

**Министерство образования Республики Беларусь
Брестский государственный технический университет
Кафедра высшей математики**

Махнист Л.П., Рубанов В.С., Сидоревич М.П.

МАТЕМАТИКА

**Избранные задачи вступительных экзаменов по математике
в Брестский государственный технический университет
в 1995-2000 г. г.**



Брест 2001

УДК 22.1я729
ББК 51(075.4)
М 36

**Брестский государственный технический университет
Кафедра высшей математики**

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
Брестского государственного технического университета

А в т о р ы :

Махнист Л.П., к.т.н., доцент
Рубанов В.С., к.ф.-м.н., доцент
Сидоревич М.П., к.ф.-м.н., доцент

Р е ц е н з е н т :

*зав. кафедрой алгебры и геометрии
Брестского государственного университета,
канд. физ.-мат. наук, доцент Савчук В.Ф.*

Махнист Л.П., Рубанов В.С., Сидоревич М.П.

М36 Математика: Избранные задачи вступительных экзаменов по математике в Брестский государственный технический университет в 1995-2000 г. г. – Брест: БГТУ, 2001. – 100 с.

Издание содержит наиболее сложные задачи вступительных экзаменов по математике в Брестский государственный технический университет в 1995-2000 г.г. Ко всем задачам приведены ответы, а к наиболее трудным и типичным – решения и комментарии.

Предназначено школьникам, абитуриентам, слушателям подготовительных курсов, учителям.

**УДК 22.1я729
ББК 51(075.4)**

© Л.П. Махнист, В.С. Рубанов, М.П. Сидоревич, 2001
© Кафедра высшей математики, 2001
© Брестский государственный технический университет, 2001

Оглавление

Предисловие.	4
Глава 1. Избранные задачи по математике на вступительных экзаменах 1995-1999 г.г.	5
1.1. Уравнения	5
1.2. Неравенства	11
1.3. Системы	15
1.4. Функции	18
1.5. Текстовые задачи	19
Глава 2. Решения, указания, ответы	27
2.1. Уравнения	27
2.2. Неравенства	60
2.3. Системы	72
2.4. Функции	80
2.5. Текстовые задачи	87

Предисловие

В настоящее издание вошли наиболее трудные задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах по математике в Брестском политехническом институте в 1995-2000 г. г.

Для удобства работы с изданием задачи разбиты на типы, хотя такое деление в некоторых случаях носит условный характер. Каждая из задач снабжена указателем факультета, в котором она в свое время предлагалась на вступительных экзаменах. Это позволит абитуриенту Брестского государственного технического университета обратить внимание на уровень сложности и специфику предлагаемых на выбранном факультете заданий. В конце предисловия приводится список принятых сокращений в названиях факультетов и их расшифровка. Ко всем задачам издания приведены ответы, а к более чем половине задач – решения.

Издание может быть использовано в качестве пособия для подготовительных курсов. Авторы предполагают, что данное издание окажет помощь абитуриентам и старшеклассникам при самостоятельной подготовке к вступительным экзаменам по математике. С другой стороны, приведенные в издании задачи, позволят учителям использовать их на уроках математики, в работе математических кружков и факультативов.

При изложении решений авторы не претендуют на "оптимальные" способы решения. Даже решения типовых задач часто даются с несовпадающими комментариями. Возможно, читателям удастся найти более простые, более понятные, а может быть, совершенно нестандартные подходы к решению задач. Успехов в этом и на вступительных экзаменах будущим абитуриентам!

В заключение авторы хотели бы выразить благодарность всем преподавателям кафедры высшей математики за ценные советы и помощь, замечания и советы, оказанные в процессе подготовки и использования материалов вступительных экзаменов, вошедших в настоящее издание.

Примечание

ВиГ – факультет водоснабжения и гидромелиорации,

СФ – строительный факультет,

ЭМФ – электронно-механический факультет,

ЭФ – экономический факультет,

ЗФ – заочный факультет,

ПО – подготовительное отделение.

Глава 1. Избранные задачи по математике на вступительных экзаменах 1995-2000 г. г.

1.1. Уравнения

1.1.1. (ЭМФ, 95) Решить уравнение

$$(x^2 - 2) \cdot |\sin x| = \sin x.$$

1.1.2. (ЭМФ, 95) Решить уравнение

$$(x - 2)^2 \cdot |\cos x| = \cos x.$$

1.1.3. (ЭМФ, 95) Решить уравнение

$$(x^2 + 2) \cdot \cos x = 3x \cdot |\cos x|.$$

1.1.4. (ЭМФ, 95) Решить уравнение

$$(x^2 + 4) \cdot \sin x = 5x \cdot |\sin x|.$$

1.1.5. (ЭМФ, 95) Решить уравнение

$$\log_2^2 x + (x - 1) \log_2 x = 6 - 2x.$$

1.1.6. (ЭМФ, 95) Решить уравнение

$$\log_2^2 x + (x - 5) \log_2 x + 6 - 2x = 0.$$

1.1.7. (ЭМФ, 95) Решить уравнение

$$4^x + (x - 13) \cdot 2^x - 2x + 22 = 0.$$

1.1.8. (ЭМФ, 95) Решить уравнение

$$4^x + (2x - 3) \cdot 2^x + 2 - 4x = 0.$$

1.1.9. (ВиГ, 95) Решить уравнение

$$\log_{1-2x}(1 - 5x + 6x^2) - \log_{1-3x}(1 - 4x + 4x^2) = 2.$$

1.1.10. (ВиГ, 95) Решить уравнение

$$\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) = 4 - \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21).$$

1.1.11. (ВиГ, 95) Решить уравнение

$$4 \log_{5x-1}(10x^2 - 7x + 1) - \log_{2x-1}(25x^2 - 10x + 1) = 2.$$

1.1.12. (ВиГ, 95) Решить уравнение

$$\log_{2x+1}(5 + 8x - 4x^2) + \log_{5-2x}(1 + 4x + 4x^2) = 4.$$

1.1.13. (ЭФ, 97) Решить уравнение

$$\sin \frac{\pi x}{2} + \sin \frac{5\pi x}{2} + 2x = x^2 + 3.$$

1.1.14. (ЭФ, 97) Решить уравнение

$$x^2 - \cos \pi x = 4x - 5.$$

1.1.15. (ЭФ, 97) Решить уравнение

$$2^{\cos^2 2x} = \frac{\sin 3x - \cos 3x}{\sqrt{2}}.$$

1.1.16. (ЭФ, 97) Решить уравнение

$$3^{1+\sin 2x} = 11 - \sqrt{2}(\sin x + \cos x).$$

Глава 1. Избранные задачи по математике

1.1.17. (ПО, 97) Решить уравнение

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} - \sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}} = 2.$$

1.1.18. (ПО, 97) Решить уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 3 + \sqrt{x+24-10\sqrt{x-1}}.$$

1.1.19. (ПО, 97) Решить уравнение

$$\sqrt{1-4x} + 2 = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}.$$

1.1.20. (ПО, 97) Решить уравнение

$$\sqrt{3-6x} = \sqrt{9x^2 - 12x + 4} - 2.$$

1.1.21. (ЭМФ, 97) Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1.$$

1.1.22. (ЭМФ, 97) Решить уравнение

$$\sqrt[3]{12-x} + \sqrt{24+x} = 6.$$

1.1.23. (ЭМФ, 97) Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1.$$

1.1.24. (ЭМФ, 97) Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1.$$

1.1.25. (ЭМФ, 98) При каких значениях параметра p найдутся такие значения x , что числа

$$5^{1+x} + 5^{1-x}; \quad \frac{p}{2}; \quad 25^x + 25^{-x},$$

взятые в указанном порядке, составляют арифметическую прогрессию?

1.1.26. (ЭМФ, 98) При каких значениях параметра p найдутся такие значения x , что числа

$$4^{1-x} + 4^{1+x}; \quad p; \quad 16^x + 16^{-x},$$

взятые в указанном порядке, составляют арифметическую прогрессию?

1.1.27. (ЭМФ, 98) Решить уравнение

$$\frac{4}{3} \cdot \log_3^2(5x-6)^3 - 2 \cdot \log_3(5x-6)^3 \cdot \log_3 x^6 = -24 \cdot \log_3^2 \frac{1}{x}.$$

1.1.28. (ЭМФ, 98) Решить уравнение

$$\frac{3}{2} \cdot \log_5^2(2x-3)^2 + 12 \cdot \log_5^2 \sqrt{x} = \log_5(2x-3)^3 \cdot \log_5 x^3.$$

1.1.29. (ЭМФ, 98) Решить уравнение

$$\frac{x}{18} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12}.$$

1.1.30. (ЭМФ, 98) Решить уравнение

$$\frac{9}{4} \cdot x = \left(\frac{27}{2}\right)^{\log_x 6}.$$

1.1.31. (ЭФ, 98) Решить уравнение

$$\left| -1 + \cos\left(\pi\sqrt[3]{x}\right) \right| + \left| x^2 - 16x + 55 \right| = 16x - x^2 + \cos\left(\pi\sqrt[3]{x}\right) - 56.$$

Глава 1. Избранные задачи по математике

1.1.32. (ЗФ, 98) Найти все значения параметра p , при каждом из которых уравнение $(x-p)^2 \cdot (p \cdot (x-p)^2 - p - 1) = -1$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

1.1.33. (ЗФ, 98) Найти все значения параметра p , при каждом из которых уравнение $((x-p)^2 - 2p - 4) \cdot (x-p)^2 = -2p - 3$ имеет больше отрицательных корней, чем положительных.

1.1.34. (ПО, 98) Найти все целые значения параметра p , при каждом из которых уравнение $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \frac{x}{2} = 3p$ имеет решения.

1.1.35. (ПО, 98) Найти все целые значения параметра p , при каждом из которых уравнение $2 - 2\cos 2x = 3p + 4\sin x$ имеет решения.

1.1.36. (ЭФ, 99) Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x - 5} + x\sqrt{x+1} + 5 = 4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x-5} + 2x.$$

1.1.37. (ЭФ, 99) Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 + 3x - 2} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{2x^2 + 11x - 6} + 3\sqrt{x+2}.$$

1.1.38. (ЭФ, 99) Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x - 2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - x + 2}.$$

1.1.39. (ЭФ, 99) Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - 3x + 4} + \sqrt{3x^2 - 7x + 3} = \sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{3x^2 - 5x - 1}.$$

1.1.40. (ЭФ, 99) Решить уравнение

$$x^2 + \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{3x^2 - 6x + 7} = 2 + 2x.$$

1.1.41. (ЭФ, 99) Решить уравнение

$$1 + x^2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{3x^2 - 12x + 16} = 4x.$$

1.1.42. (ЭФ, 99) Решить уравнение

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = x^2 - 4x + 6.$$

1.1.43. (ЭФ, 99) Решить уравнение

$$6x + \sqrt{4-x} + \sqrt{x-2} = x^2 + 11.$$

1.1.44. (ЭМФ, 99) Найти все значения параметра p , при каждом из которых уравнение $p \cdot 9^x - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$ имеет единственное решение.

1.1.45. (ЭМФ, 99) Найти все значения параметра p , при каждом из которых уравнение $4^x - p \cdot 2^{x+1} - 3p^2 + 4p = 0$ имеет единственное решение.

1.1.46. (ЭФ, 99) Определить, при каких значениях параметра p уравнение $|x^2 - 2x - 3| = p$ имеет ровно три различных действительных корня.

1.1.47. (ЭФ, 99) Определить, при каких значениях параметра p уравнение $|x^2 - 3x + 2| = p$ имеет ровно три различных действительных корня.

Глава 1. Избранные задачи по математике

1.1.48. (ЭФ, 99) Определить, при каких значениях параметра p уравнение $x^2 + 5 = 6|x| + p$ имеет ровно три различных действительных корня.

1.1.49. (ЭФ, 99) Определить, при каких значениях параметра p уравнение $x^2 - 7|x| = p - 12$ имеет ровно три различных действительных корня.

1.1.50. (ПО, 99) При каких значениях параметра p сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 2px + 2p^2 + 4p + 3 = 0$ является наибольшей?

1.1.51. (ПО, 99) При каких значениях параметра p сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 2px + 2p^2 - 6p + 8 = 0$ является наименьшей?

1.1.52. (ПО, 99) При каких значениях параметра p сумма корней уравнения $x^2 + 2(p^2 - 3p)x - 6p^3 + 12p^2 + 4 = 0$ является наибольшей?

1.1.53. (ПО, 99) Найти все значения параметра p , при которых сумма корней уравнения $x^2 - 2(p^2 + 4p)x + 8p^3 + 18p^2 + 63 = 0$ принимает наименьшее значение.

1.1.54. (ПО, 99) Найти значения параметра p , при которых отношение корней уравнения $2x^2 + (p - 10)x + 6 = 0$ равно 12.

1.1.55. (ПО, 99) Найти значения параметра p , при которых один из корней уравнения $2x^2 - 6x + 1 - p = 0$ больше другого на 10.

1.1.56. (ЭМФ, 2000) Для каждого положительного значения параметра m решить уравнение $(4mx^2 + 4x + 1)(4m^2x^2 - 4mx + m + 4) = 0$.

1.1.57. (ЭМФ, 2000) Для каждого неотрицательного значения параметра p решить уравнение $(2px^2 + 4x + 1)(2p^2x^2 - 4px + p + 8) = 0$.

1.1.58. (ЭМФ, 2000) Для каждого положительного значения параметра m решить уравнение $(mx^2 - 2x + 1)(m^2x^2 + 2mx + m + 4) = 0$.

1.1.59. (ЭМФ, 2000) Для каждого неотрицательного значения параметра a решить уравнение $(ax^2 - x + 3)(a^2x^2 + ax + 3a + 1) = 0$.

1.1.60. (ЭФ, 2000) Решить уравнение $(x^2 - 6x)^2 + 10(x - 3)^2 = 65$.

1.1.61. (ЭФ, 2000) Решить в целых числах уравнение $2xy + 3y^2 = 4$.

1.1.62. (ЭФ, 2000) Найти целые решения неравенства $x - 1 < \log_6(x + 3)$.

1.1.63. (ЭФ, 2000) Решить уравнение $1 - \cos^2 \frac{\pi x}{4} - \sqrt{x + 2} = \cos^2 2000 + \sin^2 2000$.

1.1.64. (ЭФ, 2000) Решить уравнение $3^x + 3^{2-x} = 3(1 + \cos 2\pi x)$.

1.1.65. (ЭФ, 2000) Решить уравнение $\sin^2 \pi x + \log_2^2(y^2 - 2y + 1) = \cos \frac{3\pi}{2}$.

1.1.66. (ЭФ, 2000) Решить уравнение $(x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) = 6$.

1.1.67. (ЭФ, 2000) Решить уравнение $\log_3(8 + 2x - x^2) = 2^{x-1} + 2^{1-x}$.

1.1.68. (ЭМФ, 2000) Решить уравнение

$$\sin^2 y - 4 \sin y \cdot \cos x + 6 \cos^2 x = 0.$$

1.1.69. (ЭМФ, 2000) Решить уравнение

Глава 1. Избранные задачи по математике

$$\operatorname{tg}^2 2x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 2x + 3 = -\operatorname{ctg}^2 \left(4y - \frac{\pi}{6} \right).$$

1.1.70. (ЭМФ, 2000) Решить уравнение

$$\cos^2 x + 2 \cos x \cdot \cos y + 2 \cos^2 y = 0.$$

1.1.71. (ВиГ, СФ, ЗФ, 2000) Решить уравнение $|x - 2 - |4 - x|| = 7 - x$.

1.1.72. (ВиГ, СФ, ЗФ, 2000) Решить уравнение $\sqrt{4 + 3x - x^2} \cdot \sin \pi x = 0$.

1.1.73. (ВиГ, СФ, ЗФ, 2000) Решить уравнение $\sin 4^{1+x} = 4 \sin 4^x \cdot \cos 4^x$.

1.1.74. (ВиГ, СФ, ЗФ, 2000) Решить уравнение $x^{1+\log_3 x} = 9x^2$.

1.1.75. (ВиГ, СФ, ЗФ, 2000) Решить уравнение $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 0$.

1.1.76. (СФ, 2000) Решить уравнение

$$(2 \cdot \log_4^2 x - 3 \cdot \log_4 x - 8) \cdot (2 \cdot \log_4^2 x - 3 \cdot \log_4 x - 6) = 3.$$

1.1.77. (СФ, 2000) Решить уравнение

$$(\log_2^2 x + 3 \cdot \log_2 x + 1) \cdot (\log_2^2 x + 3 \cdot \log_2 x - 3) = 5.$$

1.1.78. (СФ, 2000) Решить уравнение

$$(\log_3^2 x + 3 \cdot \log_3 x + 4) \cdot (\log_3^2 x + 3 \cdot \log_3 x + 6) = 8.$$

1.1.79. (СФ, 2000) Решить уравнение

$$(\log_2^2 x + \log_2 x - 2) \cdot (\log_2^2 x + \log_2 x - 3) = 12.$$

1.1.80. (ЗФ, 2000) Решить уравнение

$$(x^2 - 3x + 1)^2 + 4|x^2 - 3x + 1| - 5 = 0.$$

1.1.81. (ЗФ, 2000) Решить уравнение

$$(x^2 - 5x + 2)^2 + 3|x^2 - 5x + 2| - 10 = 0.$$

1.1.82. (ЗФ, 2000) Решить уравнение

$$(x^2 + 3x + 1)^2 + 6|x^2 + 3x + 1| - 7 = 0.$$

1.1.83. (ЗФ, 2000) Решить уравнение

$$(x^2 + 5x + 2)^2 + 2|x^2 + 5x + 2| - 8 = 0.$$

1.1.84. (ЗФ, 2000) Решить уравнение $\log_{\sqrt{2} \sin x} (1 + \cos x) = 2$.

1.1.85. (ЗФ, 2000) Решить уравнение $\log_{2 \sin x} \sqrt{4(1 - \cos x)} = 1$.

1.1.86. (ЗФ, 2000) Решить уравнение $\log_{\sqrt{2} \cos x} (1 + \sin x) = 2$.

1.1.87. (ЗФ, 2000) Решить уравнение $\log_{2 \cos x} \sqrt{4(1 - \sin x)} = 1$.

1.1.88. (ЗФ, 2000) Решить уравнение

$$5^{\log_4 x \cdot (2 \log_4 x - 6)} = \left(\frac{1}{25} \right)^{-2,5 \cdot (\log_4 x - 1)}.$$

1.1.89. (ЗФ, 2000) Решить уравнение

$$4^{-\log_9^2 x} = \left(\frac{1}{2} \right)^{1 + \log_9 x}.$$

Глава 1. Избранные задачи по математике

1.1.90. (ЗФ, 2000) Решить уравнение

$$\log_5(1 + 2^{x+1}) + \log_5(2 + 2^x) = 1.$$

1.1.91. (ЗФ, 2000) Решить уравнение

$$\log_6(5 + 6^{-x}) = x + 1.$$

1.1.92. (ПО, 2000) Решить уравнение

$$(x - 3)^2 \log_2(x - 1) + 2 \log_{x-1} \sqrt{2} = (x - 3)^2 \log_{x-1} 2 + 2 \log_2 \sqrt{x - 1}.$$

1.1.93. (ПО, 2000) Решить уравнение

$$2 \log_3(x - 2)^2 + (x - 5)^2 \log_{x-2} 3 = 2 \log_{x-2} 9 + (x - 5)^2 \log_3(x - 2).$$

1.1.94. (ПО, 2000) Решить уравнение

$$(x - 4)^2 \log_4(x - 1) - 2 \log_4(x - 1)^2 = (x - 4)^2 \log_{x-1} 4 - 2 \log_{x-1} 16.$$

1.1.95. (ПО, 2000) Решить уравнение

$$2 \log_{x-2} \sqrt{3} + (x - 4)^2 \log_3(x - 2) = (x - 4)^2 \log_{x-2} 3 + 2 \log_3(x - 2).$$

1.1.96. (ПО, 2000) При каких значениях b уравнение

$$\frac{b \cos x}{2 \cos 2x - 1} = \frac{b + \sin x}{(2 \cos 2x - 1) \cdot \operatorname{tg} x}$$

имеет решение? Найти это решение.

