируема* на нем.

Основные свойства определенного интеграла

1) $\int\limits_a^b \left(C_1 f_1(x) \pm C_2 f_2(x)\right)dx = C_1\int\limits_a^b f_1(x)dx \pm C_2\int\limits_a^b f_2(x)dx$, где C_1, C_2 – константы.

2) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$. 3) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

5) Если $f(x) \ge g(x)$ для всех x из отрезка $[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_a^b g(x)dx$. В частности, если $f(x) \ge 0$ $(f(x) \le 0)$ на отрезке $[a;b]$ то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$ $\left(\int\limits_a^b f(x)dx \le 0\right)$.

6) Если подынтегральная функция интегрируема на отрезке $[a; b]$ и на этом отрезке функция ограничена, т.е справедливо неравенство $m \le f(x) \le M$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

7) *Теорема о среднем.* Если подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует такая точка $c \in [a; b]$, что справедливо равенство $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

8) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, то имеет место равенство $\Phi'(x) = f(x)$, т.е. производная от интеграла с переменным верхним пределом равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена значением верхнего предела.

Правила вычисления определенного интеграла.

1. *Формула Ньютона – Лейбница.* Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ какая-либо первообразная функции $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2. *Замена переменной в определенном интеграле.* Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем для любого $t \in [\alpha, \beta]$ $\varphi(t) \in [a, b]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

3. *Интегрирование по частям.* Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a; b]$, тогда справедлива формула

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

4. Если функция $f(x)$ нечетная на отрезке $[-a;a]$, т.е. $f(-x)=-f(x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=0$. Если $f(x)$ четная на отрезке $[-a;a]$, т.е. $f(-x)=f(x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

Пример 9. Вычислить определенные интегралы:

1) $\int\limits_{1}^{8}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)dx$; 2) $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$; 3) $\int\limits_{e}^{e^2} x\ln x dx$.

Решение.

1) $\int\limits_{1}^{8}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)dx=\int\limits_{1}^{8}\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)dx=\left(\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x\right)\Bigg|_{1}^{8}=\left(\dfrac{3}{4}\cdot 2^4-8\right)-\left(\dfrac{3}{4}-1\right)=4{,}25$.

Геометрически, полученный результат означает, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=1$, $x=8$, $y=0$, $y=\sqrt[3]{x}-1$, равна 4,25 ед^2.

$$2)\ \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=\begin{bmatrix} x=\sin t,\ dx=\cos tdt \\ t=\arcsin x \\ t_н=\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4} \\ t_в=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}\end{bmatrix}=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 tdt}{\sin^2 t}=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=\left(-ctgt-t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-\left(ctg\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+\left(ctg\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{12}-\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}161.$$

3) Применим теорему интегрирования по частям.

$$\int\limits_{e}^{e^2} x\ln xdx=\begin{bmatrix} u=\ln x,\ du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=xdx,\quad v=\dfrac{x^2}{2}\end{bmatrix}=\left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Bigg|_{e}^{e^2}-\int\limits_{e}^{e^2}\frac{x^2dx}{2x}=$$

$$=\frac{e^4}{2}\cdot 2-\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Bigg|_{e}^{e^2}=e^4-\frac{e^2}{2}-\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{4}=\frac{1}{4}\left(3e^4-e^2\right)\approx 39{,}10.$$

Ответ: 1) 4,25; 2) $1-\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{1}{4}\left(3e^4-e^2\right)$.

Пример 10. Вычислить среднее значение функции $y=\dfrac{1}{2\cos x+3}$ на отрезке $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Применим теорему о среднем: $f(c)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

$$f(c)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\cos x+3}=\left[\begin{array}{l} tg\,\dfrac{x}{2}=t,\ \ x=2arctg\ t \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2},\ \ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ t_в=tg\,\dfrac{\pi}{4}=1,\ \ t_н=tg0=0 \end{array}\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(2\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+3\right)}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^1\frac{dt}{t^2+5}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\,\frac{t}{\sqrt{5}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{\pi\sqrt{5}}arctg\,\frac{\sqrt{5}}{5}\approx 0,2394.$$

Ответ: $\dfrac{4}{\pi\sqrt{5}}arctg\,\dfrac{\sqrt{5}}{5}\approx 0,2394$.

Задания для аудиторной работы

53. Вычислить определенные интегралы:

1) $\displaystyle\int_1^2\left(2x^2+\frac{2}{x^4}\right)dx$; 2) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$; 3) $\displaystyle\int_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$;

4) $\displaystyle\int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 5) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2+4x+5}$; 6) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$;

7) $\displaystyle\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; 8) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}x\cos x\,dx$; 12) $\displaystyle\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx$;

13) $\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$; 14) $\displaystyle\int_3^4\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx$; 15) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{xdx}{\cos^2 x}$.

54. Найти среднее значение функции $f(x)=\dfrac{1}{1+2\sin^2 x}$ на отрезке $\left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.

55. Исследовать на экстремум функцию $F(x)=\displaystyle\int_0^x(t-1)(t-2)^2\,dt,\ \ x\in$ Ў.

Задания для индивидуальной работы

56. Вычислить определенные интегралы:

1) $\int\limits_1^4 \sqrt{x}dx$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$; 3) $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

4) $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$; 5) $\int\limits_2^3 y\ln(y-1)dy$; 6) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$;

7) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$; 8) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 9) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos 2xdx$;

10) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx$; 11) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}}$.

57. Вычислить определенные интегралы:

1) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$; 2) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$; 3) $\int\limits_2^3 \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$;

4) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ar\cos 2xdx$; 5) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2(x-1)}$; 6) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$;

7) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$; 8) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}dx$; 9) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx$;

10) $\int\limits_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}}dx$; 11) $\int\limits_0^1 arctg\sqrt{x}dx$; 12) $\int\limits_0^{\pi} x^2\sin xdx$;

13) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}dx$; 14) $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$; 15) $\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3dx}{\sqrt{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)^3}}$.

58. Вычислить определенные интегралы:

1) $\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 xdx}{\sqrt[3]{\sin x}}$; 2) $\int\limits_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$; 3) $\int\limits_0^1 3x^2\left(1+e^{x^3}\right)dx$;

4) $\int\limits_{1{,}5}^{2} arctg\left(2x-3\right)dx$; 5) $\int\limits_{2}^{3}\frac{\left(x+2\right)dx}{x^2\left(x-1\right)}$; 6) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{xdx}{\sin^2 x}$;

7) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} arctg\,\frac{1}{x}dx$; 8) $\int\limits_{2\sqrt{3}}^{2\sqrt{8}}\frac{x^3dx}{\sqrt{4+x^2}}$; 9) $\int\limits_{0}^{\pi}\left(x+2\right)\cos\frac{x}{2}dx$.

59. Найти среднее значение функции $f\left(x\right)$ на отрезке $\left[a;\ b\right]$:

1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{25+3x}}$, $a=-3$, $b=0$; 2) $f\left(x\right)=xe^{-x}$, $a=0$, $b=1$;

3) $f(x)=\frac{\sin(\ln x)}{x}$, $a=1$, $b=e$; 4) $f\left(x\right)=(x-1)\ln x$, $a=1$, $b=2$.