1.1.97. (ПО, 2000) При каких значениях m уравнение

$$\frac{m^2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sin^2 x + m^2 - 2}{\cos 2x}$$

имеет решения? Найти эти решения.

1.1.98. (ПО, 2000) При каких значениях a уравнение

$$\frac{\cos^2 2x}{1 - \sin 4x} = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \cdot \operatorname{ctg}^2 x - a^2}{(\sin 2x - \cos 2x)^2}$$

имеет решения? Найти эти решения.

1.1.99. (ПО, 2000) При каких значениях p уравнение

$$\frac{\sin^2 2x + p}{2 \cos^2 3x} = \frac{p^2 - \operatorname{tg}^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)}{2 \cos^2 3x}$$

имеет решение? Найти это решение.

1.1.100. (ЭФ, 2000) Решить относительно y квадратное уравнение

$$(9x^2 + 6x + 1) \cdot y^2 - (9x^2 + 18x + 5) \cdot y + 2x^2 + 7x + 6 = 0.$$

1.1.101. (ЭФ, 2000) Решить относительно x квадратное уравнение

$$(9y^2 + 6y + 1) \cdot x^2 + (9y^2 + 18y + 5) \cdot x + 2y^2 + 7y + 6 = 0$$

1.1.102. (ЭФ, 2000) Решить относительно y квадратное уравнение

$$(15x^2 + 28x + 5) \cdot y^2 - (8x^2 + 38x + 24) \cdot y + x^2 + 8x + 16 = 0.$$

1.1.103. (ЭФ, 2000) Решить относительно x квадратное уравнение

$$(15y^2 - 28y + 5) \cdot x^2 - (8y^2 - 38y + 24) \cdot x + y^2 - 8y + 16 = 0.$$

1.1.104. (ЭФ, 2000) Решить уравнение

Глава 1. Избранные задачи по математике

$$1 + \cos(x - y) = \sqrt{3 + 2x - x^2} \cdot \cos^2 \frac{y - x}{2} - 2 \cos^2 \pi(y - x).$$

1.1.105. (ЭФ, 2000) Решить уравнение

$$2 \cdot \sqrt{8 - x^2 - 2x} \cdot \sin^2 \frac{x + y}{2} = 3(1 - \cos(x + y)) + 3 \sin^2(y - x).$$

1.1.106. (ЭФ, 2000) Решить уравнение

$$12\sqrt{4y - y^2} \cdot \sin^2 \frac{x + y}{2} = (2 \cos^2 \pi(x + y) - 1)^2 + 12(1 - \cos(x + y)).$$

1.1.107. (ЭФ, 2000) Решить уравнение

$$\sin^2 \pi(x + y) + 3 = \sqrt{6y - y^2} \cdot \cos^2(x + y) + 3 \sin^2(x + y).$$

1.1.108. (ЭФ, 2000) Для каждого действительного числа a решить уравнение $9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0$.

1.1.109. (ЭФ, 2000) Для каждого действительного числа m решить уравнение $64^{-|x-1|} - 4 \cdot 8^{-|x-1|} - 4m = 0$.

1.1.110. (ЭФ, 2000) Для каждого действительного значения a решить уравнение $36^{-|x+2|} - 6 \cdot 6^{-|x+2|} + 3a = 0$.

1.1.111. (ЭФ, 2000) Для каждого действительного числа m решить уравнение $25^{-|x+1|} - 6 \cdot 5^{-|x+1|} + 2m = 0$.

1.1.112. (ЭФ, 2000) Найти все значения x , удовлетворяющие уравнению $\log_7(\sqrt{x+2} - a^2x^2 - a^2x) = \log_{a^2-a+7}(3 - \sqrt{3-x})$ при любом значении параметра a .

1.1.113. (ЭФ, 2000) Найти все значения x , удовлетворяющие уравнению $\log_{a^2-a+5}(5 - \sqrt{16-3x}) = \log_5(\sqrt{3x+1} - 26a^2x + a^2x^2)$ при любом значении параметра a .

1.1.114. (ЭФ, 2000) Найти все значения x , удовлетворяющие уравнению $\log_3(\sqrt{x+5} - 4a^2x - a^2x^2) = \log_{a^2+3}(4 - \sqrt{5-x})$ при любом значении параметра a .

1.1.115. (ЭФ, 2000) Найти все значения x , удовлетворяющие уравнению $\log_2(a^2x^2 - 5a^2x + \sqrt{6-x}) = \log_{a^2+2}(3 - \sqrt{x-1})$ при любом значении параметра a .

1.2. Неравенства

1.2.1. (ЭФ, 95) Решить неравенство

$$\left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1\right) \cdot \log_5\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{1}{x} \cdot \left(\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1\right) \leq 0.$$

1.2.2. (ЭФ, 95) Решить неравенство

Глава 1. Избранные задачи по математике

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x + \sqrt{10x - 2x^2 - 12} + 3\log_4\left(\frac{3}{x}\right) \geq 3.$$

1.2.3. (ЭФ, 95) Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 7x + 10} + 9\log_4\left(\frac{x}{8}\right) \geq 2x + \sqrt{14x - 20 - 2x^2} - 13.$$

1.2.4. (ЭФ, 95) Решить неравенство

$$\left(2 + \sqrt{x^2 - 7x + 12}\right) \cdot \left(\frac{2}{x} - 1\right) \leq \left(\sqrt{14x - 2x^2 - 24} + 2\right) \cdot \log_x\left(\frac{2}{x}\right).$$

1.2.5. (ЭФ, 97) Решить неравенство

$$\cos^2(x+1) \cdot \lg(9 - 2x - x^2) \geq 1.$$

1.2.6. (ЭФ, 97) Решить неравенство

$$(4x - x^2 - 3) \cdot \log_2(\cos^2 \pi x + 1) \geq 1.$$

1.2.7. (ЭФ, 97) Решить неравенство

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{x^2 + 4x + 7} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sin^2\left(\pi + \frac{\pi x}{4}\right)}.$$

1.2.8. (ЭФ, 97) Решить неравенство

$$\log_2\left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} + \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\sin \frac{\pi x}{2} - \cos \pi x\right).$$

1.2.9. (ЭФ, 97) Решить неравенство

$$\cos x - y^2 \geq \sqrt{y - x^2 - 1}.$$

1.2.10. (ЭФ, 97) Решить неравенство

$$y - \sqrt{1 - y - x^2} \geq \frac{1}{|\cos x|}.$$

1.2.11. (ЭФ, 97) Решить неравенство

$$1 - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} + \arccos(x + |\sin y|) \leq 0.$$

1.2.12. (ЭФ, 97) Решить неравенство

$$\pi y + 2 \arcsin(x^2 + y) - 2\pi \geq 0.$$

1.2.13. (ЭМФ, 98) Найти все значения параметра p , при каждом, из которых неравенство

$$\cos x - 2 \cdot \sqrt{x^2 + 9} \leq -\frac{x^2 + 9}{p + \cos x} - p$$

имеет единственное решение.

1.2.14. (ЭМФ, 98) Найти все значения параметра p , при каждом, из которых неравенство

$$\cos 2x + p \leq 2 \cdot \sqrt{x^2 + 16} - \frac{x^2 + 16}{p + \cos 2x}$$

имеет единственное решение.

Глава 1. Избранные задачи по математике

1.2.15. (ЭФ, 98) Решить неравенство

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq \cos(\pi) + \frac{\operatorname{tg}(x)+1}{1-\operatorname{tg}(x)} + \left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^{\sin(5x)} + \left(\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right)^{\cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

1.2.16. (ЭФ, 98) Найти наибольшее значение параметра p , при котором имеет решение неравенство

$$p \sqrt{p} \cdot (x^2 - 2x + 1) + \frac{\sqrt{p}}{x^2 - 2x + 1} \leq \sqrt[4]{p^3} \cdot \left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|.$$

1.2.17. (ЭФ, 98) Найти наибольшее значение величины b , при котором неравенство

$$\sqrt{b^5} \cdot (8x - x^2 - 16) + \frac{\sqrt{b}}{8x - x^2 - 16} \geq -\frac{2}{3} \cdot b \cdot |\cos(\pi x)|$$

имеет хотя бы одно решение.

1.2.18. (ЭФ, 99) Найти наибольшее значение суммы $x+2y$, если x и y удовлетворяют неравенству $x^2 + xy + 4y^2 \leq 3$.

1.2.19. (ЭФ, 99) Найти наименьшее значение суммы $x+5y$, если x и y положительны и удовлетворяют неравенству $x^2 - 6xy + y^2 + 21 \leq 0$.

1.2.20. (ЭФ, 99) Решить неравенство

$$(x^2 - 2x + 4) \geq \sqrt{5 + 4x - x^2}.$$

1.2.21. (ЭФ, 99) Решить неравенство

$$(2x - x^2) \sqrt{6x - x^2 - 5} \leq 2.$$

1.2.22. (ЭМФ, 99; ПО, 98) Найти все значения параметра p , при каждом из которых неравенство $36^x + p \cdot 6^x + p + 8 \leq 0$ имеет хотя бы одно решение.

1.2.23. (ЭМФ, 99; ПО, 98) Найти все значения параметра p , при каждом из которых неравенство $25^x + 3 \leq p + p \cdot 5^x$ имеет хотя бы одно решение.

1.2.24. (ЭМФ, 2000) Решить неравенство

$$\sqrt{1 - \log_{\operatorname{tg} x} 2} \cdot (1 - 3 \log_{\operatorname{tg} x} 2 + 2 \cdot (\log_{\operatorname{tg} x} 2)^2) \geq 0.$$

1.2.25. (ЭМФ, 2000) Решить неравенство

$$\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} \cdot (\log_{\operatorname{tg} x} (2 + 4 \cos^2 x) - 2) \geq 0.$$

1.2.26. (ЭМФ, 2000) Решить неравенство

$$(\log_{\sqrt{x}} \sin x) \cdot \log_x \left(\frac{1}{9} (2^{2x-2} - 3 \cdot 2^{x-2} - 1) \right) \leq 0.$$

1.2.27. (ЭМФ, 2000) Решить неравенство

$$\sqrt{4 \sin^2 x - 1} \cdot \log_{\sin x} \left(\frac{1}{20} (3^{2x-1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 1) \right) \leq 0.$$

1.2.28. (ЭФ, 2000) Решить неравенство

$$\log_3 (4 + \cos 6x) \leq \sin \frac{x}{3}.$$

1.2.29. (ЭФ, 2000) Решить неравенство

Глава 1. Избранные задачи по математике

$$|x^2 - 6x + 5| < 5x - x^2.$$

1.2.30. (ЭФ, 2000) Решить неравенство

$$2^{-|x-2|} \cdot \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1.$$

1.2.31. (ЭМФ, 2000) Решить неравенство

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} > \sqrt{x-1} - \sqrt{6-x}.$$

1.2.32. (ВиГ, 2000) Решить неравенство

$$\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 4x + 5)} < \log_5(5x^2 - 20x + 25).$$

1.2.33. (ВиГ, 2000) Решить неравенство

$$\sqrt{\log_4(2 + 4x - 2x^2)} > \log_2(1 + 2x - x^2).$$

1.2.34. (ВиГ, 2000) Решить неравенство

$$\sqrt{\log_4(-4 + 8x - 2x^2)} > \log_2(-2 + 4x - x^2).$$

1.2.35. (ВиГ, 2000) Решить неравенство

$$\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < \log_5(5x^2 - 10x + 10).$$

1.2.36. (ПО, 2000) При каких t число 1 является решением неравенства

$$\log_{x+t^2}(x^2 + tx + 3t^2 - 1) \leq 1?$$

1.2.37. (ПО, 2000) При каких t число -1 является решением неравенства

$$\log_{t^2+x^2}(x^2 + 2tx + 4t^2 - 1) \leq 1?$$

1.2.38. (ПО, 2000) При каких p число 2 является решением неравенства

$$\log_{\frac{x}{2+p^2}}\left(0,5p^2 + 0,5 - x^2 + \frac{6p}{x}\right) \geq -1?$$

1.2.39. (ПО, 2000) При каких p число -1 является решением неравенства

$$\log_{\frac{x^2}{1+p^2}}\left(p^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} + \frac{3p}{x}\right) \geq -1?$$

1.2.40. (ЭФ, 2000) Решить неравенство

$$\cos(2 + 4x) + \cos(2 - 4x) \geq \sqrt{\frac{2 \cos^2 2x + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}}{2 - \sin x}}.$$

1.2.41. (ЭФ, 2000) Решить неравенство

$$\cos^2(3 + x) + \sin^2(3 - x) \leq 1 - \sqrt{\sin 2x \cdot \left(\frac{1}{2} + |\cos x|\right)}.$$

1.2.42. (ЭФ, 2000) Решить неравенство

$$\sin(3 + 2x) + \sin(3 - 2x) \geq \sqrt{\left(2 \sin^2 x + \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}\right) \cdot (1 + \cos^2 x)}.$$

1.2.43. (ЭФ, 2000) Решить неравенство

$$\sin^2\left(2 + \frac{y}{2}\right) - \cos^2\left(2 - \frac{y}{2}\right) \leq -\sqrt{\frac{\cos y}{5 + \cos y}}.$$

1.3. Системы

1.3.1. (ЭФ, 95) Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \cos y = 0 \\ 2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0 \end{cases}.$$

1.3.2. (ЭФ, 95) Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{\cos x} \cdot \cos y = 0 \\ \cos 2x - 2\cos^2 y + 2 = 0 \end{cases}.$$

1.3.3. (ЭФ, 95) Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{\cos 2x} \cdot \cos x = 0 \\ 2\sin^2 x - \cos\left(2y - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases}.$$

1.3.4. (ЭФ, 95) Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{\sin 2y - 1} \cdot \sin y = 0 \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) - 2\sin 3x = 0 \end{cases}.$$

1.3.5. (ЭМФ, 97) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}.$$

1.3.6. (ЭМФ, 97) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2 + 8xy + 5y^2 + 2x - 2y + 2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 3 \end{cases}.$$

1.3.7. (ЭМФ, 97) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + 24 = \frac{x^3}{y} \\ xy - 6 = \frac{y^3}{x} \end{cases}.$$

1.3.8. (ЭМФ, 97) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = 40y \\ y^3 + yx^2 = 10x \end{cases}.$$

1.3.9. (ПО, 97) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y - 18 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + xy - 62 = 0 \end{cases}.$$

1.3.10. (ПО, 97) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy - 3 = 0 \\ xy - x - y + 1 = 0 \end{cases}.$$

Глава 1. Избранные задачи по математике

1.3.11. (ПО, 97) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \\ x^2 - xy - 2x - 3y - 6 = 0 \end{cases}.$$

1.3.12. (ПО, 97) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy + x + 3y + 1 = 0 \end{cases}.$$

1.3.13. (ЭФ, 98) При каких значениях параметра p система

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5 \cdot |x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3p \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

1.3.14. (ЭФ, 98) При каких значениях параметра p система

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{|y|} + 3 \cdot |y| - 2 = 5x + 3y^2 - 5p \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

1.3.15. (ЭФ, 98) Найти все значения параметра p , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (3 - 2\sqrt{2})^y + (3 + \sqrt{8})^y - 3p = x^2 + 6x + 5 \\ y^2 + (p^2 - 5p + 6) \cdot x^2 = 0 \\ -6 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

1.3.16. (ЭФ, 98) Найти все значения параметра p , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x - 3 = p - 2y + y^2 \\ x^2 + (2 - p - p^2) \cdot y^2 = 0 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

1.3.17. (ЗФ, 98) При каких значениях параметра p система

$$\begin{cases} pxu + x - y + \frac{3}{2} = 0 \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1.3.18. (ЗФ, 98) При каких значениях параметра p система

$$\begin{cases} 3y + 2 + xy = 0 \\ x \cdot (y + 1 - p) + y \cdot (2p - 3) + p + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1.3.19. (ЭМФ, 2000) Найти все числа x и y , для которых

Глава 1. Избранные задачи по математике

$$\begin{cases} 2^{x+1} = y^2 + 4 \\ 2^{x-1} \leq y \end{cases}.$$

1.3.20. (ЭМФ, 2000) Найти все числа x и y , для которых

$$\begin{cases} 2^{x+1} = 4y^2 + 1 \\ 2^x \leq 2y \end{cases}.$$

1.3.21. (ЭМФ, 2000) Найти все числа x и y , для которых

$$\begin{cases} \log_2^2 x + 1 = 2 \log_2 y \\ \log_2 x \geq \log_2 y \end{cases}.$$

1.3.22. (ЭМФ, 2000) Найти все числа x и y , для которых

$$\begin{cases} 4 \log_2^2 x + 1 = 2 \log_2 y \\ 2 \log_2 x \geq \log_2 y \end{cases}.$$

1.3.23. (ПО, 2000) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 0 \\ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 y = 6 \end{cases}.$$

1.3.24. (ПО, 2000) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \operatorname{tg} y = 0 \\ \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 1 \end{cases}.$$

1.3.25. (ПО, 2000) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \operatorname{ctg} y = 0 \\ 2(\sin^2 x + \operatorname{ctg}^2 y) = 3 \end{cases}.$$

1.3.26. (ПО, 2000) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

1.3.27. (ЭФ, 2000) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x - 5 \cdot 2^{y-x} = 4001 \\ 3 \cdot 2^{y-x} + 3^x = 8097 \end{cases}.$$

1.3.28. (ЭФ, 2000) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9 \cdot 5^x + 7 \cdot 2^{x+y} = 457 \\ 6 \cdot 5^x - 14 \cdot 2^{x+y} = -890 \end{cases}.$$

1.3.29. (ЭФ, 2000) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 2187 \\ 3^x + 3^y = 108 \end{cases}.$$

1.3.30. (ЭФ, 2000) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5^x + 5^y = 150 \\ 5^x \cdot 5^y = 3125 \end{cases}.$$

1.4. Функции

1.4.1. (ЭФ, 95) Найдите область изменения функции

$$y = x - \sqrt{4x^2 - 12x + 9} - \sqrt{x^2 - 4x + 4}.$$

1.4.2. (ЭФ, 95) Найдите область изменения функции

$$y = \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{4x^2 - 4x + 1} - x.$$

1.4.3. (ЭФ, 95) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} - 2x.$$

1.4.4. (ЭФ, 95) Найдите наибольшее значение функции

$$y = 3x - \sqrt{9x^2 - 6x + 1} - \sqrt{4x^2 - 12x + 9}.$$

1.4.5. (ЭФ, 95) Найти точку графика функции $y = x^2 + \frac{1}{2}$, ближайшую к

точке $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$.

1.4.6. (ЭФ, 95) Найти точку графика функции $y = 1 - 2x^2$, ближайшую к

точке $\left(1; \frac{3}{4}\right)$.

1.4.7. (ЭФ, 95) Найти точку графика функции $y = \frac{3}{4} + 2x^2$, ближайшую к

точке $(1; 1)$.

1.4.8. (ЭФ, 95) Найти точку графика функции $y = 1 - x^2$, ближайшую к точке

$\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

1.4.9. (ЭФ, 97) Сравнить числа $\log_2 3$ и $\log_3 5$.

1.4.10. (ЭФ, 97) Сравнить числа $\log_3 6$ и $\log_4 7$.

1.4.11. (ЭМФ, 97) Вычислить $\arcsin(\sin 10)$.

1.4.12. (ЭМФ, 97) Вычислить $\operatorname{arctg}(tg 5)$.