Ответы: **53.** 1) $\frac{21}{4}$; 4) 2; 5) $arctg\,\frac{1}{7}$; 6) $\frac{4}{3}$; 7) $2-\ln 2$. **56.** 1) $\frac{14}{3}$; 5) 1,02; 7) 0,60; 9) π; 10) 0,38. **57.** 2) $\frac{1}{5}\ln 112$; 3) 3,19; 5) 0,12; 6) π; 7) $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$; 9) $\frac{848}{105}$; 14) 0,02; 15) 1,3333. **58.** 1) –0,086; 2) 1; 3) e; 4) 2,576; 5) 0,0959; 6) 0,796; 7) 0,468; 8) 42,667; 9) 6,2832. **59.** 1) 0,222; 2) 0,264; 3) 0,2675; 4) 0,25.

9. Вычисление несобственных интегралов

Несобственным интегралом называются интеграл с бесконечными пределами интегрирования или интеграл от неограниченной на заданном отрезке функции.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Пусть функция $y=f\left(x\right)$ непрерывна на полуинтервале $\left[a,+\infty\right)$. Тогда несобственный интеграл от функции $f\left(x\right)$ на этом полуинтервале определяется равенством: $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$.

Если предел, стоящий в правой части равенства, существует и конечен, то несобственный интеграл называют *сходящимся*; если этот предел не существует или бесконечен, то интеграл называют *расходящимся.*

Геометрически интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx$ в случае положительной подынтегральной функции $\left(f\left(x\right)>0\right)$ представляет собой площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f\left(x\right)$, прямой $x=a$ и осью Ox. Если интеграл сходится, то площадь фигуры выражается конечным числом; для расходящегося интеграла площадь фигуры бесконечна.

Аналогично определяют несобственные интегралы от непрерывных функций на полуинтервале $(-\infty;\ b]$: $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$,

и на промежутке $(-\infty,+\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{c}^{b} f(x)dx.$$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся, если сходятся оба интеграла $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$, $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$; если хотя бы один из интегралов расходится, то будет расходиться и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Признаки сходимости интегралов с бесконечными пределами

1. Пусть для всех $x\in[a;\ +\infty)$ выполняется $0\le f(x)\le\varphi(x),\ a>0$.

Если $\int\limits_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, причем $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_{a}^{+\infty}\phi(x)dx.$

Если $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx.$

2. Если для всех $x\in[a;\ +\infty)$ $f(x)>0,\ \varphi(x)>0,\ a>0$ и существует конечный предел отношения $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\ne 0$, то интегралы $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx$ ведут себя одинаково, т. е. сходятся или расходятся одновременно.

Приведенные выше теоремы называют *признаками сравнения*. При их применении часто используется интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$, который сходится при $p>1$ и расходится при $0<p\le1$.

3. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx \quad (a>0)$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, причем его сходимость называется *абсолютной*.

Интегралы от неограниченных функций.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a,b)$ и $\lim\limits_{x\to b-\varepsilon} f(x)=\infty$, то $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

Этот интеграл сходится, если предел, стоящий в правой части равенства, равен конечному числу.

Геометрически такой интеграл для положительной подынтегральной функции $(f(x)>0)$ представляет собой площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, прямой $x=a$ и вертикальной асимптотой $x=b$.

Если подынтегральная функция $y=f(x)$ непрерывна для всех $x\in(a,b]$ и в точке $x=a$ имеет бесконечный разрыв, то $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{a+\delta}^b f(x)dx$.

Если функция $y=f(x)$ имеет бесконечный разрыв и точке $c\in(a,b)$ и непрерывна для всех $x\in[a,c)\cup(c,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx.$$

Если оба предела в правой части равенства существуют и конечны, то исходный интеграл называют *сходящимся*; если хотя бы один из пределов не существует или равен бесконечности, то интеграл называют *расходящимся*.

Справедливы признаки сходимости и расходимости интегралов от неограниченных функций, аналогичные признакам сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами. Эталонами для сравнения служат интегралы

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}\ (\alpha>0) \text{ или } \int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}\ (\alpha>0),$$

которые сходятся при $0<\alpha<1$, и расходятся при $\alpha\ge 1$.

Пример 11. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: 1) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$; 2) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3}$.

Решение.

1) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}d\left(-x^2\right) = -\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b e^{-x^2}d\left(-x^2\right) =$

$= -\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(e^{-x^2}\right)\Big|_0^b = -\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{b^2}} + \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}$, значит, интеграл сходится.

2) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = -\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_0^{2-\varepsilon}(2-x)^{-\frac{1}{2}}d(2-x) = -\lim\limits_{\varepsilon\to0}2\sqrt{2-x}\Big|_0^{2-\varepsilon} =$

$= -2\lim\limits_{\varepsilon\to0}\sqrt{\varepsilon} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, интеграл сходится.

3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3} = \lim\limits_{a\to0}\int\limits_a^1 x^{-3}dx = \lim\limits_{a\to0}\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_a^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lim\limits_{a\to0}\frac{1}{a^2} = \infty$, следовательно, интеграл расходится.

Ответ: 1) $\frac{1}{2}$; 2) $2\sqrt{2}$; 3) расходится.

Пример 12. Исследовать сходимость интегралов, используя признаки сравнения: 1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+3x^2}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. 1) Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}+3x^2}$ при $x=0$ терпит бесконечный разрыв. Очевидно, что при $x>0$ справедливо неравенство $\frac{1}{\sqrt[4]{x}+3x^2} \le \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$. Рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \lim\limits_{a\to0}\int\limits_a^1 x^{-\frac{1}{4}}dx = \frac{4}{3}\lim\limits_{a\to0}\sqrt[4]{x^3}\Big|_a^1 = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}.$$

Тогда интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+3x^2}$ сходится по первому признаку сравнения.

2) Оценим подынтегральную функцию $f(x) = \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}$. Для всех $x\in[1;+\infty)$ справедливо неравенство $\frac{1}{\sqrt{x}} \le \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}} \le \frac{3}{\sqrt{x}}$.

Рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\lim_{b\to\infty}\sqrt{x}\Big|_{1}^{b}=2\lim_{b\to\infty}\sqrt{b}-2=\infty.$$

Тогда $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}dx$ расходится по второму признаку сравнения.

Ответ: 1) сходится; 2) расходится.

Задания для аудиторной работы

60. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

1) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_{0}^{+\infty}\sin 2x\,dx$; 3) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

61. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

1) $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\ln x}$; 3) $\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; 4) $\int\limits_{0}^{2,5}\frac{dx}{x^2-5x+6}$.

62. Исследовать интегралы на сходимость:

1) $\int\limits_{0}^{100}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}$; 2) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$; 3) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}dx$; 4) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\ln x}$.

Задания для индивидуальной работы

63. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}$; 2) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{arctgx}{x^2+1}dx$; 3) $\int\limits_{e}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+8x+17}$.

64. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$; 3) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$; 4) $\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

65. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}$; 2) $\int\limits_{2}^{3}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}$; 3) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2-1\right)^2}$;

4) $\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(5-x)}}$; 5) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{arctgxdx}{x^2+1}$; 6) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$;

7) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+8x+17}$; 8) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x^2}}$; 9) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$;

10) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; 11) $\int\limits_{0}^{1}x\ln x\,dx$; 12) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^3-6x^2}$;

13) $\int\limits_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x^3-4x^2}$; 14) $\int\limits_{\pi}^{+\infty}\sin x dx$; 15*) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2-1\right)^2}$;

16) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}ctgxdx$; 17) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^3+1}$; 18) $\int\limits_{0}^{\infty}x^3e^{-x^2}dx$.

66. Исследовать интегралы на сходимость:

1) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$; 3) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$;

4) $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{x^2-6x+8}$; 5) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x+1}{x\sqrt{x+1}}dx$; 6) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1}dx$;

7) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+4}dx$; 8) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

67. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

1) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$; 2) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(x^5+3x^4)^7}}$; 3) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\left(3x^2+4x+1\right)dx}{\sqrt[3]{\left(2x+3\right)^{10}}}$;

4) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{e^x-\cos x}$; 5) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\ln\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)dx}{\ln(1+x)}$; 6) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^8dx}{\sqrt{64-x^6}}$;

7) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{\left(4+x^2\right)\sqrt{arctg0,5x}}$; 8) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^8 x}}$.

Ответы: **60.** 1) 0,5; 2) расх.; 3) $\frac{\pi}{4}$. **61** 1) 1; 2) расх.; 3) $\frac{8}{3}$. **62.** 1) сходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) расходится. **63.** 1) расходится; 2) $\frac{\pi^2}{8}$; 3) 0,5; 4) 2,897. **64.** 1) 2; 2) расходится; 3) $\frac{1}{\ln 2}$; 4) $\frac{8}{3}$. **65.** 1) π; 2) 2, 236; 3) 0,059; 4) 3, 142; 5) 1, 234; 6) 1, 814; 7) 2, 897; 8) 0,676; 15) $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ln 3$; 16) расходится; 17) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; 18) 0,5. **66.** 1) сходится. **67.** 1) сходится; 2) расходится; 3) сходится; 4) расходится; 5) сходится; 6) расходится; 7) сходится; 8) расходится.

10. Геометрические приложения определенных интегралов. Вычисление площадей плоских фигур

Рассмотрим следующие случаи.

1. Фигура на плоскости ограничена графиком непрерывной функции $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$, если $a < x < b$), прямыми $x = a$ и $x = b$, осью абсцисс (рис. 1). Площадь такой фигуры можно вычислить с помощью формулы

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

2. Криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$ ($\varphi(y) \geq 0$, если $y \in [c, d]$), прямыми $y = c$ и $y = d$, осью ординат (рис. 2). Площадь этой фигуры можно вычислить по формуле

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy.$$

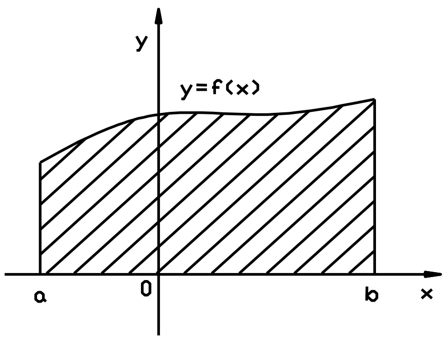


Рис. 1

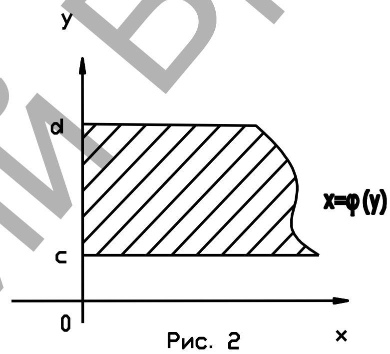


Рис. 2

3. – 4. Площади фигур, представленных на рис. 3 и 4, могут быть найдены соответственно по формулам:

$$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right)dx. \qquad S = \int_c^d \left(\varphi_1(y) - \varphi_2(y)\right)dy.$$

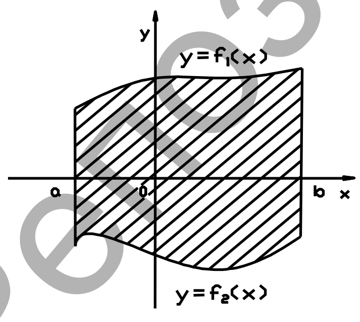


Рис. 3

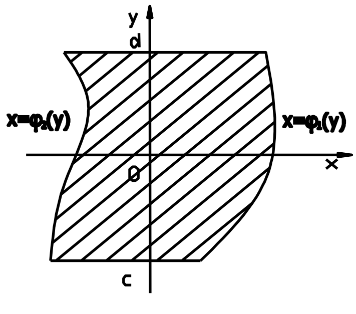


Рис. 4

5. Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком непрерывной функции, заданной параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, то площадь фигуры можно найти по формуле $S = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt$.

6. Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат может быть найдена с помощью формул:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi. \qquad S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(r_1^2(\varphi)-r_2^2(\varphi)\right)d\varphi.$$

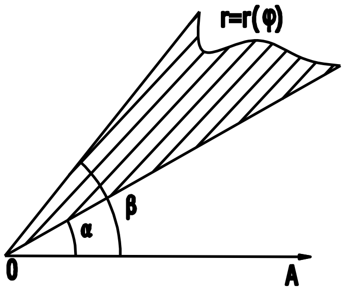


Рис. 5

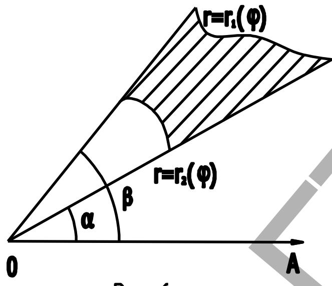


Рис. 6

Задания для аудиторной работы

68. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+4$ и прямой $y=x+4$.

69. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln x$ и прямыми $x=e$, $x=e^2$, $y=0$.

70. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y^3=x$, прямыми $y=1$ и $x=5$.

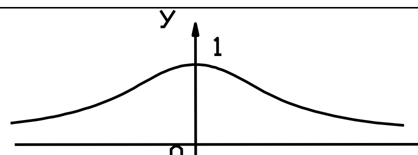
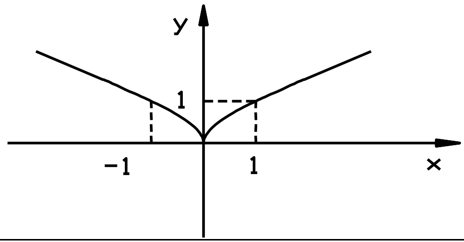
71. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ и ее асимптотой.