1.1.13. (СФ, 98) Найти множество значений функции

$$y = \sqrt{\sin x - \cos^2 x + 5}.$$

1.1.14. (СФ, 98) Найти множество значений функции

$$y = \sqrt{2 - \cos x - \sin^2 x}.$$

1.1.15. (СФ, 98) Найти множество значений функции

$$y = \sqrt{1,5 + \cos x - 0,5 \cos 2x}.$$

1.1.16. (СФ, 98) Найти множество значений функции

$$y = \sqrt{5,5 + 0,5 \cos 2x - \cos x}.$$

1.4.17. (ЭМФ, 99) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 3 \sin^2 x + 2 \sin 2x + 6 \cos^2 x.$$

1.4.18. (ЭМФ, 99) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

Глава 1. Избранные задачи по математике

$$y = \cos^2 x + 5 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x .$$

1.4.19. (ЭМФ, 99) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \sqrt{11 - \sin 2x - 4 \cos x - 4 \sin x} .$$

1.4.20. (ЭМФ, 99) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \sqrt{5(\cos x - \sin x) + 2 \sin x \cdot \cos x + 23} .$$

1.4.21. (ЭФ, 99) Найти множество значений функции

$$y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1} .$$

1.4.22. (ЭФ, 99) Найти множество значений функции

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3} .$$

1.4.23. (СФ, 2000) Какое наименьшее значение может принять выражение $3 - \sqrt{4 - \sqrt{3x^2 + 4\sqrt{3} \cdot x + 4}}$? При каком значении x достигается это наименьшее значение?

1.4.24. (СФ, 2000) При каких значениях x выражение $\frac{5}{5 + \sqrt{-4x^2 + 4\sqrt{2} \cdot x - 2}}$

примет наибольшее значение? Найти это значение.

1.4.25. (СФ, 2000) Какое наименьшее значение может принять выражение $1 - \sqrt{9 - \sqrt{2x^2 + 6\sqrt{2} \cdot x + 9}}$? При каких значениях x достигается это наименьшее значение?

1.4.26. (СФ, 2000) При каких значениях x выражение $2 + \frac{3}{1 + \sqrt{-3x^2 + 2\sqrt{3} \cdot x - 1}}$ принимает наибольшее значение? Найти это значение.

1.5. Текстовые задачи

1.5.1. (ЭФ, 95) Мясокомбинат производит за день 9 тонн колбасных изделий трех сортов по цене 2 руб., 3 руб. и 8 руб. за 1 кг на общую сумму 30 тыс. руб. (по старому курсу рубля). Известно, что количество тонн производимых за день изделий соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн колбасных изделий каждого сорта производится комбинатом за день?

1.5.2. (ЭФ, 95) В магазине продано 12 тонн конфет трех сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб. и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 42 тыс. руб. (по старому курсу рубля). Известно, что количество тонн проданных конфет соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн конфет каждого сорта продано в магазине?

Глава 1. Избранные задачи по математике

1.5.3. (ЭФ, 95) В магазине продано 10,5 тонн орехов трех сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб. и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 33 тыс. руб. (по старому курсу рубля). Известно, что количество тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют геометрическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?

1.5.4. (ЭФ, 95) Мясокомбинат производит за день 3,5 тонн колбасных изделий трех сортов по цене 2 руб., 3 руб. и 4 руб. за 1 кг на общую сумму 9 тыс. руб. (по старому курсу рубля). Известно, что количество тонн производимых за день изделий соответственно первого, второго и третьего сортов образуют геометрическую прогрессию. Сколько тонн колбасных изделий каждого сорта производится на комбинате за день?

1.5.5. (ЭФ, 95) В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в три раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но менее чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

1.5.6. (ЭФ, 95) В двух бригадах вместе более 27 человек. Число членов первой бригады более чем в два раза превышает число членов второй бригады, уменьшенное на 12. Число членов второй бригады более чем в 9 раз превышает число членов первой бригады, уменьшенное на 10. Сколько человек в каждой бригаде?

1.5.7. (ЭФ, 95) Число деталей, изготовленных за смену первой бригадой, составляет 115% от числа деталей, изготовленных за смену второй бригадой. Продукцию двух бригад упаковали в 2 ящика. В первом ящике оказалось $\frac{2}{3}$ деталей, изготовленных первой бригадой, и $\frac{1}{7}$ часть деталей

второй бригадой (Следовательно, во втором ящике оказалось $\frac{1}{3}$ деталей,

изготовленных первой бригадой, и $\frac{6}{7}$ часть деталей второй бригадой).

Сколько деталей за смену изготавливала каждая бригада, если в первом ящике оказалось менее 1000 деталей, а во втором – более 1000 деталей?

1.5.8. (ЭФ, 95) Производительность первого автомобильного завода не превышает 960 машин в сутки. Производительность второго автомобильного завода первоначально составляла 95% от производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки на 23% от числа машин, выпускаемых в сутки на первом заводе, и стал выпускать более 1000 штук в сутки. Сколько автомобилей за сутки выпускал каждый завод

Глава 1. Избранные задачи по математике

до реконструкции второго завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое количество машин.

1.5.9. (ЭФ, 95) 0,5 кг лука, 3 кг картофеля и 1 кг огурцов стоят вместе 20500 руб., а 2 кг лука и 4 кг огурцов стоят 46000 руб. Сколько стоят 1 кг лука, 2 кг картофеля и 2 кг огурцов вместе?

1.5.10. (ЭФ, 95) Один ящик гаек, один ящик гвоздей и два ящика шурупов весят вместе 100 кг, а три ящика гаек, три ящика гвоздей и один ящик шурупов весят вместе 200 кг. Сколько весят один ящик гаек и один ящик гвоздей вместе?

1.5.11. (ЭФ, 95) Если 3 км идти пешком, 7 км ехать верхом и 2 км – на велосипеде, то это займет 1 час 35 мин. Если 1 км идти пешком, 2 км ехать верхом и 1 км ехать на велосипеде, то придется потратить 31 мин. Сколько времени займет прогулка, во время которой 1 км идут пешком, 1 км едут верхом и 2 км – на велосипеде?

1.5.12. (ЭФ, 95) 2 кг колбасы, 1 кг масла и 3 кг сыра стоят вместе 179000 руб., а 2 кг колбасы, 3 кг масла и 3 кг сыра стоят вместе 241000 руб. Сколько стоят 2 кг колбасы, 4 кг масла и 3 кг сыра вместе?

1.5.13. (ЭФ, 95) Группа студентов решила купить магнитофон ценой от 170 до 195 руб. (имеется в виду старый курс рубля). Однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся студентов пришлось внести на 1 руб. больше. Сколько стоил магнитофон?

1.5.14. (ЭФ, 95; ЭФ, 98) Для перевозки груза из одного места в другое затребовано некоторое количество одинаковых машин. В виду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому дополнительно были затребованы 4 такие машины. Вес перевезенного груза был больше 55 т, но не превосходил 64 т. Сколько тонн груза было перевезено на каждом грузовике?

1.5.15. (ЭФ, 95) Для перевозки кирпича от железнодорожной станции в колхоз затребовали некоторое количество одинаковых машин. В виду плохой сельской дороги на каждую машину пришлось грузить на 1 т кирпича меньше, чем предполагалось, поэтому дополнительно были затребованы 6 таких же машин. Вес перевезенного кирпича был больше 68 т, но не превосходил 74 т. Сколько тонн груза было перевезено на каждом грузовике?

1.5.16. (ЭМФ, 97) Из пунктов A и B вышли навстречу друг другу два поезда, причем второй поезд вышел на полчаса позже первого. Через два часа после выхода первого поезда расстояние между ними составляло $\frac{19}{30}$

Глава 1. Избранные задачи по математике

расстояния между A и B . Поезда встретились в середине AB . За сколько часов каждый поезд пройдет путь AB ?

1.5.17. (ЭМФ, 97) Два поезда одновременно выходят навстречу друг другу из пунктов A и B , расстояние между которыми 60 км. Первый поезд, пройдя 20 км, остановился на 30 минут, затем, пройдя 4 минуты, встретил второй поезд. Оба поезда прибыли одновременно в пункты A и B . Найти скорости поездов?

1.5.18. (ЭМФ, 97) Два пешехода одновременно выходят навстречу друг другу из пунктов A и B , и встречаются через 30 минут. Продолжая движение, первый пешеход прибывает в B на 11 минут раньше, чем второй пешеход в A . Определить время в пути каждого пешехода?

1.5.19. (ЭМФ, 97) Из пункта A в пункт B выехал грузовик. Через один час следом выехал второй грузовик. Оба прибыли в B одновременно. Если бы они выехали из A в B одновременно навстречу друг другу, то встретились бы через 1 час 12 минут. Определить время в пути первого грузовика?

1.5.20. (ЗФ, 97) Имеются два слитка сплавов меди и олова. Первый весит 3 кг и содержит 40% меди, второй весит 7 кг и содержит 30% меди. Какого веса нужно взять куски этих слитков, чтобы после переплавки получить 8 кг сплава, содержащего 32%?

1.5.21. (ЗФ, 97) Имеются два куска сплава меди и цинка с процентным содержанием меди 20% и 40% соответственно. В каком отношении нужно взять эти сплавы, чтобы, переплавив взятые куски вместе, получить сплав, содержащий 25% меди?

1.5.22. (ЗФ, 97) Имеется два раствора кислоты разной концентрации. Объем одного раствора – 4 л, другого – 6 л. Если их слить вместе, то получится 35%-ый раствор кислоты. Если же слить равные объемы этих растворов, то получится 36%-ый раствор кислоты. Сколько литров кислоты содержится в каждом из первоначальных растворов?

1.5.23. (ЗФ, 97) Имеется два раствора соли в воде, первый – 40%-ый, второй – 60%-ый. Их смешали, добавили 5 кг воды и получили 20%-ый раствор. Если бы вместо 5 кг воды добавили 5 кг 80%-ного раствора, то получили бы 70%-ый раствор. Сколько было 40%-ого и 60% растворов?

1.5.24. (ЭФ, 97) Бассейн наполняется двумя трубами за 6 часов. Одна первая труба наполняет его на 5 часов быстрее, чем одна вторая. За какое время каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бассейн?

1.5.25. (ЭФ, 97) Первая труба наполняет бак на 2 часа дольше, а вторая на 4,5 часа дольше, чем наполняют этот бак обе трубы, открытые одновременно. За какое время можно наполнить бак через одну первую трубу?

1.5.26. (ЭФ, 97) Двое мастеров, работая вместе, выполняют некоторое задание за 30 дней. После шестидневной совместной работы один из них, работая отдельно, может закончить это задание за 40 дней. За сколько дней каждый из них, работая отдельно, может выполнить задание?

Глава 1. Избранные задачи по математике

1.5.27. (ЭФ, 97) Если одновременно открыть два крана, то бассейн наполнится за 4,5 часа. Если же наполнить половину бассейна через один кран, а другую половину – через другой кран, то для наполнения бассейна потребуется 12 часов. За какое время наполняет бассейн каждый кран в отдельности?

1.5.28. (ЭМФ, 98) Пять человек выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, могут выполнить всю работу за 7,5 ч; первый, третий и пятый вместе – за 5 ч; первый, третий и четвертый вместе – за 6 ч, а второй, четвертый и пятый вместе – за 4 ч. За какой промежуток времени выполнят эту работу все 5 человек вместе?

1.5.29. (ЭМФ, 98) В бассейне имеется некоторое количество воды. Вода в бассейн начинает прибывать непрерывно и равномерно. Включают испарители воды, которые также работают непрерывно. Известно, что 17 испарителей могут выпарить воду за 8 часов, а 13 испарителей – за 12 часов. Сколько потребуется испарителей, чтобы выпарить воду за 16 часов?

1.5.30. (ЭМФ, 98) Партия одинаковых деталей обрабатывалась на трех станках разных конструкций в такой последовательности: сначала действовал только первый станок столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на втором и третьем станках; затем действовал только второй станок столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на первом и третьем станках. Остальная часть партии деталей была обработана на третьем станке в течение столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на первом и втором станках. Во сколько раз быстрее была бы выполнена эта работа, если бы действовали совместно три станка?

1.5.31. (ЭМФ, 98) Несколько рабочих выполняют работу за 14 дней. Если бы их было на 4 человека больше и каждый работал в день на 1 час дольше, то та же работа была бы сделана за 10 дней. Если бы их было ещё на 6 человек больше и каждый работал бы ещё на 1 час в день дольше, то эта работа была бы сделана за 7 дней. Сколько было рабочих и сколько часов в день они работали?

1.5.32. (ЭМФ, 98) Два человека одновременно начали спускаться по движущемуся вниз эскалатору метро, причем один шел вдвое быстрее другого. Один из них насчитал 60 ступенек, а второй – 40. Сколько ступенек пришлось бы им отшагать по неподвижному эскалатору?

1.5.33. (ЭМФ, 98) Колонна автомобилей, движущихся равномерно с одной и той же скоростью, имеет длину 5 км. В последнем автомобиле находится начальник колонны, а рядом мотоциклист. По приказу начальника мотоциклист увеличил скорость, поравнялся с головной машиной, передал

Глава 1. Избранные задачи по математике

пакет, мгновенно развернулся и с той же скоростью, с какой ехал вперёд, поехал обратно на своё место. Пока мотоциклист выполнял поручение, колонна продвинулась вперёд на 5 км. Сколько километров проехал мотоциклист?

1.5.34. (ЭМФ, 98) Из пунктов A в B одновременно выезжают два автомобиля и встречаются в 12 часов дня. Если скорость первого удвоить, а скорость второго оставить первоначальной, то встреча произойдёт на 56 минут раньше. Если же скорость второго удвоить, а скорость первого оставить первоначальной, то они встретятся на 65 минут раньше. Определить время встречи в том случае, когда скорость обоих была бы удвоенной.

1.5.35. (ЭМФ, 98) Из A в B и из B в A одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму до конца пути осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому до конца пути осталось пройти 15 км. Сколько километров останется пройти второму пешеходу после того, как первый закончит переход?

1.5.36. (ЭФ, 98) Из бутылки, наполненной 12%-ным (по массе) раствором соли, отлили 1 л и налили 1 л воды. Затем отлили ещё один литр и опять долили водой. В бутылки оказался 3%-ный (по массе) раствор соли. Какова вместительность бутылки?

1.5.37. (ЭФ, 98) Из сосуда, наполненного 96%-ным раствором кислоты, отлили 2,5 л и долили 2,5 л 80%-го раствора той же кислоты, затем ещё раз отлили 2,5 л и снова долили 2,5 л 80%-го раствора кислоты. После этого в сосуде получился 89%-ный раствор кислоты. Определить вместительность сосуда.

1.5.38. (ЭФ, 98) Сосуд вместимостью 20 л наполнен кислотой. Из него переливают некоторое количество кислоты во второй сосуд такой же вместимости. Доливают водой второй сосуд и полученной смесью доливают первый сосуд. Затем из первого сосуда во второй отливают $6\frac{2}{3}$ л смеси, и после этого в обоих сосудах кислоты оказалось одинаковое количество. Сколько литров кислоты отлили первоначально из первого сосуда?

1.5.39. (ЭФ, 98) В двух сосудах, вместимостью каждый по 30 л, вместе налито 30 л спирта. Первый сосуд долили водой и полученной смесью долили второй сосуд. Перелив 12 л смеси из второго сосуда в первый, получили, что во втором сосуде оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом. Сколько литров спирта было первоначально в каждом сосуде?

1.5.40. (ЭФ, 98; ЭФ, 95) Несколько человек должны были принять участие в экскурсии. Однако в последний момент два человека от участия в ней отказались, поэтому каждому из оставшихся экскурсантов пришлось

Глава 1. Избранные задачи по математике

уплатить за участие в экскурсии на 3 руб. больше, чем планировалось первоначально (все участники должны были заплатить поровну). Сколько должен был заплатить каждый экскурсант первоначально, если стоимость экскурсии больше 70 руб., но не больше 75 руб.?

1.5.41. (ЭФ, 98) Для размещения комплекта журналов достаточно купить 13 стандартных полок. Однако в продаже оказались полки, на которых умещается на 7 журналов меньше, чем на стандартных, поэтому пришлось купить 27 полок, в результате осталось свободное место для 3 журналов. Сколько журналов в комплекте?

1.5.42. (ЭФ, 98) Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 т, но один вагон оказался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 т, однако, понадобилось на восемь вагонов больше и при этом всё равно один вагон остался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 т, однако понадобилось ещё на пять вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

1.5.43. (ЭМФ, 2000) Три поезда выехали одновременно: пассажирский из города A в город B , а скорый и товарный поезда из города B в город A . Пассажирский и скорый поезда встретились через 4 часа. Скорый поезд пришел в город A на 7 часов раньше товарного. Скорость пассажирского поезда в 1,5 раза больше скорости товарного. За какое время товарный поезд прошел путь от города B до города A ?

1.5.44. (ЭМФ, 2000) Две автомашины, выехавшие одновременно из городов A и B навстречу друг другу, каждая со своей скоростью, встретились через 6 часов. Первой машине, чтобы пройти $\frac{2}{5}$ пути от A до B , требуется на два часа больше, чем второй, для того, чтобы пройти $\frac{2}{15}$ пути от B до A . За сколько часов вторая машина проходит путь от города B до A ?

1.5.45. (ЭМФ, 2000) Из пункта A отправляется машина, а через час мотоцикл, который догоняет машину в пункте B . В этот момент из пункта A отправляется второй мотоцикл, идущий с той же скоростью, что и первый. Второй мотоцикл догоняет машину через 6 часов после своего отправления. За какое время мотоцикл проходит путь от пункта A до пункта B ?

1.5.46. (ЭМФ, 2000) Два пешехода одновременно выходят навстречу друг другу из пунктов A и B и встречаются через три часа. Если бы они оба вышли из пункта A и пошли в пункт B , причем второй вышел бы на три часа позднее первого, то второй пешеход догнал бы первого, пройдя $\frac{2}{3}$

Глава 1. Избранные задачи по математике

расстояния от пункта A до пункта B . Сколько времени потребуется первому пешеходу на путь из пункта A в пункт B ?

1.5.47. (ЭФ, 2000) В буфете продавались бублики за 60 руб., булки за 70 руб. и слойки за 80 руб. Было куплено на 1000 руб. 15 изделий разных сортов. Сколько каких изделий было куплено, если известно, что никаких изделий не было куплено больше 7, причем булок было куплено больше 4?

1.5.48. (ЭФ, 2000) В буфете продавались пирожки за 50 руб., бублики за 60 руб. и коржики за 100 руб. Группа ребят купила на 1000 руб. 14 изделий разных сортов. Сколько каких изделий было куплено, если известно, что никаких изделий не было куплено больше 7?

1.5.49. (ЭФ, 2000) Группа студентов, состоящая из 25 человек, получила на экзамене оценки “3”, “4”, “5”. Сумма полученных оценок равна 105. Определить, сколько каких оценок получила группа, если известно, что никаких оценок не было получено больше 11, а число “пятерок” было нечетным.

1.5.50. (ЭФ, 2000) У продавца мороженого есть мороженое первого, второго и третьего сортов соответственно по цене 70, 80 и 150 руб. за порцию. Общее число порций 120, а общая стоимость – 12240 руб. Найти число порций каждого сорта, если известно, что число порций каждого сорта не превышает 47, а число порций второго сорта больше 33.

1.5.51. (ЭФ, 2000) Некто положил в банк определенную сумму денег под постоянный месячный процент, рассчитывая получить за год доход 900 руб. Через полгода ему пришлось снять со счета 400 руб. Какова была величина исходного вклада, если в конце года сумма на счете составила 2000 руб.

1.5.52. (ЭФ, 2000) Предприниматель положил в коммерческий банк некоторую сумму денег под фиксированный процент годового дохода (более 60%). За первые два года сумма вклада возросла на 300 долларов, а к концу третьего года составила 800 долларов. Определить сумму исходного вклада.

1.5.53. (ЭФ, 2000) Некто положил в коммерческий банк определенную сумму денег под фиксированный процент годового дохода (более 60%). За первые два года сумма вклада возросла на 800 долларов, а к концу третьего года составила 2700 долларов. Определить сумму исходного вклада.

1.5.54. (ЭФ, 2000) Фермер положил в банк определенную сумму денег под постоянный месячный процент, рассчитывая получить за год доход 700 долларов. Через полгода он снял со счета 300 долларов. Какова была величина исходного вклада, если к концу года сумма на счете составила 1200 долларов?