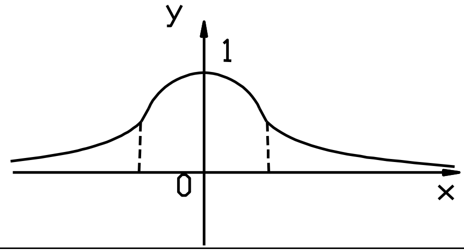
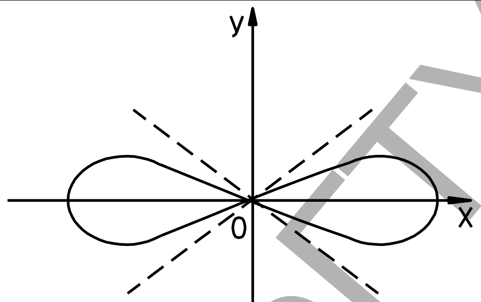
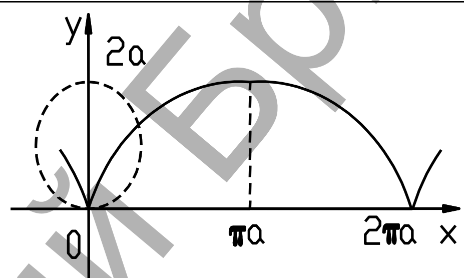
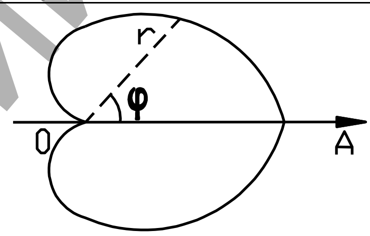
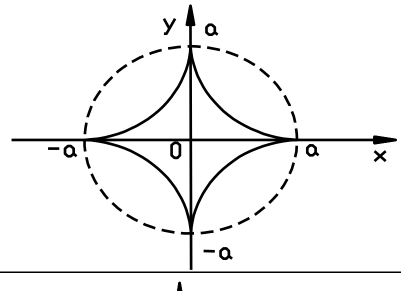
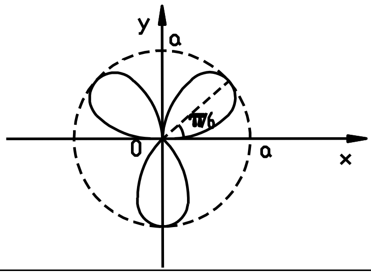
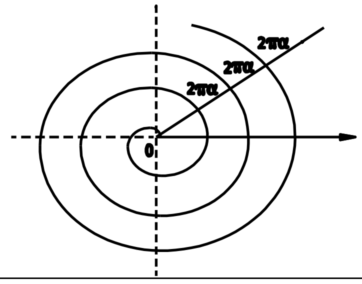
72. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ и осью Ox.

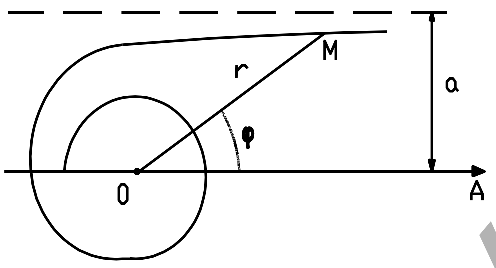
73. Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой $y^2=x^2-x^4$.

74. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=a\sin 3\varphi$.

Некоторые кривые (справочный материал)

1.Локон Аньези $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.	
2. Парабола Нейла $y=\sqrt[3]{x^2}$.	

3. Кривая Гаусса $y=\exp(-x^2)$.	
4. Лемниската Бернулли $r^2=a^2\cos 2\varphi$.	
5. Циклоида $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$	
6. Кардиоида $r=a(1+\cos\varphi)$.	
7. Астроида $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ или $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$	
8. Трехлепестковая роза $r=a\sin 3\varphi$.	
9. Спираль Архимеда $r=a\varphi$.	

10. Гиперболическая спираль $r = \dfrac{a}{\varphi}$.	

Задания для индивидуальной работы

75. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y^2 = 9x$, $y = 3x$; 2) $y^2 = 1 - x$, $x = -3$;

3) $y = x^2 - 6x + 9$, $4x - y = 12$; 4) $y^2 + 8x = 16$, $y^2 - 24x = 48$;

5) $y^2 = x + 5$, $y^2 = -x + 4$.

76. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей линии $\begin{cases} x = 3t^2; \\ y = 4t - t^3. \end{cases}$

77. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $x = 3\cos t$, $y = 5\sin t$; 2) $x = 3\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$;

3) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$; 4) $x = 2t^2, y = 9t - t^3$ (петля).

78. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией в полярной системе координат:

1) $r = a(1 + \cos\varphi)$; 2) $r = a\cos 2\varphi$;

3) $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$; 4) $r = 2 + \cos\varphi$ (улитка Паскаля).

79. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией (перейти к полярным координатам):

1) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$; 2) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(4x^2 + y^2\right)$;

3) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2 x^2 y^2$; 4) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 3x^2 - y^2$.

Ответы: **68.** 20,83. **70.** 4,25. **71.** π. **72.** $3a^2\pi$. **73.** 1,(3). **74.** $0,25a^2\pi$.

75. 1) 0,5; 2) $\dfrac{32}{3}$; 3) $\dfrac{32}{3}$; 4) $\dfrac{32\sqrt{6}}{3}$; 5) $18\sqrt{2}$. **76.** 51,2. **77.** 1) 15π; 2) $\dfrac{27\pi}{8}$; 3) 24π; 4) 259,2. **78.** 1) $1{,}5\pi a^2$; 2) $0{,}5\pi a^2$; 3) $0{,}5a^2$; 4) $4{,}5\pi$. **79.** 1) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{5\pi a^2}{2}$; 3) $\dfrac{\pi a^2}{8}$; 4) π.

11. Вычисление длин дуг плоских кривых. Вычисление объемов тел

Формулы для вычисления длины дуги плоской кривой

1. Длину дуги *AB* кривой, заданной уравнением $y = f(x)$,$a \le x \le b$, можно найти по формуле $l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

Если дуга кривой *AB* задана уравнением $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, то длину дуги *AB* можно найти по формуле $l = \int_c^d \sqrt{1+(\varphi'(y))^2}dy$.

2. Длину дуги *AB* кривой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$, можно найти по формуле $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt.$

3. Если известно полярное уравнение дуги *AB* $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\ \beta]$, то ее длину можно найти по формуле $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\ d\varphi$.

Формулы для вычисления объемов тел

1. Если известна площадь $S = S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси *Ox*, $a \le x \le b$, то объем тела можно вычислить по формуле $V = \int_a^b S(x)dx.$

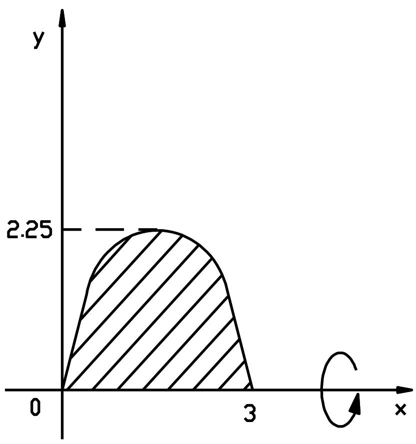
2. Объем тела, полученного при вращении вокруг оси *Ox* (*Oy*) криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной на $[a;\ b]$ функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ можно найти по формуле $V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$ $\left(V_y = 2\pi\int_a^b x \cdot f(x)dx\right)$.

Объем тела, полученного при вращении вокруг оси *Oy* криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной на $[c;\ d]$ функции $x = \varphi(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$, $x = 0$ можно найти по формуле $V_y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$.