Глава 2. Решения, указания, ответы

2.1. Уравнения

1.1.1. Решение. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ (x^2 - 2) \cdot \sin x = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin x \cdot (x^2 - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases} \right. \right. \\ \left. \left[\begin{cases} \sin x < 0 \\ -(x^2 - 2) \cdot \sin x = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \sin x < 0 \\ \sin x \cdot (x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \sin x < 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \sin x < 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \right. \right. \right.$$

Так как $\sin \sqrt{3} > 0$, $\sin(-\sqrt{3}) < 0$, $\sin 1 > 0$, $\sin(-1) < 0$, то решениями уравнения будут: $x = \sqrt{3}$, $x = -1$, $x = \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = \sqrt{3}$, $x = -1$, $x = \pi n$, $n \in Z$.

1.1.2. Ответ: $x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

1.1.3. Решение. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ (x^2 + 2) \cdot \cos x = 3x \cdot \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \cos x \cdot (x^2 - 3x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \cos x = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \cos x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \right. \right. \\ \left. \left[\begin{cases} \cos x < 0 \\ (x^2 + 2) \cdot \cos x = -3x \cdot \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \cos x < 0 \\ \cos x \cdot (x^2 + 3x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \cos x < 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \cos x < 0 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{cases} \right. \right. \right.$$

Так как $\cos 1 > 0$, $\cos 2 < 0$, $\cos(-1) > 0$, $\cos(-2) < 0$, то решениями уравнения будут: $x = 1$, $x = -2$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = 1$, $x = -2$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

1.1.4. Ответ: $x = 1$, $x = -1$, $x = \pi n$, $n \in Z$.

1.1.5. Решение. Способ 1. Уравнение определено при всех $x > 0$. Тогда получаем следующие равенства

$$\begin{aligned} \log_2^2 x + x \log_2 x - \log_2 x &= 6 - 2x, \\ (\log_2^2 x - \log_2 x - 6) + x(\log_2 x + 2) &= 0, \\ (\log_2 x + 2) \cdot (\log_2 x - 3) + x(\log_2 x + 2) &= 0, \\ (\log_2 x + 2) \cdot (\log_2 x + x - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

Последнее уравнение равносильно совокупности $\begin{cases} \log_2 x = -2 \\ \log_2 x = 3 - x \end{cases}$.

Первое уравнение имеет корень $x = \frac{1}{4}$. Уравнению $\log_2 x = 3 - x$ удовлетворяет значение $x = 2$. Покажем, что корень $x = 2$ единственный. В самом деле, функция $y = \log_2 x$ возрастающая на множестве $x > 0$, а функция $y = 3 - x$ — убывающая на R . Следовательно, уравнение $\log_2 x = 3 - x$ имеет единственный корень $x = 2$.

Способ 2. Положим $t = \log_2 x$, тогда получим $t^2 + (x-1) \cdot t - (6-2x) = 0$. Будем решать это уравнение относительно t :

$$t = \frac{-(x-1) \pm \sqrt{(x-1)^2 + 4(6-2x)}}{2} = \frac{-(x-1) \pm (x-5)}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = 3 - x \end{cases}$$

Тем самым, приходим к совокупности $\begin{cases} \log_2 x = -2 \\ \log_2 x = 3 - x \end{cases}$.

Ответ: $x = \frac{1}{4}, x = 2$.

1.1.6. Ответ: $x = 2, x = 4$.

1.1.7. Решение. Способ 1. Получим следующие равенства

$$4^x + (x-11) \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x - 2x + 22 = 0,$$

$$2^x(2^x + x - 11) - 2(2^x + x - 11) = 0,$$

$$(2^x - 2) \cdot (2^x + x - 11) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} 2^x = 2 \\ 2^x = 11 - x \end{cases}$$

Первое уравнение имеет корень $x = 1$. Уравнению $2^x = 11 - x$ удовлетворяет значение $x = 3$. Покажем, что корень $x = 3$ единственный. В самом деле, функция $y = 2^x$ возрастающая на R , а функция $y = 11 - x$ — убывающая на R . Следовательно, уравнение $2^x = 11 - x$ имеет единственный корень $x = 3$.

Способ 2. Положим $t = 2^x$, тогда получим $t^2 + (x-13) \cdot t - (2x-22) = 0$. Будем решать это уравнение относительно t :

$$t = \frac{-(x-13) \pm \sqrt{(x-13)^2 + 4(2x-22)}}{2} = \frac{-(x-13) \pm (x-9)}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 11 - x \end{cases}$$

Тем самым, приходим к совокупности $\begin{cases} 2^x = 2 \\ 2^x = 11 - x \end{cases}$.

Ответ: $x = 1, x = 3$.

1.1.8. Ответ: $x = 0, x = 1$.

1.1.9. Решение. ОДЗ уравнения определяется системой неравенств

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

$$\begin{cases} 1-2x > 0 \\ 1-2x \neq 1 \\ 1-3x > 0 \\ 1-3x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{3} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению:

$$\begin{aligned} & (\log_{1-2x}(1-2x)(1-3x) - \log_{1-3x}(1-2x)^2 = 2) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\log_{1-2x}(1-2x) + \log_{1-2x}(1-3x) - 2\log_{1-3x}(1-2x) = 2) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\log_{1-2x}(1-3x) - \frac{2}{\log_{1-2x}(1-3x)} - 1 = 0 \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\log_{1-2x}^2(1-3x) - \log_{1-2x}(1-3x) - 2 = 0) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow ((\log_{1-2x}(1-3x) - 2) \cdot (\log_{1-2x}(1-3x) + 1) = 0). \end{aligned}$$

Тогда на ОДЗ получим совокупность двух уравнений:

$$\begin{cases} \log_{1-2x}(1-3x) = 2 \\ \log_{1-2x}(1-3x) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-3x = (1-2x)^2 \\ 1-3x = \frac{1}{1-2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - x = 0 \\ (1-3x)(1-2x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(4x-1) = 0 \\ 6x^2 - 5x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{4} \right) \\ x = \frac{5}{6} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: $x = 0,25$.

1.1.10. *Ответ:* $x = -0,25$.

1.1.11. *Решение.* ОДЗ уравнения определяется системой неравенств

$$\begin{cases} 5x-1 > 0 \\ 5x-1 \neq 1 \\ 2x-1 > 0 \\ 2x-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ x > \frac{1}{2} \\ x \neq \frac{2}{5} \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq -1 \end{cases}.$$

На ОДЗ уравнение равносильно уравнению:

$$(4\log_{5x-1}(10x^2 - 7x + 1) - \log_{2x-1}(25x^2 - 10x + 1) = 2) \Leftrightarrow$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (4 \log_{5x-1}(5x-1)(2x-1) - \log_{2x-1}(5x-1)^2 = 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (4 \log_{5x-1}(5x-1) + 4 \log_{5x-1}(2x-1) - 2 \log_{2x-1}(5x-1) = 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (4 + 4 \log_{5x-1}(2x-1) - 2 \log_{2x-1}(5x-1) = 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\log_{2x-1}(5x-1)} - \log_{2x-1}(5x-1) + 1 = 0 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\log_{2x-1}^2(5x-1) - \log_{2x-1}(5x-1) - 2 = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((\log_{2x-1}(5x-1) - 2) \cdot (\log_{2x-1}(5x-1) + 1) = 0). \end{aligned}$$

Тогда на ОДЗ получили совокупность двух уравнений:

$$\begin{cases} \log_{2x-1}(5x-1) = 2 \\ \log_{2x-1}(5x-1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-1 = (2x-1)^2 \\ 5x-1 = \frac{1}{2x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 9x + 2 = 0 \\ (5x-1)(2x-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4x-1)(x-2) = 0 \\ 10x^2 - 7x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x = 2 \\ x = \frac{1}{4} \\ x = \frac{7}{10} \\ x = 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{10} \\ x = 2 \end{cases}$$

Ответ: $x = 0,7; x = 2$.

1.1.12. Ответ: $x = 0,5; x = 1$.

1.1.13. Решение. Приведем уравнение к виду

$$\begin{aligned} &\left(\sin \frac{\pi x}{2} + \sin \frac{5\pi x}{2} + 2x = x^2 + 3 \right) \Leftrightarrow \left(\sin \frac{\pi x}{2} + \sin \frac{5\pi x}{2} = x^2 - 2x + 3 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\sin \frac{\pi x}{2} + \sin \frac{5\pi x}{2} = (x-1)^2 + 2 \right). \end{aligned}$$

Заметим, что для любого x выполняются соотношения:

$$\sin \frac{\pi x}{2} + \sin \frac{5\pi x}{2} \leq 2 \text{ и } (x-1)^2 + 2 \geq 2.$$

Следовательно, решения уравнения должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + 2 = 2 \\ \sin \frac{\pi x}{2} + \sin \frac{5\pi x}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \sin \frac{\pi x}{2} = 1 \\ \sin \frac{5\pi x}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ \sin \frac{5\pi}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x = 1).$$

Легко проверить подстановкой в исходное уравнение, что $x=1$ является его

решением.

Ответ: $x=1$.

1.1.14. Ответ: $x=2$.

1.1.15. Решение. Преобразуем правую часть уравнения

$$\frac{\sin 3x - \cos 3x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x = \sin 3x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 3x = \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right).$$

Следовательно, $2^{\cos^2 2x} = \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$. Так как $0 \leq \cos^2 2x \leq 1$, то $2^{\cos^2 2x} \geq 1$ при

любых x . С другой стороны, $\left| \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq 1$. Следовательно, решения

уравнения должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases} 2^{\cos^2 2x} = 1 \\ \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z \end{cases} \quad (*)$$

Найдем значения x , удовлетворяющие и первому и второму уравнениям системы. Тогда для некоторых целых значений m и n должно выполняться условие $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3} \right) \Rightarrow (3m = 4n)$. Поэтому n делится на 3, т. е. $n=3k$,

($k \in Z$) и $m=4k$. Следовательно, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$. Легко проверить

подстановкой в исходное уравнение, что $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$ является

решением.

Решим систему (*) геометрически.

Для этого, решения первого уравнения системы (*) на единичной окружности изобразим точками, а решения второго уравнения – звездочками.

Из рисунка видно, что

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z.$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \right\}$.

1.1.16. Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \right\}$.

1.1.17. Решение. Введем новую переменную $y = \sqrt{x-4} \geq 0$, тогда $x = y^2 + 4$.

Уравнение запишется в виде

$$\left(\sqrt{y^2 + 4} - 3 - 2y - \sqrt{y^2 + 4} + 5 - 6y = 2 \right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{y^2 - 2y + 1} - \sqrt{y^2 - 6y + 9} = 2 \right) \Leftrightarrow$$

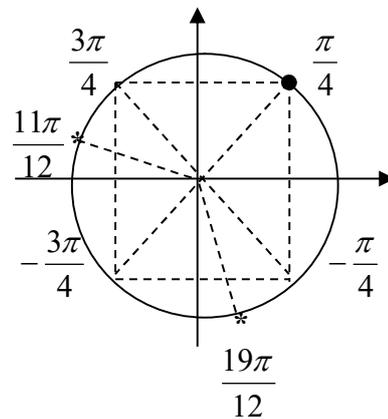


Рис. 1.

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(y-1)^2} - \sqrt{(y-3)^2} = 2 \right) \Leftrightarrow (|y-1| - |y-3| = 2).$$

Решаем уравнение методом интервалов:

$$1). \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ -(y-1) + (y-3) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ -2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \emptyset.$$

$$2). \begin{cases} 1 < y \leq 3 \\ (y-1) + (y-3) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < y \leq 3 \\ 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow (y = 3).$$

$$3). \begin{cases} y > 3 \\ (y-1) - (y-3) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 3 \\ 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow (y > 3).$$

Следовательно, $(y = \sqrt{x-4} \geq 3) \Rightarrow (x-4 \geq 9) \Leftrightarrow (x \geq 13)$.

Ответ: $x \in [13; +\infty)$.

1.1.18. Ответ: $x \in [26; +\infty)$.

1.1.19. Решение. Запишем уравнение в виде:

$$\left(\sqrt{1-4x} + 2 = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} \right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{1-4x} + 2 = \sqrt{(2x-1)^2} \right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{1-4x} + 2 = |2x-1| \right).$$

Тогда

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ \sqrt{1-4x} + 2 = 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ \sqrt{1-4x} = 2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2x-3 \geq 0 \\ 1-4x = 4x^2 - 12x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 4x^2 - 8x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x^2 - 2x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (\text{нет решений})$$

$$\begin{cases} 2x-1 < 0 \\ \sqrt{1-4x} + 2 = -(2x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < 0 \\ \sqrt{1-4x} = -1-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < 0 \\ -1-2x \geq 0 \\ 1-4x = 4x^2 + 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x \leq -\frac{1}{2} \\ 4x^2 + 8x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ x(x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow (x = -2).$$

Ответ: $x = -2$.

1.1.20. Ответ: $x = -1$.

1.1.21. Решение. Способ 1. Запишем уравнение в виде $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$ и возведем в куб обе части уравнения:

$$\left((\sqrt[3]{2-x})^3 = (1 - \sqrt{x-1})^3 \right) \Leftrightarrow (2-x = 1 - 3\sqrt{x-1} + 3(x-1) - (x-1)\sqrt{x-1}) \Leftrightarrow$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} \cdot (x+2) = 4(x-1)) \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} \cdot (x+2-4\sqrt{x-1}) = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+2-4\sqrt{x-1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x+2=4\sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2+4x+4=16x-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \geq -2 \\ x^2-12x+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \geq -2 \\ (x-2)(x-10)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=10 \end{cases}.$$

Способ 2. Пусть

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = a \\ \sqrt{x-1} = b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-x = a^3 \\ x-1 = b^2 \end{cases} \Rightarrow (a^3 + b^2 = 1).$$

Тогда, учитывая, что $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$, получим следующую систему:

$$\begin{cases} a^3 + b^2 = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + (1-a)^2 = 1 \\ b = 1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + a^2 - 2a = 0 \\ b = 1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2 + a - 2) = 0 \\ b = 1-a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1)(a+2) = 0 \\ b = 1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ a = 1 \\ b = 0 \\ a = -2 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Учитывая, что решения исходного уравнения удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = a \\ \sqrt{x-1} = b \end{cases}, \text{ получим: } x_1=1, x_2=2, x_3=10.$$

Ответ: $x_1=1, x_2=2, x_3=10$.

1.1.22. Ответ: $x_1=-15, x_2=12, x_3=76$.

1.1.23. Решение. Произведем замену $x-16 = y^3$. Тогда

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{y^3+61} = 1+y) &\Leftrightarrow (y^3+61 = (y+1)^3) \Leftrightarrow (y^3+61 = y^3+3y^2+3y+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (3y^2+3y-60=0) \Leftrightarrow (y^2+y-20=0) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-5 \\ y=4 \end{cases}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $x-16 = y^3$, имеем $x=80$ или $x=-109$.

Ответ: $x=80, x=-109$.

1.1.24. Ответ: $x=1$.

1.1.25. Решение. Способ 1. Обозначим $t = 5^x + 5^{-x}$. Тогда

$$25^x + 25^{-x} = 5^{2x} + 5^{-2x} = (5^x + 5^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2.$$

А так как заданные числа должны составлять арифметическую

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

прогрессию, то $\frac{p}{2} = \frac{t^2 + 5t - 2}{2}$, т.е.

$$t^2 + 5t - p - 2 = 0 \quad (*)$$

откуда $p = t^2 + 5t - 2$.

Замечая теперь, что при любом x значение $t \geq 2$, находим, что $p \geq 12$. С другой стороны, дискриминант уравнения (*) должен быть неотрицательным, т.е. $D = 25 + 4 \cdot (p + 2) \geq 0$.

Отсюда находим, что $p \geq -\frac{33}{4}$. Учитывая тогда предыдущее неравенство

$p \geq 12$, окончательно получаем $p \geq 12$.

Способ 2. Получив (*), обозначим $f(t) = t^2 + 5t - p - 2$. Так как $t \geq 2$, то задачу можно сформулировать так: найти значения параметра p , при каждом из которых уравнение (*) имеет хотя бы одно решение на множестве $t \geq 2$.

Заметим, что при $t = 2$ из (*) следует $p = 12$.

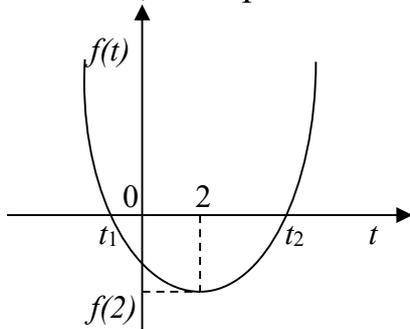


Рис. 2

Случай 1. Только один из корней t_1 и t_2 уравнения (*) лежит на промежутке $(2; +\infty)$, или, что то же, корни этого уравнения лежат по разные стороны от числа 2.

Тогда

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 + 4(p + 2) > 0 \\ -p + 12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (p > 12).$$

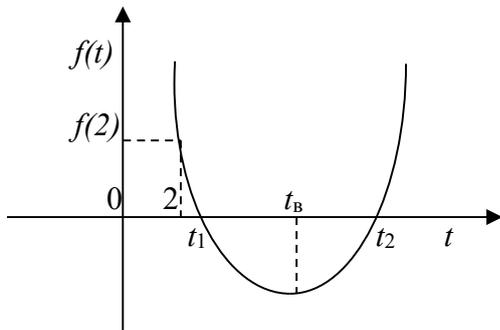


Рис. 3

Случай 2. Оба корня t_1 и t_2 уравнения (*) принадлежат промежутку $(2; +\infty)$.

Тогда

$$\begin{cases} D > 0 \\ t_2 > 2 \\ f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 + 4(p + 2) > 0 \\ -\frac{5}{2} > 2 \\ -p + 12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (p \in \{\emptyset\}).$$

Ответ: $p \geq 12$.

1.1.26. *Ответ:* $p \geq 5$.

1.1.27. *Решение.* Используя свойство логарифма степени $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$, преобразуем уравнение к виду

$$12 \cdot \log_3^2(5x - 6) - 36 \cdot \log_3(5x - 6) \cdot \log_3 x + 24 \cdot \log_3^2 x = 0.$$

Обозначим $\log_3(5x - 6) = a$ и $\log_3 x = b$. Тогда $a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно a , получим $a = 2b$ и $a = b$.

Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

$$\begin{cases} \log_3(5x-6) = 2 \cdot \log_3 x \\ \log_3(5x-6) = \log_3 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-6 > 0 \\ 5x-6 = x^2 \\ 5x-6 = x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \\ x = 1,5 \end{cases}$$

Ответ: $x = 1,5$; $x = 2$; $x = 3$.

1.1.28. Ответ: $x = 3$, $x = 2,25$.

1.1.29. Решение. Используя формулу перехода к новому основанию, формулы логарифма степени, частного и произведения, получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{18} = \left(\frac{2}{3} \right)^{\log_x 12} \right) &\Leftrightarrow (\log_2 x - \log_2 18 = \log_x 12 \cdot (\log_2 2 - \log_2 3)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\log_2 x - 1 - 2 \log_2 3 = \frac{\log_2 12}{\log_2 x} \cdot (1 - \log_2 3) \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x - (2 \log_2 3 + 1) \cdot \log_2 x + (2 + \log_2 3) \cdot (\log_2 3 - 1) = 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x - (2 \log_2 3 + 1) \cdot \log_2 x + \log_2^2 3 + \log_2 3 - 2 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Введем обозначения $y = \log_2 x$ и $a = \log_2 3$. Тогда уравнение примет вид $y^2 - (2a+1)y + a^2 + a - 2 = 0$. Решая это уравнение, как квадратное относительно y , получим:

$$\begin{aligned} (y^2 - (2a+1)y + a^2 + a - 2 = 0) &\Leftrightarrow \left(y = \frac{2a+1 \pm \sqrt{(2a+1)^2 - 4(a^2 + a - 2)}}{2} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(y = \frac{2a+1 \pm 3}{2} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} y = a-1 \\ y = a+2 \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{cases} \log_2 x = \log_2 3 - 1 = \log_2 \frac{3}{2} \\ \log_2 x = \log_2 3 + 2 = \log_2 12 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,5 \\ x = 12 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,5 \\ x = 12 \end{cases}$$

Ответ: $x = 1,5$, $x = 12$.

1.1.30. Ответ: $x = 6$, $x = \frac{2}{27}$.

1.1.31. Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$|x^2 - 16x + 55| + (x^2 - 16x + 55) + |-1 + \cos(\pi^3 \sqrt{x})| - \cos(\pi^3 \sqrt{x}) + 1 = 0.$$

Так как $1 - \cos(\pi^3 \sqrt{x}) \leq 0$, то уравнение примет вид

$$|x^2 - 16x + 55| + (x^2 - 16x + 55) - 2 \cos(\pi^3 \sqrt{x}) + 2 = 0.$$

Рассмотрим случаи:

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

$$1). \begin{cases} x^2 - 16x + 55 \geq 0 \\ 2(x^2 - 16x + 55) - 2\cos(\pi\sqrt[3]{x}) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16x + 55 \geq 0 \\ x^2 - 16x + 55 = \cos(\pi\sqrt[3]{x}) - 1 \end{cases}.$$

Откуда

$$\begin{cases} x^2 - 16x + 55 \geq 0 \\ x^2 - 16x + 55 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x^2 - 16x + 55 = 0) \Leftrightarrow ((x-5)(x-11) = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 11 \end{cases}.$$

Учитывая, что $\cos(\pi\sqrt[3]{5}) - 1 \neq 0$ и $\cos(\pi\sqrt[3]{11}) - 1 \neq 0$, получаем, что найденные значения не являются корнями исходного уравнения.

$$2). \begin{cases} x^2 - 16x + 55 < 0 \\ -2\cos(\pi\sqrt[3]{x}) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16x + 55 < 0 \\ \cos(\pi\sqrt[3]{x}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x-11) < 0 \\ \pi\sqrt[3]{x} = 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 < x < 11 \\ x = (2n)^3, n \in Z \end{cases}.$$

Откуда $(5 < 8n^3 < 11, n \in Z) \Leftrightarrow (n = 1) \Rightarrow (x = 8n^3 = 8)$.

Проверкой убеждаемся, что $x=8$ – корень уравнения.

Ответ: $x = 8$.

1.1.32. Решение. Имеем $p \cdot (x-p)^4 - (p+1) \cdot (x-p)^2 + 1 = 0$.

Если $p=0$, уравнение примет вид $-x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 > 0, x_2 = -1 < 0$.

То есть, $p=0$ не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $p \neq 0$. Обозначим $(x-p)^2 = y$, тогда $py^2 - (p+1) \cdot y + 1 = 0$. Найдём дискриминант: $D = (p+1)^2 - 4p = (p-1)^2$.

1). Если $p=1$, то $y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$, или $(x-1)^2 = 1 \Rightarrow x-1 = 1, x_1 = 1$ или $x-1 = -1 \Rightarrow x_2 = 0$. В этом случае имеется один положительный корень, и нет отрицательных корней.

2). Если $p \neq 1$, и $p \neq 0$, то $y_1 = \frac{p+1-(p-1)}{2p} = \frac{1}{p}; y_2 = \frac{p+1+(p-1)}{2p} = 1$. Отсюда

$$(x-p)^2 = \frac{1}{p} \text{ и } (x-p)^2 = 1.$$

Если $p < 0$, то остаётся $(x-p)^2 = 1 \Rightarrow x-p = \pm 1; x_1 = p+1, x_2 = p-1 < 0$. По крайней мере, один из двух корней отрицателен. Если $p > 0$, то имеем

четыре корня: $x_1 = p+1, x_2 = p-1, x_3 = p + \frac{1}{\sqrt{p}}, x_4 = p - \frac{1}{\sqrt{p}}$. Здесь, если

$0 < p < 1$, то $x_2 < 0$ и $x_4 < 0$, следовательно, положительных корней будет не больше, чем отрицательных. Если же $p > 1$, то все четыре корня будут положительными.

Ответ: $p \geq 1$.

1.1.33. Ответ: $p \leq -1$.

1.1.34. Решение. Способ 1. Решим уравнение

$$\left(5 - 4(1 - \cos^2 x) - 8 \cdot \frac{\cos x + 1}{2} = 3p \right) \Leftrightarrow (4\cos^2 x - 4\cos x - 3 - 3p = 0) \Leftrightarrow .$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

$$\Leftrightarrow \left(\cos x = \frac{4 \pm \sqrt{64 + 48p}}{8} \right) \Leftrightarrow \left(\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{4 + 3p}}{2} \right).$$

Тогда исходное уравнение имеет решения, если параметр p удовлетворяет совокупности:

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{1 - \sqrt{4 + 3p}}{2} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{1 + \sqrt{4 + 3p}}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq 1 - \sqrt{4 + 3p} \leq 2 \\ -2 \leq 1 + \sqrt{4 + 3p} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq -\sqrt{4 + 3p} \leq 1 \\ -3 \leq \sqrt{4 + 3p} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \sqrt{4 + 3p} \leq 3 \\ -3 \leq \sqrt{4 + 3p} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 4 + 3p \leq 9 \\ 0 \leq 4 + 3p \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq 3p \leq 5 \\ -4 \leq 3p \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} \leq p \leq \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \leq p \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{3} \leq p \leq \frac{5}{3} \right).$$

Поэтому целыми значениями параметра p , при каждом из которых уравнение имеет решения, будут $p = -1, p = 0, p = 1$.

Способ 2.

Имеем $5 - 4(1 - \cos^2 x) - 8 \cdot \frac{\cos x + 1}{2} = 3p$, откуда $4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 - 3p = 0$.

Полагая в этом уравнении $\cos x = t$, ($-1 \leq t \leq 1$), получим

$$f(t) = 4t^2 - 4t - 3 - 3p = 0. \quad (*)$$

Теперь задачу можно сформулировать так: найти все значения параметра p , при каждом из которых уравнение (*) имеет решения на отрезке $[-1; 1]$.

Заметим, что из (*) следует: значениям $t = -1, t = 1$ отвечают значения $p = \frac{5}{3}$,

$p = -1$ соответственно.

Случай 1. Один и только один из корней t_1 и t_2 уравнения (*) принадлежит интервалу $(-1; 1)$. Тогда $f(-1)f(1) < 0$ или

$$((5 - 3p)(-3 - 3p) < 0) \Leftrightarrow (3(3p - 5)(p + 1) < 0), \text{ откуда } p \in \left(-1; \frac{5}{3} \right).$$

На промежутке $\left(-1; \frac{5}{3} \right)$ целыми значениями параметра p будут $p = 0, p = 1$.

Случай 2. Оба корня t_1 и t_2 уравнения (*) принадлежат интервалу $(-1; 1)$.

Тогда

$$\begin{cases} D > 0 \\ -1 < t_e < 1 \\ f(-1) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 3p > 0 \\ -1 < \frac{1}{2} < 1 \\ 5 - 3p > 0 \\ -3 - 3p > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p > -\frac{4}{3} \\ p < \frac{5}{3} \\ p < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{3} < p < 1 \right).$$

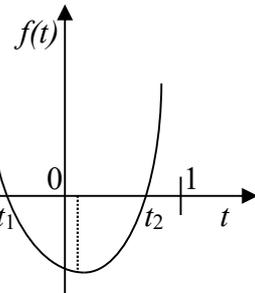


Рис. 4

Но на интервале $\left(-\frac{4}{3}; -1\right)$ нет целых значений параметра p .

Ответ: $p=-1, p=0, p=1$.

1.1.35. *Ответ:* $p=0, p=1, p=2$.

1.1.36. *Решение. Способ 1.* Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{2x^2 - 3x - 5} + x\sqrt{x+1} + 5 = 4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x-5} + 2x\right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt{(2x-5)(x+1)} - (2x-5) + x\sqrt{x+1} - 6\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{2x-5} = 0\right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-5}(\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5}) + (x-6)\sqrt{x+1} + 2(\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5}) = 0\right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left((\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5})(\sqrt{2x-5} + 2) + (x-6)\sqrt{x+1} = 0\right) \end{aligned}$$

Заметим, что имеет место соотношение: $\left(x-6 = (\sqrt{2x-5})^2 - (\sqrt{x+1})^2\right)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left((\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5})(\sqrt{2x-5} + 2) - (\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5})\sqrt{x+1} = 0\right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left((\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5})(\sqrt{2x-5} + 2 - (\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5})\sqrt{x+1}) = 0\right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left((\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5})(\sqrt{2x-5} - x + 1 - \sqrt{2x-5} \cdot \sqrt{x+1}) = 0\right). \end{aligned}$$

Откуда $(\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-5}) \Leftrightarrow (x+1 = 2x-5) \Leftrightarrow (x=6)$.

Докажем, что других корней нет. Действительно:

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x-5} - x + 1 - \sqrt{2x-5} \cdot \sqrt{x+1} = \frac{-2x+5+2\sqrt{2x-5}-1}{2} - 1 - \sqrt{2x-5} \cdot \sqrt{x+1} = \\ & = -\frac{(\sqrt{2x-5}-1)^2}{2} - 1 - \sqrt{2x-5} \cdot \sqrt{x+1} < 0. \end{aligned}$$

Способ 2. Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{2x^2 - 3x - 5} + x\sqrt{x+1} + 5 = 4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x-5} + 2x\right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt{(2x-5)(x+1)} - 2\sqrt{2x-5} + x\sqrt{x+1} - 2x - 4\sqrt{x+1} + 8 - 3 = 0\right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt{(2x-5)(x+1)} - 2\right) + x(\sqrt{x+1} - 2) - 4(\sqrt{x+1} - 2) = 3 \Leftrightarrow \left((\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{2x-5} + x - 4) = 3\right) \end{aligned}$$

Рассмотрим функции: $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$, $g(x) = \sqrt{2x-5} + x - 4$, $h(x) = 3$. Заметим,

что на ОДЗ: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x \geq \frac{5}{2}\right)$, функции $f(x)$ и $g(x)$ являются

возрастающими. Действительно: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$, $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-5}} + 1 > 0$ на

интервале $(2,5; +\infty)$. Так как $f(x), g(x) > 0$ на $(3; +\infty)$, и $f(x), g(x) < 0$ на $(2,5; 3)$, то

$f(x) \cdot g(x)$ – возрастает на $(3; +\infty)$ и убывает на $(2,5; 3)$. Учитывая, что $f(2,5)g(2,5) = (\sqrt{3,5} - 2)(-1,5) = 3 - 1,5\sqrt{3,5} < 3$, то полученное уравнение может

иметь на ОДЗ не более одного решения. Подбором находим его: $x=6$.

Ответ: $x=6$.

1.1.37. *Ответ:* $x=7$.

1.1.38. *Решение. Способ 1.* Выполним преобразования:

$$\left(\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x - 2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - x + 2}\right) \Leftrightarrow$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{2x^2 + 2x + 3} = \sqrt{x^2 - x + 2} - \sqrt{x^2 - 3x - 2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\left(\sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{2x^2 + 2x + 3} \right) \left(\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 + 2x + 3} \right)}{\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 + 2x + 3}} = \frac{\left(\sqrt{x^2 - x + 2} - \sqrt{x^2 - 3x - 2} \right) \left(\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - 3x - 2} \right)}{\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - 3x - 2}} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-2x - 4}{\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 + 2x + 3}} = \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - 3x - 2}} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((2x + 4) \left(\frac{1}{\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 + 2x + 3}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - 3x - 2}} \right) = 0 \right) \Leftrightarrow (x = -2).$$

Способ 2. Решим уравнение:

$$\left(\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x - 2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - x + 2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - x + 2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x - 2} \right).$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\begin{aligned} &2x^2 - 1 - 2\sqrt{(2x^2 - 1)(x^2 - x + 2)} + x^2 - x + 2 = \\ &= 2x^2 + 2x + 3 - 2\sqrt{(2x^2 + 2x + 3)(x^2 - 3x - 2)} + x^2 - 3x - 2 \end{aligned} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(2x^2 - 1)(x^2 - x + 2)} = \sqrt{(2x^2 + 2x + 3)(x^2 - 3x - 2)} \right).$$

Корни последнего уравнения будут являться и корнями уравнения:

$$\left((2x^2 - 1)(x^2 - x + 2) = (2x^2 + 2x + 3)(x^2 - 3x - 2) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x^2 + x - 2 = 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 2x^3 - 6x^2 - 4x + 3x^2 - 9x - 6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x^3 + 10x^2 + 14x + 4 = 0) \Leftrightarrow (x^3 + 5x^2 + 7x + 2 = 0) \Leftrightarrow (x^3 + 2x^2 + 3x^2 + 6x + x + 2 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((x + 2)(x^2 + 3x + 1) = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Заметим, что если $x^2 + 3x + 1 = 0$, то исходное уравнение принимает вид:

$$\left(\sqrt{2(x^2 + 3x + 1) - 6x - 3} + \sqrt{(x^2 + 3x + 1) - 6x - 3} = \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(= \sqrt{2(x^2 + 3x + 1) - 4x + 1} + \sqrt{(x^2 + 3x + 1) - 4x + 1} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{-6x - 3} + \sqrt{-6x - 3} = \sqrt{-4x + 1} + \sqrt{-4x + 1} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{-6x - 3} = \sqrt{-4x + 1} \right) \Leftrightarrow (-6x - 4 = -4x + 1) \Leftrightarrow (x = -2).$$

Таким образом, $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ не являются корнями исходного уравнения.

Легко проверить, что $x = -2$ – корень уравнения.

Ответ: $x = -2$.

1.1.39. Ответ: $x = 2$.

1.1.40. Решение. Способ 1. Преобразуем данное уравнение:

$$\left(x^2 + \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{3x^2 - 6x + 7} = 2 + 2x \right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{3x^2 - 6x + 7} = 2 + 2x - x^2 \right) \Leftrightarrow$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2+1} + \sqrt{3(x-1)^2+4} = 3 - (x-1)^2 \right).$$

Учитывая, что $\sqrt{(x-1)^2+1} \geq 1$, $\sqrt{3(x-1)^2+4} \geq 2$, получим следующую оценку:

$$\sqrt{(x-1)^2+1} + \sqrt{3(x-1)^2+4} \geq 3.$$

Так как $3 - (x-1)^2 \leq 3$, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+1} + \sqrt{3(x-1)^2+4} = 3 \\ 3 - (x-1)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+1} + \sqrt{3(x-1)^2+4} = 3 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x=1).$$

Способ 2. Пусть $t=(x-1)^2+1$. Тогда

$$\begin{aligned} (x^2 + \sqrt{x^2-2x+2} + \sqrt{3x^2-6x+7} = 2+2x) &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2-2x+2} + \sqrt{3x^2-6x+7} = 2+2x-x^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{(x-1)^2+1} + \sqrt{3(x-1)^2+4} = 3 - (x-1)^2) \Leftrightarrow (\sqrt{t} + \sqrt{3t+1} = 4-t). \end{aligned}$$

Функция $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt{3t+1}$ - возрастающая, так как $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{3}{2\sqrt{3t+1}} > 0$.

$g(t)=4-t$ - убывающая функция. Следовательно, уравнение $\sqrt{t} + \sqrt{3t+1} = 4-t$ не может иметь более одного решения. Легко подобрать это решение: $t=1$. Поэтому единственно возможным решением исходного уравнения может быть только $x=1$. Проверкой убеждаемся в этом.

Ответ: $x=1$.

1.1.41. *Ответ:* $x=2$.

1.1.42. *Решение. Способ 1.* Преобразуем данное уравнение:

$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = x^2 - 4x + 6) \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = (x-2)^2 + 2).$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$. Найдем наибольшее и наименьшее значение функции на $D(f)=[1;3]$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} = \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{3-x}} \Rightarrow \begin{cases} 3-x = x-1 \\ 1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow (x=2).$$

Вычислим значения функции $f(x)$ в точках: 1; 2; 3: $f(1)=f(3)=\sqrt{2}$; $f(2)=2$. Следовательно $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} \leq 2$. Так как $(x-2)^2 + 2 \geq 2$, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = 2 \\ (x-2)^2 + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (x=2).$$

Способ 2.

$$\begin{aligned} (\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = x^2 - 4x + 6) &\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4 + 2 - \sqrt{x-1} - \sqrt{3-x} = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x^2 - 4x + 4 + \frac{x-1-2\sqrt{x-1}+1+3-x-2\sqrt{3-x}+1}{2} = 0 \right) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

$$\Leftrightarrow \left((x-2)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{x-1}-1)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{3-x}-1)^2 = 0 \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \sqrt{x-1}-1=0 \Leftrightarrow (x=2) \\ \sqrt{3-x}-1=0 \end{cases}$$

Ответ: $x=2$.

1.1.43. Ответ: $x=3$.

1.1.44. Решение. Способ 1. 1). Рассмотрим $p=0$. Тогда получаем уравнение $3^x = \frac{1}{4}$, которое имеет единственное решение $x = \log_3 \frac{1}{4}$.

2). Пусть $p \neq 0$. Тогда данное уравнение будет квадратным относительно некоторой переменной $t=3^x$: $pt^2-4t+1=0$.

Найдем, при каких значениях параметра уравнение может иметь решения:

$$\left(\frac{D}{4} = 4-p \right) \Rightarrow (4-p \geq 0) \Leftrightarrow (p \leq 4).$$

Исходное уравнение будет иметь единственное решение при $D=0$, т.е. $p=4$ ($x = \log_3 \frac{1}{2}$), и в случае, когда корни квадратного уравнения будут разных знаков, т.к. $3^x > 0$ при любом x . Тогда, применяя теорему Виета, получаем $t_1 \cdot t_2 = \frac{1}{p} < 0$, т.е. $p < 0$.

Способ 2. Решим уравнение:

$$\begin{aligned} (p \cdot 9^x - 4 \cdot 3^x + 1 = 0) &\Leftrightarrow \left(p = \frac{4 \cdot 3^x - 1}{3^{2x}} \right) \Leftrightarrow \left(4 \cdot \frac{1}{3^x} - \frac{1}{3^{2x}} = p \right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3^{2x}} - 4 \cdot \frac{1}{3^x} + 4 = 4-p \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\left(\frac{1}{3^x} - 2 \right)^2 = 4-p \right) \Leftrightarrow \left(\left| \frac{1}{3^x} - 2 \right| = \sqrt{4-p} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3^x} = 2 + \sqrt{4-p} \\ \frac{1}{3^x} = 2 - \sqrt{4-p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = \frac{1}{2 + \sqrt{4-p}} \\ 3^x = \frac{1}{2 - \sqrt{4-p}} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 \frac{1}{2 + \sqrt{4-p}} \\ x = \log_3 \frac{1}{2 - \sqrt{4-p}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\log_3(2 + \sqrt{4-p}) \\ x = -\log_3(2 - \sqrt{4-p}) \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда исходное уравнение имеет единственное решение если:

$$\begin{cases} 2 + \sqrt{4-p} > 0 \\ 2 + \sqrt{4-p} = 2 - \sqrt{4-p} \\ 2 - \sqrt{4-p} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-p} > -2 \\ 2\sqrt{4-p} = 0 \\ \sqrt{4-p} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-p \geq 0 \\ 4-p = 0 \\ 4-p \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq 4 \\ p = 4 \\ p \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 4 \\ p \leq 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \{4\}$.

1.1.45. Ответ: $(-\infty; 0) \cup \{1\}$.

1.1.46. Решение. Способ 1.

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

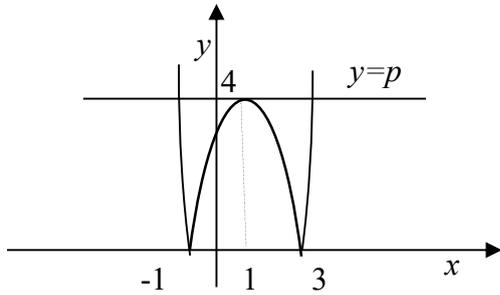


Рис. 5

Рассмотрим функции $y = |x^2 - 2x - 3|$ и $y = p$. Построим графики этих функций. Тогда, нетрудно видеть, что исходное уравнение будет иметь ровно три различных действительных корня, когда прямая $y = p$ будет иметь три точки пересечения с графиком функции $y = |x^2 - 2x - 3|$, т. е. при $x = 1$. Тогда $p = 4$.