3. Пусть плоская фигура ограничена графиками непрерывных на $[a;b]$ функций $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$, причем $f_2(x)\ge f_1(x)$, $x\in[a;b]$. Объем тела вращения этой фигуры вокруг оси Ox можно вычислить по формуле $V_x=\pi\int\limits_a^b\left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx$.

4. Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $r=r(\varphi)$ и лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, вращается вокруг полярной оси, то объем тела вращения можно найти по формуле $V=\dfrac{2}{3}\pi\int\limits_\alpha^\beta r^3(\varphi)\cdot\sin\varphi d\varphi$.

Пример 13. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y=3x-x^2$ и осью Ox.



Решение. При вычислении объемов тел вращения нет необходимости изображать сами тела, достаточно построить плоские фигуры, которые будут вращаться вокруг указанной оси.

Парабола $y=3x-x^2$ пересекает ось Ox в точках $x=0$ и $x=3$.

Воспользуемся формулой $V_x=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

$$V=\pi\int\limits_0^3\left(3x-x^2\right)^2dx=\pi\int\limits_0^3\left(9x^2-6x^3+x^4\right)dx=\pi\left(3x^3-\frac{6x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=\pi\left(81-\frac{3\cdot81}{2}+\frac{3\cdot81}{5}\right)=8{,}1\pi.$$

Ответ: $8{,}1\pi$.

Пример 14. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболой $y=3x-x^2$ и осью Ox.

Решение. Найдем требуемый объем двумя способами.

I способ. Воспользуемся формулой $V_y=2\pi\int\limits_a^b x\cdot f(x)dx$.

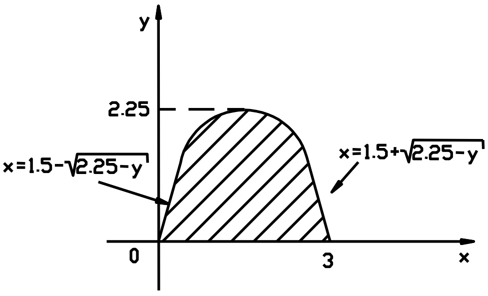
$$V_y=2\pi\int\limits_0^3 x\left(3x-x^2\right)dx=2\pi\int\limits_0^3\left(3x^2-x^3\right)dx=2\pi\left(x^3-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=2\pi\left(27-\frac{81}{4}\right)=\frac{54\pi}{4}=13{,}5\pi.$$

II способ. Преобразуем уравнение параболы следующим образом

$$y = 3x - x^2, \quad x^2 - 3x = -y, \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = -y, \quad (x - 1{,}5)^2 = 2{,}25 - y,$$

$$x - 1{,}5 = \pm\sqrt{2{,}25 - y}, \; x = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - y}.$$



Из рисунка очевидно, что уравнение левой ветви параболы $x = 1{,}5 - \sqrt{2{,}25 - y}$, уравнение правой ветви параболы $x = 1{,}5 + \sqrt{2{,}25 - y}$, $0 \le y \le 2{,}25$.

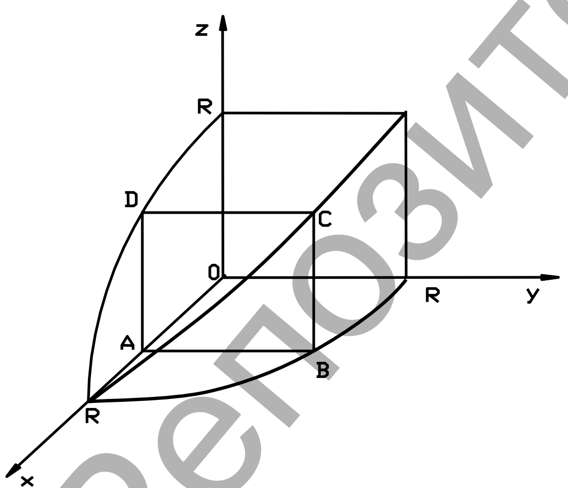
Тогда для вычисления объема воспользуемся формулой $V_y = \pi \int\limits_c^d \left(\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)\right) dy$.

$$V_y = \pi \int\limits_0^{2{,}25} \left((1{,}5 + \sqrt{2{,}25 - y})^2 - (1{,}5 - \sqrt{2{,}25 - y})^2\right) dy = \pi \int\limits_0^{2{,}25} 6\sqrt{2{,}25 - y}\, dy =$$

$$= -6\pi \frac{\sqrt{(2{,}25 - y)^3}}{1{,}5}\Bigg|_0^{2{,}25} = -4\pi\left(0 - \sqrt{2{,}25^3}\right) = 4\pi \cdot 2{,}25 \cdot 1{,}5 = 13{,}5\pi.$$

Ответ: $13{,}5\pi$.

Пример 15. Оси двух круговых цилиндров, радиус основания которых равен *R*, пересекаются под прямым углом. Найти объем тела, составляющего общую часть цилиндров.



Решение. Рассмотрим два круговых цилиндра с взаимно перпендикулярными осями, их уравнения

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad и \quad x^2 + z^2 = R^2.$$

Изобразим одну восьмую часть тела, расположенную в первом октанте.

Рассмотрим сечения данного тела плоскостями, перпендикулярными оси *Ox*.

$x = const$, $y = AB = \sqrt{R^2 - x^2}$,

$z = AD = BC = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Таким образом, сечение представляет собой квадрат АВСД, площадь которого равна $S(x) = AB \cdot BC = R^2 - x^2$.

$$V = 8\int\limits_0^R S(x)dx = 8\int\limits_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx = 8\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = 8\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{16}{3}R^3.$$

Ответ: $\dfrac{16}{3}R^3$.

Задания для аудиторной работы

80. Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ от точки $x_1=1$ до точки $x_2=9$.

81. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t; \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t,\ t\in[0;\ \pi]. \end{cases}$

82. Вычислить длину дуги кардиоиды $r=a(1-\cos\varphi)$.

83. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $4z=x^2+2y^2$, $z=1$.

84. Вычислить объем тела, основание которого область плоскости *xOy*, ограниченная астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, а сечение плоскостью, перпендикулярной оси *Ox*, есть квадрат.

85. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси *Oy* фигуры, ограниченной линиями $y^2=16x$, $x=4$.

86. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ и осью *Ox*.

Задания для индивидуальной работы

87. Вычислить длину дуги кривой $y=\sqrt{2x-x^2}-1$ от точки $x_1=0{,}25$ до точки $x_2=1$.

88. Вычислить длину дуги кривой $y=\ln\left(1-x^2\right)$ от точки $x_1=0$ до точки $x_2=0{,}5$.

89. Вычислить длину дуги кривой $x=\ln\cos y$ от точки $y_1=0$ до точки $y_2=\frac{\pi}{3}$.

90. Вычислить длину дуги параболы $y=2\sqrt{x}$ от точки *A*(0; 0) до точки *B*(1; 2).

91. Вычислить длину дуги кривой $x=0{,}25y^2-0{,}5\ln y$ от $y_1=1$ до $y_2=e$.