Способ 2. Решим уравнение:

$$\begin{cases} p \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 - p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ 4 + p \geq 0 \\ x = 1 \pm \sqrt{4 + p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ x = 1 \pm \sqrt{4 + p} \end{cases} \\ \begin{cases} p \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 < 0 \\ x^2 - 2x - 3 + p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p > 0 \\ 4 - p \geq 0 \\ x = 1 \pm \sqrt{4 - p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < p \leq 4 \\ x = 1 \pm \sqrt{4 - p} \end{cases}$$

Следовательно, первая система при $p \geq 0$ всегда имеет два решения. Вторая система при $0 < p < 4$ имеет два решения, а при $p = 4$ одно решение. Таким образом, исходное уравнение имеет 4 решения, если $p \in (0; 4)$; 3 решения при $p = 4$; 2 решения, если $p \in \{0\} \cup (4; +\infty)$, и не имеет решений при $p < 0$.

Ответ: $p = 4$.

1.1.47. Ответ: $p = 0, 25$.

1.1.48. Решение.

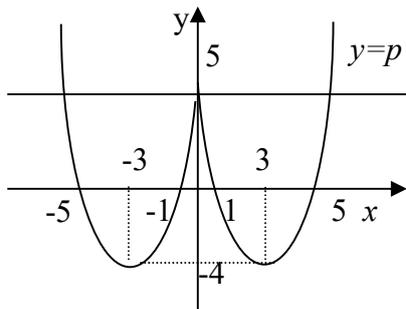


Рис. 6

Способ 1. Рассмотрим функции

$$y = x^2 - 6|x| + 5 = \begin{cases} x^2 - 6x + 5, & \text{если } x \geq 0 \\ x^2 + 6x + 5, & \text{если } x < 0 \end{cases} \text{ и } y = p.$$

Построив графики этих функций, нетрудно видеть, что исходное уравнение будет иметь ровно три различных действительных корня, когда прямая $y = p$ будет иметь три точки пересечения с графиком функции $y = x^2 - 6|x| + 5$, т. е. при $x = 0$. Тогда $p = 5$.

Способ 2. $(x^2 - 6|x| + 5 - p = 0) \Leftrightarrow (|x|^2 - 6|x| + 5 - p = 0) \Leftrightarrow (|x| = 3 \pm \sqrt{4 + p})$, если $p \geq -4$.

Уравнение будет иметь 3 корня, если $(3 - \sqrt{4 + p} = 0) \Leftrightarrow (4 + p = 9) \Leftrightarrow (p = 5)$.

Ответ: $p = 5$.

1.1.49. Ответ: $p = 12$.

1.1.50. Решение. Найдем, при каких значениях параметра p уравнение

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

имеет действительные решения:

$$\left(\frac{D}{4} = -p^2 - 4p - 3\right) \Rightarrow (-p^2 - 4p - 3 \geq 0) \Leftrightarrow ((p+3)(p+1) \leq 0) \Leftrightarrow (-3 \leq p \leq -1).$$

Используя теорему Виета, получим:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-2p)^2 - 2(2p^2 + 4p + 3) = -2(4p + 3) = -8p - 6.$$

Так как функция $y(p) = -8p - 6$ убывает на отрезке $[-3; -1]$, то наибольшее значение суммы квадратов корней достигается при $p = -3$.

Ответ: $p = -3$.

1.1.51. Ответ: $p = 2$.

1.1.52. Решение. Найдем, при каких значениях параметра p уравнение имеет действительные решения:

$$\frac{D}{4} = (p^2 - 3p)^2 + 6p^3 - 12p^2 - 4 = p^4 - 3p^2 - 4;$$

$$(p^4 - 3p^2 - 4 \geq 0) \Leftrightarrow ((p^2 - 4)(p^2 + 1) \geq 0) \Leftrightarrow ((p+2)(p-2) \geq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq -2 \\ p \geq 2 \end{cases}.$$

Используя теорему Виета, получим: $x_1 + x_2 = -2p(p-3) = -2p^2 + 6p$.

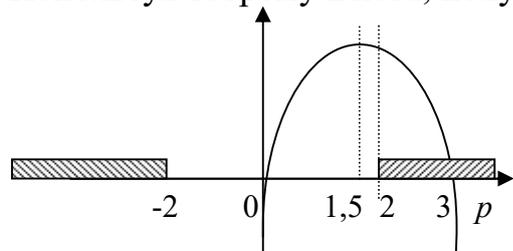


Рис. 7

Из рисунка нетрудно видеть, что наибольшее значение суммы корней достигается при $p = 2$.

Ответ: $p = 2$.

1.1.53. Ответ: $p = -3$.

1.1.54. Решение. Найдем корни уравнения $2x^2 + (p-10)x + 6 = 0$ при условии, что их отношение равно 12. Учитывая, что по теореме Виета $x_1x_2 = 3$, получим:

$$\begin{cases} x_1x_2 = 3 \\ \frac{x_1}{x_2} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_1 = -6 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Откуда, используя то, что по теореме Виета $\frac{p-10}{2} = -(x_1 + x_2)$, имеем $p = 23$,

$p = -3$.

Ответ: $p = -3; p = 23$.

1.1.55. Ответ: $p = 46,5$.

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

1.1.56. Решение. Уравнение $(4mx^2 + 4x + 1)(4m^2x^2 - 4mx + m + 4) = 0$ равносильно совокупности:

$$\begin{cases} 4mx^2 + 4x + 1 = 0 \\ 4m^2x^2 - 4mx + m + 4 = 0 \end{cases}$$

По условию задачи $m > 0$. Заметим, что второе уравнение совокупности решений не имеет, так как

$$D = 16m^2 - 16m^3 - 64m^2 = -16m^3 - 48m^2 = -16m^2(m + 3) < 0.$$

Первое уравнение совокупности имеет решение при условии $(D = 16 - 16m \geq 0) \Rightarrow (m \leq 1)$. Следовательно, исходное уравнение имеет одно

решение $x = -\frac{1}{2}$, если $m = 1$, и два решения $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16m}}{8m} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - m}}{2m}$, если $0 < m < 1$.

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$, если $m = 1$; $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - m}}{2m}$, если $0 < m < 1$; нет решений, если $m > 1$.

1.1.57. Ответ: $x = -\frac{1}{4}$, если $p = 0$; $x = -\frac{1}{2}$, если $p = 2$; $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 2p}}{2p}$, если $0 < p < 2$; нет решений, если $p > 2$.

1.1.58. Ответ: $x = 1$, если $m = 1$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - m}}{m}$, если $0 < m < 1$; нет решений, если $m > 1$.

1.1.59. Ответ: $x = 3$, если $a = 0$; $x = 6$, если $a = \frac{1}{12}$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 12a}}{2a}$, если $0 < a < \frac{1}{12}$; нет решений, если $a > \frac{1}{12}$.

1.1.60. Решение. Возведем в квадрат выражение во второй скобке уравнения: $((x^2 - 6x)^2 + 10(x - 3)^2 = 65) \Leftrightarrow ((x^2 - 6x)^2 + 10(x^2 - 6x + 9) = 65)$. Сделаем замену $y = x^2 - 6x$ и решим соответствующее уравнение

$$(y^2 + 10(y + 9) = 65) \Leftrightarrow (y^2 + 10y + 25 = 0) \Leftrightarrow ((y + 5)^2 = 0) \Leftrightarrow (y = -5).$$

Тогда $(y = x^2 - 6x = -5) \Rightarrow (x^2 - 6x + 5 = 0) \Leftrightarrow ((x - 1)(x - 5) = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$.

Ответ: $x = 1$; $x = 5$.

1.1.61. Решение. Способ 1. Уравнение перепишем в виде: $y(2x + 3y) = 4$, т. е. произведение целых чисел y и $2x + 3y$ равно 4. Тогда эти числа могут принимать соответственно следующие значения: $(-4; -1)$, $(-2; -2)$, $(-1; -4)$, $(1; 4)$, $(2; 2)$, $(4; 1)$. Решая системы уравнений

$$\begin{cases} y = -4 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}, \begin{cases} y = -2 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}, \begin{cases} y = -1 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}, \begin{cases} y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}, \begin{cases} y = 2 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}, \begin{cases} y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

получим $(5,5; -4)$, $(2; -2)$, $(-0,5; -1)$, $(0,5; 1)$, $(-2; 2)$, $(-5,5; 4)$. Среди них только два решения удовлетворяют условию целочисленности: $(-2; 2)$, $(2; -2)$.

Способ 2. Запишем уравнение в виде

$$(2xy + 3y^2 = 4) \Leftrightarrow (2xy + 4y^2 = 4 - y^2) \Leftrightarrow (2y(x + 2y) = 4 - y^2) \Leftrightarrow \left(x + 2y = \frac{2}{y} + \frac{y}{2}\right), \text{ так}$$

как $y \neq 0$. Но тогда $\frac{2}{y} + \frac{y}{2}$ – целое число. Это возможно только в случае

$$y = -2 \ (x = 2) \text{ или } y = 2 \ (x = -2).$$

Ответ: $(-2; 2)$, $(2; -2)$.

1.1.62. Решение. Исходное неравенство запишем в виде $x - \log_6(x+3) < 1$.

Рассмотрим функцию $y(x) = x - \log_6(x+3)$. Область определения функции $y(x)$ $D(y) = (-3; +\infty)$. Функция является возрастающей на интервале

$(-3 + \log_6 e; +\infty)$. Действительно, $y'(x) = 1 - \frac{1}{(x+3)\ln 6} = \frac{(x+3)\ln 6 - 1}{(x+3)\ln 6}$. А так как

$(x+3)\ln 6 > 0$ на интервале $(-3; +\infty)$, то $y'(x) > 0$, если

$((x+3)\ln 6 > 1) \Leftrightarrow \left(x+3 > \frac{1}{\ln 6}\right) \Leftrightarrow (x > -3 + \log_6 e)$. Заметим, что для любого

$x \in [2; +\infty)$ выполняется $y(x) = x - \log_6(x+3) \geq y(2) = 2 - \log_6 5 > 1$. Тогда исходное неравенство $x - \log_6(x+3) < 1$ может выполняться только на интервале

$(-3; 2)$, а возможными его целыми решениями могут быть: $-2, -1, 0, 1$.

Проверкой убедимся в этом. Действительно, $y(-2) = -2 - \log_6 1 = -2 < 1$, $y(-1) = -1 - \log_6 2 < 1$, $y(0) = \log_6 3 < 1$, $y(1) = 1 - \log_6 4 < 1$.

Неравенство $x - 1 < \log_6(x+3)$ можно

решить графически, построив графики функций: $f(x) = x - 1$ и

$g(x) = \log_6(x+3)$ (см. рис. 8). Из

рис. 8 видно, что только целые числа из интервала $[-2; 1]$ могут

являться возможными решениями исходного неравенства.

Подстановкой в исходное неравенство приходим к

решениям: $x = -2$; $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$.

Ответ: $x = -2$; $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$.

1.1.63. Решение. Так как $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, то уравнение примет вид:

$$\left(1 - \cos^2 \frac{\pi x}{4} - \sqrt{x+2} = \cos^2 2000 + \sin^2 2000\right) \Leftrightarrow \left(1 - \cos^2 \frac{\pi x}{4} - \sqrt{x+2} = 1\right) \Leftrightarrow$$

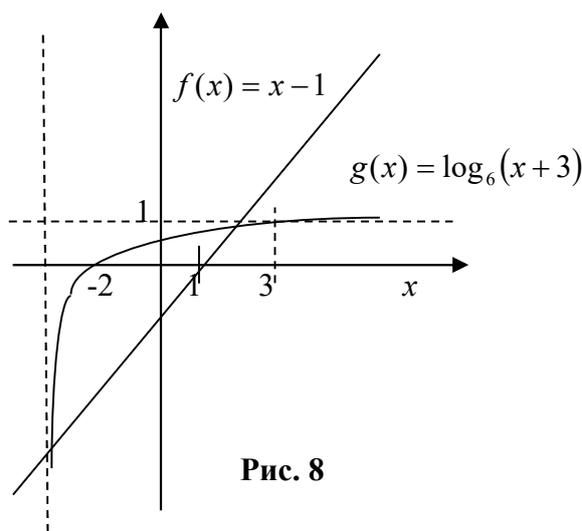


Рис. 8

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

$\Leftrightarrow \left(-\cos^2 \frac{\pi x}{4} - \sqrt{x+2} = 0 \right)$. Тогда исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \cos^2 \frac{\pi x}{4} = 0 \\ \sqrt{x+2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \frac{\pi x}{4} = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Подставив -2 в первое уравнение системы получаем, что решение исходного уравнения $x=-2$.

Ответ: $x=-2$.

1.1.64. Решение. Запишем уравнение в виде

$$(3^x + 3^{2-x} = 3(1 + \cos 2\pi x)) \Leftrightarrow (3^{x-1} + 3^{1-x} = 1 + \cos 2\pi x) \Leftrightarrow \left(\frac{3^x}{3} + \frac{3}{3^x} = 1 + \cos 2\pi x \right).$$

Заметим, что левая часть последнего уравнения имеет вид: $y + \frac{1}{y}$. Для неё

выполняется соотношение $y + \frac{1}{y} \geq 2$, если $y \geq 0$, при чем равенство

достигается при $y=1$. Учитывая также, что $1 + \cos 2\pi x \leq 2$, получаем систему

$$\begin{cases} \frac{3^x}{3} + \frac{3}{3^x} = 2 \\ 1 + \cos 2\pi x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3^x}{3} = 1 \\ 1 + \cos 2\pi x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 + \cos 2\pi x = 2 \end{cases}.$$

Подставив 1 , во второе уравнение системы получим, что решением исходного уравнения является $x=1$.

Ответ: $x=1$.

1.1.65. Решение. Так как $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, то $\sin^2 \pi x + \log_2^2(y^2 - 2y + 1) = 0$. Тогда исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin \pi x = 0 \\ \log_2^2(y^2 - 2y + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi x = \pi k, k \in Z \\ y^2 - 2y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k, k \in Z \\ y(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k, k \in Z \\ \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases}.$$

Ответ: $(k; 0), (k; 2), k \in Z$.

1.1.66. Решение. Запишем уравнение в виде

$$((x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) = 6) \Leftrightarrow (((x-1)^2 + 2)((y+3)^2 + 3) = 6).$$

Так как $(x-1)^2 + 2 \geq 2$ и $(y+3)^2 + 3 \geq 3$, то уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + 2 = 2 \\ (y+3)^2 + 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Ответ: $(1; -3)$.

1.1.67. Решение. Запишем уравнение в виде

$$(\log_3(8 + 2x - x^2) = 2^{x-1} + 2^{1-x}) \Leftrightarrow \left(\log_3(9 - (x-1)^2) = \frac{2^x}{2} + \frac{2}{2^x} \right).$$
 Так как $9 - (x+1)^2 \leq 9$,

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

то $\log_3(9 - (x-1)^2) \leq \log_3 9 = 2$. Заметим, что правая часть последнего уравнения имеет вид: $y + \frac{1}{y}$. Для неё выполняется соотношение $y + \frac{1}{y} \geq 2$, если $y > 0$, при чем равенство достигается при $y=1$. Тогда получаем

$$\text{систему } \begin{cases} \frac{2^x}{2} + \frac{2}{2^x} = 2 \\ \log_3(9 - (x-1)^2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2^x}{2} = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x=1).$$

Ответ: $x=1$.

1.1.68. Решение. Перепишем исходное уравнение в виде:

$$(\sin^2 y - 4 \sin y \cos x + 4 \cos^2 x + 2 \cos^2 x = 0) \Leftrightarrow ((\sin y - 2 \cos x)^2 + 2 \cos^2 x = 0).$$

Тогда уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin y - 2 \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ y = \pi m, m \in Z \end{cases}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; y = \pi m, m \in Z$.

1.1.69. Решение. Запишем уравнение в виде:

$$\left(\operatorname{tg}^2 2x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 2x + 3 = -\operatorname{ctg}^2 \left(4y - \frac{\pi}{6} \right) \right) \Leftrightarrow \left((\operatorname{tg} 2x + \sqrt{3})^2 + \operatorname{ctg}^2 \left(4y - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \right).$$

Тогда уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3} \\ \operatorname{ctg} \left(4y - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z \\ 4y - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z \\ y = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{4}, m \in Z \end{cases}.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z; y = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{4}, m \in Z$.

1.1.70. Решение. Запишем уравнение в виде:

$$(\cos^2 x + 2 \cos x \cdot \cos y + 2 \cos^2 y = 0) \Leftrightarrow ((\cos x + \cos y)^2 + \cos^2 y = 0).$$

Тогда уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z \end{cases}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; y = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$.

1.1.71. Решение. Решим уравнение $|x-2-|4-x|| = 7-x$ методом интервалов:

$$1). \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ |x-2-4+x| = 7-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ |2x-6| = 7-x \end{cases}.$$

Тогда система распадается на две:

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ 2x - 6 \geq 0 \\ 2x - 6 = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 3 \\ 3x = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 4 \\ x = 4\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow (\emptyset)$$

ИЛИ

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ 2x - 6 < 0 \\ -2x + 6 = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x < 3 \\ -x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (x = -1).$$

$$2). \begin{cases} 4 - x < 0 \\ |x - 2 + 4 - x| = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ 2 = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow (x = 5).$$

Ответ: $x = -1$; $x = 5$.

1.1.72. Решение. Уравнение $\sqrt{4 + 3x - x^2} \cdot \sin \pi x = 0$ равносильно совокупности:

$$\begin{cases} 4 + 3x - x^2 = 0 \\ 4 + 3x - x^2 \geq 0 \\ \sin \pi x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \\ (x+1)(x-4) \leq 0 \\ \pi x = \pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \\ -1 \leq x \leq 4 \\ x = k, k \in Z \end{cases}.$$

Поэтому решениями исходного уравнения являются целые числа из отрезка $[-1; 4]$.

Ответ: $-1; 0; 1; 2; 3; 4$.

1.1.73. Решение. Введем обозначение $y = 4^x > 0$. Тогда, используя формулы двойного аргумента, получим

$$(\sin 4y = 4 \sin y \cdot \cos y) \Leftrightarrow (2 \sin 2y \cos 2y = 2 \sin 2y) \Leftrightarrow (2 \sin 2y (\cos 2y - 1) = 0).$$

Последнее уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{cases} \sin 2y = 0 \\ \cos 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = \pi k, k \in Z \\ 2y = 2\pi n, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi k}{2}, k \in Z \\ y = \pi n, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \left(y = \frac{\pi k}{2}, k \in Z \right).$$

Решая уравнения $4^x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$, получим $x = \log_4 \frac{\pi m}{2}, m \in N$.

Ответ: $x = \log_4 \frac{\pi m}{2}, m \in N$.

1.1.74. Решение. ОДЗ уравнения $x > 0$. Логарифмируя его по основанию 3 и используя свойства логарифма, получим

$$(\log_3 x^{1+\log_3 x} = \log_3 (9x^2)) \Leftrightarrow ((1 + \log_3 x) \log_3 x = \log_3 9 + \log_3 x^2) \Leftrightarrow (\log_3^2 x + \log_3 x = 2 + 2 \log_3 x)$$

Тогда

$$(\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0) \Leftrightarrow ((\log_3 x - 2)(\log_3 x + 1) = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{1}{3}$; $x = 9$.

1.1.75. Решение. Преобразуем уравнение:

$$(\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 0) \Leftrightarrow \left(\frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x}{\cos 3x \cos x} = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos x} = 0 \right)$$

Тогда уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \pi k, \quad k \in Z \\ 3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3}, \quad m \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3}, \quad m \in Z \end{cases}.$$

На единичной окружности изображены точки, соответствующие величинам $x_k = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$ (см. рис. 9) и точки, соответствующие величинам $x_m = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3}$, $m \in Z$ и $x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ (см. рис. 10). Из рис. 9, 10 видно, что $x = \pi l$, $l \in Z$ — является решением системы.