92. Вычислить длину дуги кривой $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$ от точки $x_1=0$ до точки $x_2=\frac{9}{16}$.

93. Вычислить длину кривой, заданной параметрически:

1) $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ от точки $t_1=0$ до точки $t_2=\ln\pi$;
2) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ от точки $t_1=0$ до точки $t_2=2\pi$;
3) $x=\sqrt{3}t^2$, $y=t-t^3$ (петля).

94. Вычислить длину астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}}$.

95. Вычислить длину одного витка спирали Архимеда $r = a\varphi$.

96. Вычислить длину дуги гиперболической спирали $r\varphi = 1$ от точки $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ до точки $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

97. Вычислить длину дуги пространственной кривой $x = at^2$; $y = a\left(t + \frac{1}{3}t^3\right)$; $z = a\left(t - \frac{1}{3}t^3\right)$ от $t = 0$ до $t = \sqrt{3}$.

98. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной заданными линиями, вокруг указанной оси:

1) $y = 4x - x^2$, $y = x$ вокруг оси Ox;
2) $y = x^2$, $4x - y = 0$ вокруг оси Oy;
3) $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$ вокруг оси Ox;
4) $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$ вокруг оси Oy;
5) $y = 0{,}5x^2 - 2x + 2$, $y = 2$ вокруг оси Oy;
6) $x^2 - y^2 = 9$, $x = 6$ вокруг оси Ox;
7) $xy = 4$, $2x + y - 6 = 0$ вокруг оси Ox;
8) $y^2 = 16x$, $x = 4$ вокруг оси Oy;
9) $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси Ox.

99. Найти объемы тел, образуемых вращением фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $x = 0$, $y = 0$ вокруг 1) оси Ox; 2) оси Oy.

100. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, содержащейся между параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

101. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной заданными линиями, вокруг указанной оси:

1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{15} = 1$, $x \ge 0$ вокруг оси Ox;
2) $y = e^x + 6$, $y = e^{2x}$, $x = 0$ вокруг оси Oy;
3) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$, $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = -1$ вокруг оси Ox.

102. Найти объем тела, образованного вращением вокруг прямой $y = -p$ фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = \frac{p}{2}$.

103. Найти объем тела, образованного вращением вокруг прямой $x = a$ той части параболы $y^2 = 4ax$, которая этой прямой отсекается.

104. Найти объем тела, образованного вращением кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

105. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью *Ox*.

Ответы. **80.** $\frac{52}{3}$. **81.** $\frac{\pi^3}{3}$. **82.** $8a$. **83.** $\pi\sqrt{2}$. **84.** $\frac{128a^3}{105}$. **85.** $51{,}2\pi$. **86.** $5a^3\pi^2$. **87.** $\arcsin 0{,}75$. **88.** $\ln 3 - 0{,}5$. **89.** $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$. **90.** $\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 2{,}29$. **91.** $0{,}25(e^2+1)$. **92.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **93.** 1) $\sqrt{2}(\pi - 1)$; 2) $6a$; 3) 4. **94.** 48. **96.** $\frac{\sqrt{5}}{2} + \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **97.** $2a\sqrt{6}$. **98.** 5) $\frac{64\pi}{3}$; 6) 36π; 7) $\frac{4\pi}{3}$; 8) $204{,}8\pi$; 9) $\frac{16\pi}{15}$. **99.** 2) 2π. **100.** $\frac{3\pi}{10}$. **101.** 1) $1{,}12\pi$; 2) $3\pi(2\ln 3 - 1)\ln 3$; 3) 70π. **102.** $\frac{4}{3}\pi p^3$. **103.** $\frac{32}{15}\pi a^3$. **104.** $\frac{8}{3}\pi a^3$. **105.** $5\pi^2 a^3$.

12. Приложения определенного интеграла к решению некоторых задач физики и механики

1. Путь, пройденный материальной точкой.

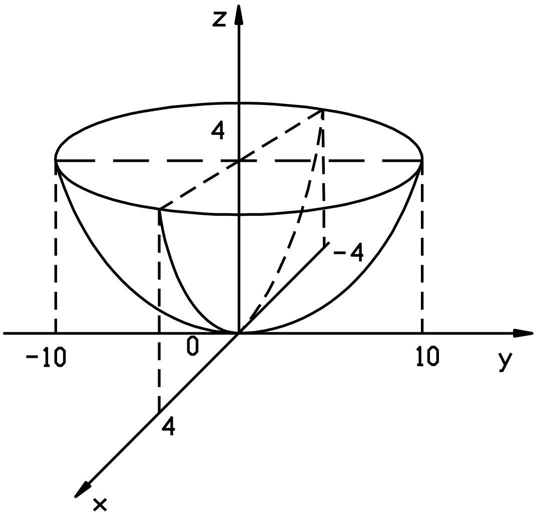
Если точка движется прямолинейно со скоростью $v = v(t)$, то путь, пройденный ею за промежуток времени $[t_1, t_2]$, равен $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

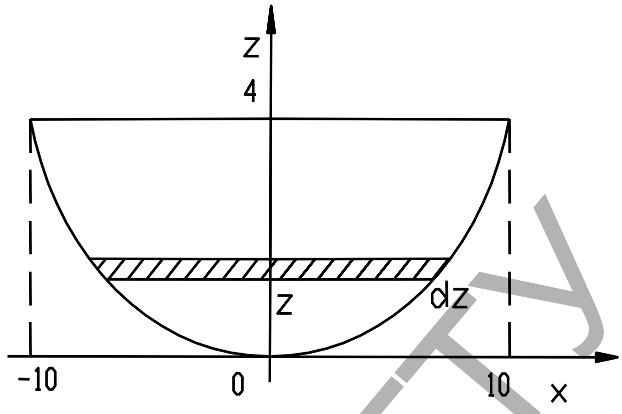
2. Вычисление работы переменной силы.

Пусть под действием силы $F(x)$ материальная точка движется вдоль оси *Ox*. Работа этой силы на участке пути $[a;\ b]$ может быть найдена по формуле $A = \int\limits_a^b F(x)dx$.

Пример 16. Котел, имеющий форму эллиптического параболоида $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25}$ высотой $H = 4$ *м*, заполнен жидкостью, плотность которой $\delta = 0{,}8$ *т/м³*. Вычислить работу, которую нужно затратить на перекачивание жидкости через край котла.

Решение.





Если $z = 4$, то в сечении параболоида этой плоскостью получим эллипс $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{100} = 1$.

На высоте *z* выделим элементарный слой жидкости толщиной *dz*. В силу того, что *dz* мало, можно считать этот слой эллиптическим цилиндром с высотой *dz* ,в основании которого эллипс $\frac{x^2}{4z} + \frac{y^2}{25z} = 1$.

Элементарный объем этого цилиндра равен $dV = \pi abh = \pi \cdot 2\sqrt{z} \cdot 5\sqrt{z}dz = 10\pi \cdot zdz$, здесь $a = 2\sqrt{z}$, $b = 5\sqrt{z}$ – полуоси эллипса, $h = dz$. Его масса $dm = \delta \cdot dV = 0{,}8 \cdot 10\pi \cdot zdz = 8\pi \cdot zdz$.