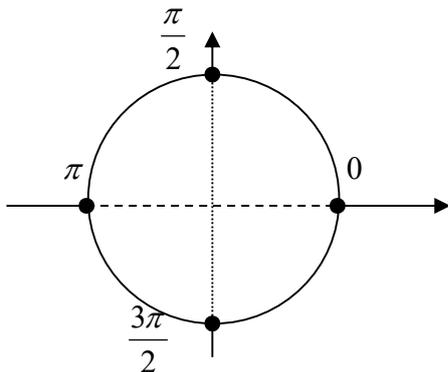


Рис. 9

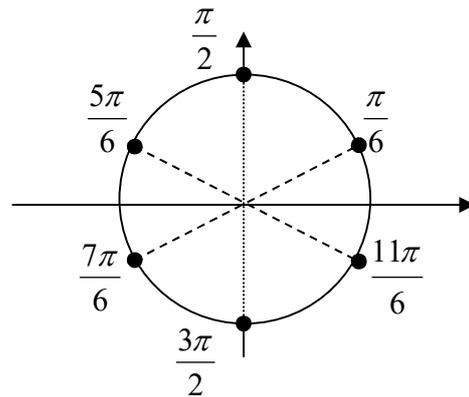


Рис. 10

Ответ: $x = \pi l$, $l \in Z$.

1.1.76. Решение. Введем обозначение $y = 2 \cdot \log_4^2 x - 3 \cdot \log_4 x - 6$. Тогда получим уравнение

$$((y - 2)y = 3) \Leftrightarrow (y^2 - 2y - 3 = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 3 \end{cases}. \text{ Следовательно, исходное уравнение}$$

равносильно совокупности:

$$\begin{cases} 2 \log_4^2 x - 3 \log_4 x - 6 = -1 \\ 2 \log_4^2 x - 3 \log_4 x - 6 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \log_4^2 x - 3 \log_4 x - 5 = 0 \\ 2 \log_4^2 x - 3 \log_4 x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 \log_4 x - 5)(\log_4 x + 1) = 0 \\ (2 \log_4 x + 3)(\log_4 x - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_4 x - 5 = 0 \\ \log_4 x + 1 = 0 \\ 2\log_4 x + 3 = 0 \\ \log_4 x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x = \frac{5}{2} \\ \log_4 x = -1 \\ \log_4 x = -\frac{3}{2} \\ \log_4 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4^{\frac{5}{2}} \\ x = 4^{-1} \\ x = 4^{-\frac{3}{2}} \\ x = 4^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ x = \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{8} \\ x = 64 \end{cases}.$$

Ответ: $x=0,125$; $x=0,25$; $x=32$; $x=64$.

1.1.77. Ответ: $x=0,0625$; $x=0,25$; $x=0,5$; $x=2$.

1.1.78. Ответ: $x = \frac{1}{9}$; $x = \frac{1}{3}$.

1.1.79. Ответ: $x = \frac{1}{8}$; $x = 4$.

1.1.80. Решение. Введем обозначение $y = |x^2 - 3x + 1| \geq 0$. Тогда

$$(y^2 + 4y - 5 = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -5 \end{cases}. \text{ Учитывая, что } y \geq 0, \text{ получим}$$

$$(|x^2 - 3x + 1| = 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 1 \\ x^2 - 3x + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Ответ: $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$.

1.1.81. Ответ: $x=0$, $x=1$, $x=4$, $x=5$.

1.1.82. Ответ: $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=3$.

1.1.83. Ответ: $x=-5$, $x=-4$, $x=-1$, $x=0$.

1.1.84. Решение. ОДЗ уравнения $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1 + \cos x) = 2$ определяется системой

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin x > 0 \\ \sqrt{2}\sin x \neq 1 \\ 1 + \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ x \neq (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ x \neq (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k \end{cases}.$$

Тогда решая уравнение

$$(1 + \cos x = 2 \sin^2 x) \Leftrightarrow (1 + \cos x = 2 - 2 \cos^2 x) \Leftrightarrow (2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ и учитывая ОДЗ, получим систему}$$

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z \right).$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

1.1.85. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

1.1.86. Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

1.1.87. Ответ: $x = 2\pi k, k \in Z$.

1.1.88. Решение:

$$\left(5^{\log_4 x \cdot (2\log_4 x - 6)} = \left(\frac{1}{25} \right)^{-2,5 \cdot (\log_4 x - 1)} \right) \Leftrightarrow \left(5^{\log_4 x \cdot (2\log_4 x - 6)} = 5^{5 \cdot (\log_4 x - 1)} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_4 x \cdot (2\log_4 x - 6) = 5 \cdot (\log_4 x - 1)) \Leftrightarrow (2\log_4^2 x - 6\log_4 x = 5\log_4 x - 5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\log_4^2 x - 11\log_4 x + 5 = 0) \Leftrightarrow ((2\log_4 x - 1)(\log_4 x - 5) = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_4 x - 1 = 0 \\ \log_4 x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x = \frac{1}{2} \\ \log_4 x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4^{\frac{1}{2}} \\ x = 4^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1024 \end{cases}.$$

Ответ: $x=2, x=1024$.

1.1.89. Ответ: $x = \frac{1}{3}, x = 9$.

1.1.90. Ответ: $x = -1$.

1.1.91. Ответ: $x = 0$.

1.1.92. Решение. Преобразуем исходное уравнение

$$((x-3)^2 \log_2(x-1) + 2\log_{x-1} \sqrt{2} = (x-3)^2 \log_{x-1} 2 + 2\log_2 \sqrt{x-1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((x-3)^2 \log_2(x-1) + \log_{x-1} 2 = (x-3)^2 \log_{x-1} 2 + \log_2(x-1)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((x-3)^2 \log_2(x-1) + \frac{1}{\log_2(x-1)} = (x-3)^2 \frac{1}{\log_2(x-1)} + \log_2(x-1) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((x-3)^2 \log_2(x-1) + \frac{1}{\log_2(x-1)} - (x-3)^2 \frac{1}{\log_2(x-1)} - \log_2(x-1) = 0 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((x-3)^2 \cdot \left(\log_2(x-1) - \frac{1}{\log_2(x-1)} \right) - \left(\log_2(x-1) - \frac{1}{\log_2(x-1)} \right) = 0 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\log_2(x-1) - \frac{1}{\log_2(x-1)} \right) \cdot ((x-3)^2 - 1) = 0 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\log_2(x-1) - \frac{1}{\log_2(x-1)} \right) \cdot (x-2) \cdot (x-4) = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{\log_2^2(x-1) - 1}{\log_2(x-1)} \cdot (x-2) \cdot (x-4) = 0 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{(\log_2(x-1) - 1) \cdot (\log_2(x-1) + 1)}{\log_2(x-1)} \cdot (x-2) \cdot (x-4) = 0 \right).$$

Учитывая ОДЗ, получим систему

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ \log_2(x-1)-1=0 \\ \log_2(x-1)+1=0 \\ x-2=0 \\ x-4=0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_2(x-1)=1 \\ \log_2(x-1)=-1 \\ x=2 \\ x=4 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x-1=2 \\ x-1=\frac{1}{2} \\ x=2 \\ x=4 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x=3 \\ x=1\frac{1}{2} \\ x=2 \\ x=4 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1,5 \\ x=3 \\ x=4 \end{cases}$$

Ответ: $x=1,5$; $x=3$; $x=4$.

1.1.93. Ответ: $x=2\frac{1}{3}$; $x=5$; $x=7$.

1.1.94. Решение. Преобразуем уравнение

$$\begin{aligned} & ((x-4)^2 \log_4(x-1) - 2 \log_4(x-1)^2 = (x-4)^2 \log_{x-1} 4 - 2 \log_{x-1} 16) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left((x-4)^2 \log_4(x-1) - 4 \log_4(x-1) = (x-4)^2 \frac{1}{\log_4(x-1)} - \frac{4}{\log_4(x-1)} \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left((x-4)^2 \left(\log_4(x-1) - \frac{1}{\log_4(x-1)} \right) - 4 \left(\log_4(x-1) - \frac{1}{\log_4(x-1)} \right) = 0 \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(((x-4)^2 - 4) \left(\log_4(x-1) - \frac{1}{\log_4(x-1)} \right) = 0 \right) \Leftrightarrow \left(((x-4)^2 - 4) \frac{\log_4^2(x-1) - 1}{\log_4(x-1)} = 0 \right). \end{aligned}$$

Учитывая ОДЗ, получим систему

$$\begin{cases} (x-4)^2 - 4 = 0 \\ \log_4^2(x-1) - 1 = 0 \\ x-1 \neq 1 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x-4=2 \\ x-4=-2 \\ \log_4(x-1)=1 \\ \log_4(x-1)=-1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x=6 \\ x=2 \\ x-1=4 \\ x-1=\frac{1}{4} \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=5 \\ x=1\frac{1}{4} \end{cases}$$

Ответ: $x=1,25$; $x=5$; $x=6$.

1.1.95. Ответ: $x=2\frac{1}{3}$; $x=5$.

1.1.96. Решение. Найдем ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ 2 \cos 2x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ |\sin x| \neq 1 \\ 2(1 - 2 \sin^2 x) - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ |\sin x| \neq 1 \\ 1 - 4 \sin^2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ |\sin x| \neq 1 \\ \sin^2 x \neq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ |\sin x| \neq 1 \\ |\sin x| \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

В ОДЗ уравнение равносильно уравнению $b \sin x = b + \sin x$, откуда

$$((b-1)\sin x = b) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{b}{b-1} \\ b \neq 1 \end{cases}$$

Уравнение в последней системе имеет решение $x = (-1)^k \arcsin \frac{b}{b-1} + \pi k$, если

$$\begin{cases} \left| \frac{b}{b-1} \right| < 1 \\ \left| \frac{b}{b-1} \right| \neq 0 \\ \left| \frac{b}{b-1} \right| \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{b-1} < 1 \\ \frac{b}{b-1} > -1 \\ b \neq 0 \\ \frac{b}{b-1} \neq -\frac{1}{2} \\ \frac{b}{b-1} \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{b-1} - 1 < 0 \\ \frac{b}{b-1} + 1 > 0 \\ b \neq 0 \\ \frac{b}{b-1} + \frac{1}{2} \neq 0 \\ \frac{b}{b-1} - \frac{1}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{b-1} < 0 \\ \frac{2b-1}{b-1} > 0 \\ b \neq 0 \\ \frac{3b-1}{2(b-1)} \neq 0 \\ \frac{b+1}{2(b-1)} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-1 < 0 \\ 2b-1 < 0 \\ b \neq 0 \\ b \neq \frac{1}{3} \\ b \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < \frac{1}{2} \\ b \neq 0 \\ b \neq \frac{1}{3} \\ b \neq -1 \end{cases}$$

Значит, если $b \in \left[\frac{1}{2}; +\infty \right) \cup \left\{ -1; 0; \frac{1}{3} \right\}$, то уравнение решений не имеет.

Ответ: $x = (-1)^k \arcsin \frac{b}{b-1} + \pi k$, если $b \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup \left(0; \frac{1}{3} \right) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right)$.

1.1.97. Ответ: $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{m^2 - 3}{m^2 + 1} + \pi k$, $k \in Z$, если

$$m \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; -1) \cup (1; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$$

1.1.98. Решение. Найдем ОДЗ уравнения

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin 4x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ x \neq \pi n, n \in Z \\ 4x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z \\ 4x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}, m \in Z \end{cases}$$

С учетом ОДЗ получим: $(\cos^2 2x = 1 - a^2) \Leftrightarrow (\sin^2 2x = a^2) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = a \\ \sin 2x = -a \end{cases}$.

Полученные уравнения имеют решение, если $-1 \leq a \leq 1$.

Если $x = \frac{\pi n}{2}$, то $a^2 = \sin^2 \pi n = 0 \Rightarrow (a = 0)$;

Если $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}$, то $a^2 = \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \pi m \right) = \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m \right)}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

Тогда решение исходного уравнения:

$$(2x = (-1)^k \arcsin(\pm a) + \pi k, k \in Z) \Leftrightarrow \left(x = \pm \frac{1}{2} \arcsin a + \frac{\pi k}{2}, k \in Z \right),$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

если $a \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

Рассмотрим случаи:

1) $\left(a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \left(\sin^2 2x = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \left(2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}\right) \Rightarrow \left(x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{4}\right)$.

Если m – четно, то $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{4} \notin \text{ОДЗ}$.

Если m – нечетно ($m = 2k + 1$), то $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi(2k+1)}{4} = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \in \text{ОДЗ}$ при $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $(a = 0) \Rightarrow (\sin^2 2x = 0) \Rightarrow (\sin 2x = 0) \Rightarrow (2x = \pi m) \Rightarrow \left(x = \frac{\pi m}{2}\right) \notin \text{ОДЗ}$.

Ответ: $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$, если $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pm \frac{1}{2} \arcsin a + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$, если

$a \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

1.1.99. Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$, если $p = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{2}$;

$x = \pm \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{p^2 - p - 1} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$, если

$p \in \left[-1; \frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}; 2\right]$.

1.1.100. Решение. По условию $9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2 \neq 0$, т. е. $x \neq -\frac{1}{3}$. Кроме того, $9x^2 + 18x + 5 = (3x + 1)(3x + 5)$ и $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(2x + 3)$. Тогда уравнение примет вид $(3x + 1)^2 \cdot y^2 - (3x + 1)(3x + 5) \cdot y + (x + 2)(2x + 3) = 0$. Найдем дискриминант:

$$D = (3x + 1)^2(3x + 5)^2 - 4(3x + 1)^2(x + 2)(2x + 3) = (3x + 1)^2[(3x + 5)^2 - 4(x + 2)(2x + 3)] = \\ = (3x + 1)^2(9x^2 + 30x + 25 - 8x^2 - 28x - 24) = (3x + 1)^2(x^2 + 2x + 1) = (3x + 1)^2(x + 1)^2.$$

Поэтому

$$y_1 = \frac{(3x + 1)(3x + 5) - (3x + 1)(x + 1)}{2(3x + 1)^2} = \frac{(3x + 1)(3x + 5 - x - 1)}{2(3x + 1)^2} = \frac{2x + 4}{2(3x + 1)} = \frac{x + 2}{3x + 1}. \\ y_2 = \frac{(3x + 1)(3x + 5) + (3x + 1)(x + 1)}{2(3x + 1)^2} = \frac{(3x + 1)(3x + 5 + x + 1)}{2(3x + 1)^2} = \frac{4x + 6}{2(3x + 1)} = \frac{2x + 3}{3x + 1}.$$

Ответ: $y = \frac{x + 2}{3x + 1}, y = \frac{2x + 3}{3x + 1}$.

1.1.101. Ответ: $x = -\frac{2y + 3}{3y + 1}, x = -\frac{y + 2}{3y + 1}$.

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

1.1.102. Решение. По условию $15x^2 + 28x + 5 = (3x + 5)(5x + 1) \neq 0$, т. е. $x \neq -\frac{5}{3}$, $x \neq -\frac{1}{5}$. Кроме того, $8x^2 + 38x + 24 = 2(x + 4)(4x + 3)$ и $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$. Тогда уравнение примет вид $(3x + 5)(5x + 1) \cdot y^2 - 2(x + 4)(4x + 3) \cdot y + (x + 4)^2 = 0$.

Найдем дискриминант:

$$D = 4(x + 4)^2 (4x + 3)^2 - 4(x + 4)^2 (3x + 5)(5x + 1) = 4(x + 4)^2 [(4x + 3)^2 - (3x + 5)(5x + 1)] = 4(x + 4)^2 (16x^2 + 24x + 9 - 15x^2 - 28x - 5) = 4(x + 4)^2 (x^2 - 4x + 4) = 4(x + 4)^2 (x - 2)^2.$$

Поэтому

$$y_1 = \frac{2(x + 4)(4x + 3) - 2(x + 4)(x - 2)}{2(3x + 5)(5x + 1)} = \frac{2(x + 4)(4x + 3 - x + 2)}{2(3x + 5)(5x + 1)} = \frac{2(x + 4)(3x + 5)}{2(3x + 5)(5x + 1)} = \frac{x + 4}{5x + 1}.$$

$$y_2 = \frac{2(x + 4)(4x + 3) + 2(x + 4)(x - 2)}{2(3x + 5)(5x + 1)} = \frac{2(x + 4)(4x + 3 + x - 2)}{2(3x + 5)(5x + 1)} = \frac{2(x + 4)(5x + 1)}{2(3x + 5)(5x + 1)} = \frac{x + 4}{3x + 5}.$$

Ответ: $y = \frac{x + 4}{5x + 1}$, $y = \frac{x + 4}{3x + 5}$.

1.1.103. Ответ: $x = \frac{y - 4}{5y - 1}$, $x = \frac{y - 4}{3y - 5}$.

1.1.104. Решение. ОДЗ уравнения определяется неравенством:

$$(3 + 2x - x^2 \geq 0) \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 3 \leq 0) \Leftrightarrow ((x + 1)(x - 3) \leq 0) \Leftrightarrow (-1 \leq x \leq 3).$$

Перепишем уравнение в виде:

$$\left(2 \cos^2 \frac{x - y}{2} = \sqrt{3 + 2x - x^2} \cdot \cos^2 \frac{y - x}{2} - 2 \cos^2 \pi(y - x) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2 \cos^2 \pi(y - x) = \sqrt{3 + 2x - x^2} \cdot \cos^2 \frac{y - x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x - y}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2 \cos^2 \pi(y - x) = \cos^2 \frac{y - x}{2} \cdot (\sqrt{3 + 2x - x^2} - 2) \right).$$

Так как $3 + 2x - x^2 = 4 - (x - 1)^2 \leq 4$, то на ОДЗ выполняется неравенство:

$$\left(\sqrt{4 - (x - 1)^2} \leq 2 \right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{4 - (x - 1)^2} - 2 \leq 0 \right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{3 + 2x - x^2} - 2 \leq 0 \right).$$

Заметим, что равенство достигается только при $x = 1$. Тогда левая часть полученного уравнения неотрицательна, а правая не является положительным числом.

Следовательно, уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x = 1 \\ \cos \pi(y - x) = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \cos \frac{y - x}{2} = 0 \\ \cos \pi(y - x) = 0 \end{cases}.$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} x = 1 \\ \cos \pi(y - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \pi(y - x) = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y - x = \frac{1}{2} + n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} + n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

Проверкой убеждаемся, что пары чисел $x=1, y=1,5+n, n \in Z$ удовлетворяют условию задачи.

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} \cos \frac{y-x}{2} = 0 \\ \cos \pi(y-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y-x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ \pi(y-x) = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x = \pi + 2\pi k, k \in Z \\ y-x = \frac{1}{2} + n, n \in Z \end{cases}.$$

Из первого уравнения системы следует, что $x-y$ иррациональное число, а из второго – рациональное. Поэтому эта система решений не имеет.

Ответ: $(1; 1,5+n), n \in Z$.

1.1.105. Ответ: $(-1; -1+\pi k), (-\pi; -\pi+\pi k), \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}+\pi k\right), (0; \pi k),$

$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}+\pi k\right), k \in Z$.

1.1.106. Решение. ОДЗ уравнения определяется неравенством:

$$(4y - y^2 \geq 0) \Leftrightarrow (y^2 - 4y \leq 0) \Leftrightarrow (y(y-4) \leq 0) \Leftrightarrow (0 \leq y \leq 4).$$

Перепишем уравнение в виде:

$$\begin{aligned} & \left(12\sqrt{4y-y^2} \cdot \sin^2 \frac{x+y}{2} - 12(1 - \cos(x+y)) = (2 \cos^2 \pi(x+y) - 1)^2\right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(12\sqrt{4y-y^2} \cdot \sin^2 \frac{x+y}{2} - 12 \cdot 2 \sin^2 \frac{x+y}{2} = (2 \cos^2 \pi(x+y) - 1)^2\right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(12 \sin^2 \frac{x+y}{2} \cdot (\sqrt{4y-y^2} - 2) = (2 \cos^2 \pi(x+y) - 1)^2\right). \end{aligned}$$

Так как $4y - y^2 = 4 - (y-2)^2 \leq 4$, то на ОДЗ выполняется неравенство:

$$\left(\sqrt{4 - (y-2)^2} \leq 2\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{4 - (y-2)^2} - 2 \leq 0\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{4y - y^2} - 2 \leq 0\right).$$

Заметим, что равенство достигается только при $y=2$. Тогда правая часть полученного уравнения неотрицательна, а левая не является положительным числом.