Элемент работы, затраченной на перекачивание элемента массы *dm* на расстояние $H - z = 4 - z$, будет равен

$$dA = (H - z) \cdot gdm = (4 - z)g \cdot 8\pi \cdot zdz = 8\pi \cdot g\left(4z - z^2\right)dz.$$

Тогда вся работа будет равна

$$A = \int_0^4 8\pi \cdot g\left(4z - z^2\right)dz = 8\pi \cdot g\left(2z^2 - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = 8\pi \cdot g \cdot 16\left(8 - \frac{4}{3}\right) =$$

$$= 8\pi \cdot g \cdot 64 \cdot \frac{5}{3} = 26285{,}568\ (кДж).$$

Ответ: 26285,568 *кДж*.

3. Вычисление силы давления жидкости на пластину.

Если пластина находится в горизонтальном положении на глубине *h* от поверхности жидкости, то сила давления *P* жидкости на эту пластинку вычисляется по закону Паскаля $P = g\rho hS$, где *g* – ускорение свободного падения, *S* – площадь пластинки, ρ – плотность жидкости.

Если пластина погружена в жидкость вертикально, то сила давления жидкости на единицу площади изменяется с глубиной погружения.

Пусть пластина, имеющая форму криволинейной трапеции, погружена в жидкость так, что боковые стороны этой трапеции параллельны поверхности жидкости. Тогда сила давления на пластинку вычисляется по формулам:

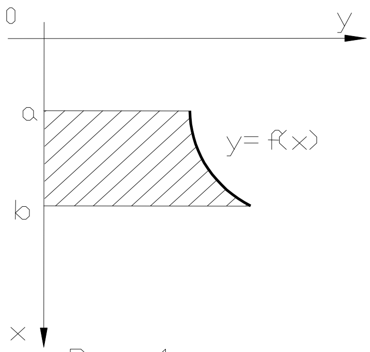


Рис. 1

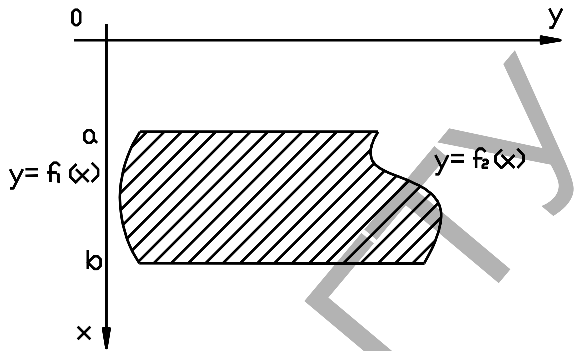
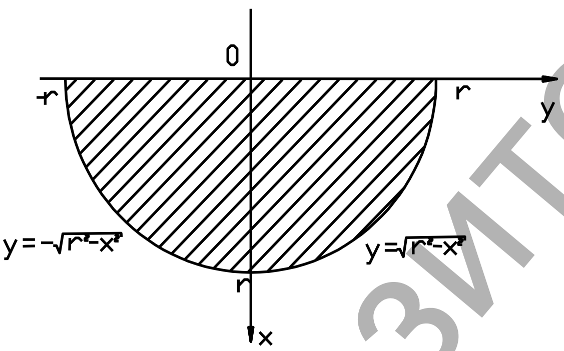


Рис. 2

$$P = g \cdot \int_a^b \rho \cdot x f(x) dx, \qquad P = g \cdot \int_a^b \rho \cdot x\left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx.$$

Пример 17. Найти силу давления, испытываемую полукругом радиуса r, погруженным вертикально в воду так, что его диаметр совпадает с поверхностью воды.



Решение. Воспользуемся формулой $P = g \cdot \int_a^b \rho \cdot x\left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx$. В данном случае $f_1(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $f_2(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $a = 0$, $b = r$. Тогда

$$P = g \cdot \rho \int_0^r x \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} dx = -\frac{2}{3} g \cdot \rho \left(r^2 - x^2\right)^{1{,}5} \Big|_0^r = \frac{2}{3} r^3 g \rho.$$

Ответ: $\frac{2}{3} r^3 g \rho$.

4. Статические моменты и координаты центра масс материальной дуги.

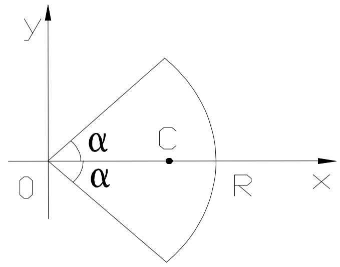
Статические моменты материальной кривой, заданной в прямоугольной системе координат уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, относительно координатных осей находятся по формулам:

$$M_x = \int_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \qquad M_y = \int_a^b \rho(x) x \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Координаты центра масс материальной дуги можно найти по формулам $x_c = \dfrac{M_y}{M}$, $y_c = \dfrac{M_x}{M}$, где $M = \int\limits_a^b \rho(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ – масса дуги, $\rho = \rho(x)$ ее линейная плотность.

Пример 18. Найти координаты центра масс однородной дуги окружности радиуса R с центральным углом 2α.

Решение. Выберем систему координат так, как показано на рисунке.



Тогда в силу однородности и симметричности расположения дуги вторая координата центра масс будет равна нулю, $y_c = 0$. Запишем параметрические уравнения дуги окружности.

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ -\alpha \le t \le \alpha.$$

Найдем массу дуги и ее статический момент относительно оси Oy.

$$M = \rho\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt = \rho\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{R^2\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)}\,dt = \rho Rt\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 2\rho R\alpha.$$

$$M_y = \rho\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}R\cos t\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt = \rho R^2\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\cos t dt = 2\rho R^2\int\limits_0^{\alpha}\cos t dt = 2\rho R^2\sin\alpha.$$

Тогда, координаты центра масс дуги окружности: $x_c = \dfrac{2\rho R^2\sin\alpha}{2\rho R\alpha} = R\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$, $y_c = 0$.

Ответ: $x_c = R\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$, $y_c = 0$.

5. Координаты центра масс плоской фигуры.

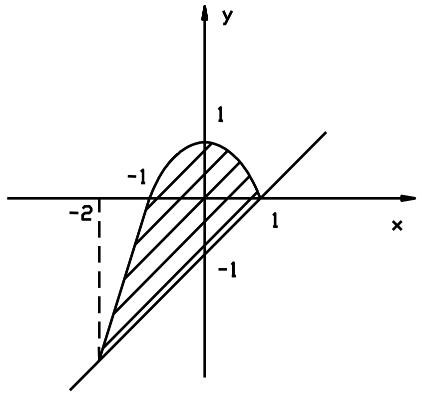
Координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x \in [a,b]$, где $\delta = \delta(x)$ – поверхностная плотность фигуры, могут быть найдены по формулам: $x_c = \dfrac{M_y}{M}$, $y_c = \dfrac{M_x}{M}$, где

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \delta(x)(f_2{}^2(x) - f_1{}^2(x))dx, \qquad M_y = \int\limits_a^b x\delta(x)(f_2(x) - f_1(x))dx,$$

$$M = \int\limits_a^b \delta(x)(f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Пример 19. Вычислить координаты центра масс однородной плоской пластины, ограниченной линиями $y = 1 - x^2$, $x - y = 1$.

Решение. Построим фигуру, ограниченную данной параболой и данной прямой.



Так как пластина однородная, то ее поверхностная плотность постоянна. Будем считать, что она равна единице, т.е. $\delta = \delta(x) = 1$. Для вычисления координат центра масс полученной фигуры воспользуемся формулами $x_c = \dfrac{M_y}{M}$, $y_c = \dfrac{M_x}{M}$. В нашем случае $f_1(x) = x - 1$, $f_2(x) = 1 - x^2$, $a = -2$, $b = 1$.

$$M = \int_{-2}^{1} \left(1 - x^2 - x + 1\right) dx = \int_{-2}^{1} \left(2 - x - x^2\right) dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = 4{,}5.$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} \left(\left(1 - x^2\right)^2 - (x-1)^2\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} \left(x^4 - 3x^2 + 2x\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5} - x^3 + x^2\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - 1 + 1\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{32}{5} + 8 + 4\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{33}{5} - 12\right) = 3{,}3 - 6 = -2{,}7.$$

$$M_y = \int_{-2}^{1} x\left(1 - x^2 - x + 1\right) dx = \int_{-2}^{1} \left(2x - x^3 - x^2\right) dx = \left(x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) - \left(4 - 4 + \frac{8}{3}\right) = -2{,}25.$$

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{-2{,}25}{4{,}5} = -0{,}5, \qquad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{-2{,}7}{4{,}5} = -0{,}6.$$

Ответ: $C\left(-0{,}5;\ -0{,}6\right)$.

Задания для аудиторной работы

106. Скорость тела задается формулой $v = \sqrt{1+t}$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 10 с после начала движения.

107. Вычислить работу, которую нужно затратить на сооружение правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 2 *м* и высотой 4 *м* из материала, удельный вес которого $\gamma = \delta \cdot g = 24\,кН/м^3$.

108. Пластина, имеющая форму эллипса, наполовину погружена в жидкость (вертикально), так, что одна из осей (длина *2b*) лежит на поверхности. Найти силу давления жидкости на каждую из сторон этой пластины, если длина погруженной полуоси эллипса равна *a*, а плотность жидкости *d*.

109. Найти координаты центра масс дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, расположенной в первом квадранте.

Задания для индивидуальной работы

110. Скорость прямолинейного движения материальной точки изменяется по закону $v(t) = te^{-0{,}01t}$ *м/с*. Найти путь, пройденный точкой, от начала движения до полной остановки.

111. Вычислить работу, которую необходимо совершить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму правильной усеченной четырехугольной пирамиды, сторона нижнего основания которой равна 4 *м*, верхнего – 2 *м*, высота пирамиды – 1 *м*. (Удельный вес воды $\gamma = \delta \cdot g \approx 1000\,кг/м^3$)

112. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из конического сосуда, обращенного вершиной вниз, радиус основания которого равен *R* и высота *H*.

113. Вычислить силу давления воды на прямоугольник, вертикально погруженный в воду, если стороны прямоугольника 8 *м* и 12 *м*, а верхнее основание параллельно поверхности воды и находится на глубине 5 *м* (удельный вес воды $\gamma = \delta \cdot g \approx 1000\,кг/м^3$).

114. Вертикальная плотина имеет форму трапеции. Вычислить силу давления воды на всю плотину, если верхнее основание плотины $a = 70$ *м*, нижнее основание $b = 50$ *м*, а высота плотины $h = 20$ *м*.

115. Найти центр масс фигуры, ограниченной осью *Ox* и одной полуволной синусоиды $(0 \le x \le \pi)$.

116. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x$ и $y = x^2 - 2x$.

117. Найти координаты центра масс однородной дуги первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Ответы. **106.** $\approx 23{,}7\,м$. **107.** 128 *кДж*. **108.** $\frac{2}{3}gda^2b$. **109.** $\left(\frac{2a}{5}; \frac{2a}{5}\right)$.

110. 10 *км*. **111.** 56 *кДж*. **112.** $\frac{\pi}{12}g\delta R^2H^2$. **113.** $\approx 10\,348{,}8$ *кН*.

114. $\frac{(a+2b)h^2}{6} \approx 11300$ *кН*. **115.** $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$. **116.** (1,5; 0,6).

117. $x_c = \pi a$, $y_c = \frac{4a}{3}$.

Литература

1. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. − М.: Наука, 1981. − 448 с.
2. Власов, В.Г. Конспект лекций по высшей математике / В.Г. Власов. − М.: АйрисПресс, 1997. − 288 с.
3. Высшая математика для инженеров: В 2-х томах / С.А. Минюк [и др.]; под общ. ред. Н.А. Микулина. − Мн.: ООО «Элайда», 2004. − Т.1. – 464 с., Т.2. – 592 с.
4. Герасимович, А.И. Математический анализ: Справочное пособие: в 2-х частях / А.И. Герасимович [и др.]. − Мн.: Выш. шк., 1990. − 272 с.
5. Гусак, А.А. Высшая математика: в 2-х частях / А.А. Гусак. − Мн.: ТетраСистемс, 2000-2001. − Т.1. – 544 с., Т.2. – 442 с.
6. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х частях / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. − Мн.: Высш. шк., 1997. − Ч.1. – 304 с., Ч.2. – 416 с.
7. Жевняк, Р. М. Высшая математика, ч.I-IV / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. − Мн.: Выш. шк., 1984-1996 и все последующие издания.
8. Задачи и упражнения по курсу «Высшая математика» для студентов электронно-информационных специальностей. II семестр / Составители: Т.А. Тузик, А.И. Тузик, М.Г. Журавель. − Брест: Изд-во БрГТУ, 2007. − 103 с.
9. Индивидуальные задания по высшей математике / Под ред. А.П. Рябушко, I-IIIч. − Мн.: Выш. шк., 2004-2008. − Ч.1. – 304 с., Ч.2. – 367 с., Ч.3. – 367 с.
10. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2-х томах / Н. С. Пискунов. − М.: Наука, 1985. − Т.1. – 432 с., Т.2. – 560 с.
11. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. − М.: АйрисПресс, 2004. − Ч.1. – 288 с.
12. Руководство к решению задач по высшей математике: в 2-х частях / Е.И. Гурский. − Мн.: Выш. шк., 1990. − Ч.1. – 304 с., Ч.2. – 400 с.
13. Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. − М.: АйрисПресс, 2003. − 576 с.
14. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике: в 2-х частях / Т.А. Сухая, В.Ф. Бубнов. − Мн.: Выш. шк., 1993. − Ч.1. – 416 с., Ч.2. – 304 с.

Оглавление

Учебное издание

Составители:
Жук Анастасия Игоревна
Каримова Татьяна Ивановна
Лебедь Светлана Федоровна
Гладкий Иван Иванович
Рубанов Владимир Степанович

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

по курсу *«Математика»*
для студентов факультета
электронно-информационных систем

Интегральное исчисление функции одной переменной

II семестр

Ответственный за выпуск: Каримова Т.И.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 25.02.2016 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. 3.5. Уч.-изд. л. 3.75. Заказ № 193. Тираж 50 экз.
Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.