Следовательно, уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2 \cos \pi(x+y) - 1 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin \frac{x+y}{2} = 0 \\ 2 \cos \pi(x+y) - 1 = 0 \end{cases}.$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2 \cos \pi(x+y) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ \cos \pi(x+2) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ \pi x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = \pm \frac{1}{3} + 2n, n \in Z. \end{cases}$$

Проверкой убеждаемся, что пары чисел $x = \pm \frac{1}{3} + 2n, n \in Z, y = 2$

удовлетворяет условию задачи.

Решим вторую систему:

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

$$\begin{cases} \sin \frac{x+y}{2} = 0 \\ 2 \cos \pi(x+y) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \pi k, \quad k \in Z \\ \pi(x+y) = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2\pi k, \quad k \in Z \\ x+y = \pm \frac{1}{3} + 2n, \quad n \in Z \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что $x+y$ иррациональное число или ноль (при $k=0$), а из второго – рациональное, отличное от нуля число. Поэтому эта система решений не имеет.

Ответ: $\left(\pm \frac{1}{3} + 2n; 2\right), n \in Z$.

1.1.107. *Ответ:* $(k-3; 3), k \in Z$.

1.1.108. *Решение.* Пусть $y = 3^{-|x-2|}$. Заметим, что $0 < y \leq 1$. Тогда исходное уравнение будет иметь решение, если уравнение $y^2 - 4y - a = 0$ имеет решение, удовлетворяющее условию $0 < y \leq 1$. Последнее квадратное уравнение имеет решения $y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+4a}}{2} = 2 \pm \sqrt{4+a}$ при выполнении условия ($D = 16 + 4a = 4(4+a) \geq 0 \Rightarrow a \geq -4$). Найдем значения параметра a , для которых выполняется $0 < y \leq 1$:

$$\begin{cases} a \geq -4 \\ 0 < 2 + \sqrt{4+a} \leq 1 \\ 0 < 2 - \sqrt{4+a} \leq 1 \end{cases}$$

Заметим, что неравенство $(0 < 2 + \sqrt{4+a} \leq 1) \Leftrightarrow (-2 < \sqrt{4+a} \leq -1)$ решений не имеет. Решим неравенство $(0 < 2 - \sqrt{4+a} \leq 1) \Leftrightarrow (-2 < -\sqrt{4+a} \leq -1) \Leftrightarrow (1 \leq \sqrt{4+a} < 2) \Leftrightarrow (1 \leq 4+a < 4) \Leftrightarrow (-3 \leq a < 0)$. Таким образом, квадратное уравнение относительно y имеет решение $y = 2 - \sqrt{4+a}$, если $a \in [-3; 0)$. Для решения исходного уравнения решим уравнение $y = 3^{-|x-2|} = 1$ при $a = -3$ и уравнение $y = 3^{-|x-2|} = 2 - \sqrt{4+a}$ для $a \in (-3; 0)$:

1) $(3^{-|x-2|} = 1) \Leftrightarrow (|x-2| = 0) \Leftrightarrow (x = 2)$;

2) $(3^{-|x-2|} = 2 - \sqrt{4+a}) \Leftrightarrow (-|x-2| = \log_3(2 - \sqrt{4+a})) \Leftrightarrow (|x-2| = -\log_3(2 - \sqrt{4+a})) \Leftrightarrow (x = 2 \pm \log_3(2 - \sqrt{4+a}))$.

Ответ: $x = 2$, если $a = -3$; $x = 2 \pm \log_3(2 - \sqrt{4+a})$, если $a \in (-3; 0)$; нет решений, если $a \notin [-3; 0)$.

1.1.109. *Ответ:* $x = 1$, если $m = -\frac{3}{4}$; $x = 1 \pm \log_8(2 - 2\sqrt{1+m})$, если $m \in \left(-\frac{3}{4}; 0\right)$;

нет решений, если $m \notin \left[-\frac{3}{4}; 0\right)$.

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

1.1.110. Решение. Пусть $y = 6^{-|x+2|}$. Заметим, что $0 < y \leq 1$. Тогда исходное уравнение будет иметь решение, если уравнение $y^2 - 6y + 3a = 0$ имеет решение, удовлетворяющее условию $0 < y \leq 1$. Последнее квадратное уравнение имеет решения $y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 12a}}{2} = 3 \pm \sqrt{9 - 3a}$ при выполнении условия $(D = 36 - 12a = 12(3 - a) \geq 0) \Rightarrow (a \leq 3)$. Найдем значения параметра a , для которых выполняется $0 < y \leq 1$:

$$\begin{cases} a \leq 3 \\ \left[\begin{array}{l} 0 < 3 + \sqrt{9 - 3a} \leq 1 \\ 0 < 3 - \sqrt{9 - 3a} \leq 1 \end{array} \right. \end{cases}$$

Заметим, что неравенство $(0 < 3 + \sqrt{9 - 3a} \leq 1) \Leftrightarrow (-3 < \sqrt{4 + a} \leq -2)$ решений не имеет. Решим неравенство $(0 < 3 - \sqrt{9 - 3a} \leq 1) \Leftrightarrow (-3 < -\sqrt{9 - 3a} \leq -2) \Leftrightarrow (2 \leq \sqrt{9 - 3a} < 3) \Leftrightarrow (4 \leq 9 - 3a < 9) \Leftrightarrow (-5 \leq -3a < 0) \Leftrightarrow (0 < a \leq \frac{5}{3})$.

Таким образом, квадратное уравнение относительно y имеет решение $y = 3 - \sqrt{9 - 3a}$, если $a \in (0; 1\frac{2}{3}]$. Для решения исходного уравнения решим уравнение $y = 6^{-|x+2|} = 1$ при $a = 1\frac{2}{3}$ и уравнение $y = 3^{-|x-2|} = 3 - \sqrt{9 - 3a}$ для $a \in (0; 1\frac{2}{3})$:

- 1) $(3^{-|x+2|} = 1) \Leftrightarrow (|x+2| = 0) \Leftrightarrow (x = -2)$;
- 2) $(6^{-|x+2|} = 3 - \sqrt{9 - 3a}) \Leftrightarrow (-|x+2| = \log_6(3 - \sqrt{9 - 3a})) \Leftrightarrow (|x+2| = -\log_6(3 - \sqrt{9 - 3a})) \Leftrightarrow (x = -2 \pm \log_6(3 - \sqrt{9 - 3a}))$.

Ответ: $x = -2$, если $a = 1\frac{2}{3}$; $x = -2 \pm \log_6(3 - \sqrt{9 - 3a})$, если $a \in (0; 1\frac{2}{3})$; нет решений, если $a \notin (0; 1\frac{2}{3}]$.

1.1.111. Ответ: $x = -1$, если $m = \frac{5}{2}$; $x = -1 \pm \log_5(3 - \sqrt{9 - 2m})$, если $m \in (0; 2,5)$; нет решений, если $m \notin (0; 2,5]$.

1.1.112. Решение. Значения x , удовлетворяющие уравнению $\log_7(\sqrt{x+2} - a^2x^2 - a^2x) = \log_{a^2-a+7}(3 - \sqrt{3-x})$ при любом значении параметра a , будут решениями уравнения и при $a = 0$. В этом случае уравнение примет вид $\log_7(\sqrt{x+2}) = \log_7(3 - \sqrt{3-x})$. Решим это уравнение:

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.1. Уравнения

$$\begin{aligned}
 (\log_7(\sqrt{x+2}) = \log_7(3 - \sqrt{3-x})) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{3-x} > 0 \\ \sqrt{x+2} = 3 - \sqrt{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3-x} < 3 \\ x+2 = 9 - 6\sqrt{3-x} + 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x < 9 \\ 2x-10 = -6\sqrt{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -6 \\ 5-x = 3\sqrt{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -6 \\ 5-x \geq 0 \\ 25-10x+x^2 = 9(3-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -6 \\ x \leq 5 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x \leq 5 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, только два значения $x=-1$ и $x=2$ могут удовлетворять условию задачи. При $x=-1$ исходное уравнение примет вид $\log_7 1 = \log_{a^2-a+7} 1$, которое выполняется при любом значении параметра a , так как $(a^2 - a + 7 > 1) \Leftrightarrow (a^2 - a + 6 > 0)$ для любого a ($D=-23 < 0$). При $x=2$ исходное уравнение примет вид $\log_7(2 - 6a^2) = \log_{a^2-a+7} 2$, которое не выполняется при любом значении параметра a . Например, в случае, если

$$(2 - 6a^2 \leq 0) \Leftrightarrow \left(a^2 \geq \frac{1}{3}\right).$$

Ответ: $x=-1$.

1.1.113. *Ответ:* $x=0$.

1.1.114. *Ответ:* $x=-4$.

1.1.115. *Ответ:* $x=5$.

2.2. Неравенства

1.2.1. Решение. Решения неравенства должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ 8x - 2x^2 - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ -2(x^2 - 4x + 3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(x-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Осталось проверить подстановкой, будут ли эти значения решениями исходного неравенства.

Значение $x=1$ является решением неравенства, так как

$$\left(\log_5\left(\frac{1}{5}\right) + 1 \leq 0\right) \Leftrightarrow \left(\log_5\left(\frac{1}{5}\right) \leq -1\right) \Leftrightarrow (-1 = -1), \text{ а } x=3 \text{ не является решением.}$$

Действительно,

$$\left(\log_5\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{3} > 0\right) \Leftrightarrow \left(\log_5 3 - 1 + \frac{1}{3} > 0\right) \Leftrightarrow \left(\log_5 3 > \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\ln 3}{\ln 5} > \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (3 \ln 3 > 2 \ln 5) \Leftrightarrow (\ln 27 > \ln 25).$$

Ответ: $x=1$.

1.2.2. Ответ: $x=3$.

1.2.3. Решение. Решения неравенства должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 7x + 10 \geq 0 \\ 14x - 20 - 2x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 7x + 10 \geq 0 \\ -2(x^2 - 7x + 10) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 7x + 10 \geq 0 \\ x^2 - 7x + 10 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-2)(x-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}.$$

Проверим подстановкой, будут ли эти значения решениями исходного неравенства.

Значение $x=2$ является решением неравенства, так как

$$\left(9 \log_4\left(\frac{2}{8}\right) \geq 4 - 13\right) \Leftrightarrow \left(9 \log_4\left(\frac{1}{4}\right) \leq -9\right) \Leftrightarrow (-9 = -9), \text{ а } x=5 \text{ не является решением.}$$

Действительно,

$$\left(9 \log_4\left(\frac{5}{8}\right) < 10 - 13\right) \Leftrightarrow (9 \log_4 5 - 9 \log_4 8 < -3) \Leftrightarrow \left(9 \log_4 5 - \frac{27}{2} < -3\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\ln 5}{\ln 4} < \frac{7}{6}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (6 \ln 5 < 7 \ln 4) \Leftrightarrow (\ln 15625 < \ln 16384).$$

Ответ: $x=2$.

1.2.4. Ответ: $x=4$.

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.2. Неравенства

1.2.5. Решение. Так как $0 \leq \cos^2(x+1) \leq 1$, то решения исходного неравенства должны удовлетворять условию: $\lg(9 - 2x - x^2) \geq 1$. Тогда

$$(9 - 2x - x^2 \geq 10) \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1 \leq 0) \Leftrightarrow ((x+1)^2 \leq 0) \Leftrightarrow (x = -1).$$

Легко проверить подстановкой в исходное неравенство, что $x=-1$ является его решением.

Ответ: $x=-1$.

1.2.6. Ответ: $x=2$.

1.2.7. Решение. Так как $\sin^2\left(\pi + \frac{\pi x}{4}\right) \neq 0$, то $0 < \sin^2\left(\pi + \frac{\pi x}{4}\right) \leq 1$. Поэтому

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin^2\left(\pi + \frac{\pi x}{4}\right)} \geq \sqrt{3}.$$

Учитывая, что $x^2 + 4x + 7 = (x+2)^2 + 3 \geq 3$, получим: $0 < \frac{\pi}{x^2 + 4x + 7} \leq \frac{\pi}{3}$. Так как

функция $f(y) = \operatorname{tg} y$ возрастает на интервале $\left(0; \frac{\pi}{3}\right]$, то

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{x^2 + 4x + 7} \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Следовательно, решения неравенства должны

удовлетворять системе:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{x^2 + 4x + 7} = \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sin^2\left(\pi + \frac{\pi x}{4}\right)} = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{(x+2)^2 + 3} = \sqrt{3} \\ \sin^2\left(\pi + \frac{\pi x}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{(x+2)^2 + 3} = \frac{\pi}{3} \\ \sin^2\left(\pi + \frac{\pi x}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \sin^2\left(\pi + \frac{\pi x}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -2).$$

Легко проверить подстановкой в исходное неравенство, что $x=-2$ является его решением.

Ответ: $x=-2$.

1.2.8. Ответ: $\{x = 4n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1.2.9. Решение. Так как $\sqrt{y-x^2-1} \geq 0$ и $\cos x \leq 1$, то должны выполняться неравенства:

$$\left(\cos x - y^2 \geq \sqrt{y-x^2-1}\right) \Rightarrow (\cos x - y^2 \geq 0) \Rightarrow (y^2 \leq \cos x \leq 1) \Rightarrow (0 \leq y^2 \leq 1) \Leftrightarrow (-1 \leq y \leq 1).$$

Учитывая, что $(y-x^2-1 \geq 0) \Rightarrow (y \geq x^2+1 \geq 1) \Rightarrow (y \geq 1)$, получим: $y=1$. Тогда

$$\text{исходное неравенство примет вид } (\cos x - 1 \geq \sqrt{-x^2}) \Rightarrow (-x^2 \geq 0) \Leftrightarrow (x = 0).$$

Следовательно, исходное неравенство может выполняться только при $x=0$ и $y=1$. Проверкой убеждаемся в этом.

Ответ: $(0; 1)$.

1.2.10. Ответ: $(0; 1)$.

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.2. Неравенства

1.2.11. Решение. Перепишем неравенство в виде:

$$\arccos(x + |\sin y|) \leq \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} - 1$$

Заметим, что $-1 \leq x + |\sin y| \leq 1$. Тогда $-2 \leq -1 - |\sin y| \leq x \leq 1 - |\sin y| \leq 1$, т.е. $-2 \leq x \leq 1$.

Функция $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$ возрастает на интервале $(-2; 1]$ $\left(f'(x) = \frac{\pi}{4 \cos^2 \frac{\pi x}{4}} > 0 \right)$ и

принимает наибольшее значение $\max f(x) = f(1) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Поэтому $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \leq 1$.

Так как $0 \leq \arccos(x + |\sin y|) \leq \pi$, то $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} - 1 \geq 0 \right) \Leftrightarrow \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \geq 1 \right)$. Следовательно, решения неравенства удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = 1 \\ -2 \leq x \leq 1 \\ \arccos(x + |\sin y|) \leq \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z \\ -2 \leq x \leq 1 \\ \arccos(x + |\sin y|) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4n + 1, \quad n \in Z \\ -2 \leq x \leq 1 \\ x + |\sin y| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x + |\sin y| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ |\sin y| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pi k, \quad k \in Z \end{cases}$$

Проверкой убеждаемся, что $\begin{cases} x = 1 \\ y = \pi k, \quad k \in Z \end{cases}$ решение неравенства.

Ответ: $(1; \pi k), \quad k \in Z$.

1.2.12. Ответ: $(0; 1)$.

1.2.13. Решение. Переносим все в левую часть, и приводя, к общему знаменателю, получим:

$$\frac{(p + \cos x - \sqrt{x^2 + 9})^2}{p + \cos x} \leq 0.$$

Решениями полученного неравенства будут решения уравнения $p + \cos x = \sqrt{x^2 + 9}$ или решения неравенства $p + \cos x < 0$. Последнее неравенство не может иметь единственного решения, ни при каком значении p . Следовательно, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо, чтобы неравенство $p + \cos x < 0$ не имело решений, а это будет выполнено, если $p \geq 1$. Кроме того, необходимо, чтобы уравнение $p + \cos x = \sqrt{x^2 + 9}$ имело одно решение.

Заметим, что x входит в уравнение чётным образом, т.е. если x_0 – решение уравнения, то и $(-x_0)$ является решением. Следовательно, для того, чтобы

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.2. Неравенства

решение было единственно, необходимо, чтобы $x=0$ было решением. А это выполнено при $p=2$. Тогда уравнение выглядит так: $2 + \cos x = \sqrt{x^2 + 9}$. Его левая часть не превосходит число 3, а правая – не меньше 3.

Следовательно, решение $x=0$ – единственное решение уравнения. Вспоминая, что при $p=2$ неравенство $p + \cos x < 0$ не имеет решений, получаем ответ: $p=2$.

Ответ: $p=2$.

1.2.14. *Ответ:* $p=3$.

1.2.15. *Решение.* Преобразуем неравенство. Так как

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, \quad \cos(\pi)=-1, \quad \frac{\operatorname{tg}(x)+1}{1-\operatorname{tg}(x)}=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right), \quad \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right),$$

$\cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(5x)$, то неравенство примет вид:

$$2 \geq \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \left| \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \right| + \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \right)^{\sin(5x)} + \frac{1}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \right)^{\sin(5x)}}.$$

Сумма двух последних слагаемых представляет собой сумму двух взаимно обратных положительных чисел, и потому не меньше двух. С другой стороны $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \left| \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \right| \geq 0$. Следовательно, неравенство может быть

выполнено только в том случае, когда $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \left| \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \right| = 0$ (т.е.

$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leq 0$) и $\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \right)^{\sin(5x)} = 1$ (т.е. $\sin(5x)=0$). Тогда имеем систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \\ \sin(5x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n \right], \\ x = \frac{\pi k}{5} \end{cases}, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Точки $x = \frac{\pi k}{5}$ принадлежат промежуткам $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n \right]$ только при

$k = 2 + 5l$ и $k = 3 + 5l$. Действительно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{4} + \pi n < \frac{\pi k}{5} \leq \frac{3\pi}{4} + \pi n \right) &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} + n < \frac{k}{5} \leq \frac{3}{4} + n \right) \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4} + 5n < k \leq \frac{15}{4} + 5n \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(1\frac{1}{4} + 5n < k \leq 3\frac{3}{4} + 5n \right) \Leftrightarrow (2 + 5n \leq k \leq 3 + 5n) \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 + 5l \\ k = 3 + 5l \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, $x = \frac{2\pi}{5} + \pi l$ и $x = \frac{3\pi}{5} + \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.2. Неравенства

Ответ: $x = \frac{2\pi}{5} + \pi l$, $x = \frac{3\pi}{5} + \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

1.2.16. Решение. При $p=0$ неравенство очевидно выполняется. Считая теперь p положительным, разделим обе части неравенства на p . Получим

$$\sqrt{p} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{\sqrt{p} \cdot (x-1)^2} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{p}} \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right|.$$

Учитывая, что $a + \frac{1}{a} \geq 2$ для положительных a и $\left| \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right| \leq 1$ приходим к неравенству

$$2 \leq \sqrt{p} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{\sqrt{p} \cdot (x-1)^2} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{p}} \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{p}}.$$

Следовательно $2 \leq \frac{1}{\sqrt[4]{p}}$. Решая это неравенство, получаем, что $p \leq \frac{1}{16}$.

Наибольшим здесь является $p = \frac{1}{16}$.

Проверим, что при $p = \frac{1}{16}$ исходное неравенство имеет решения.

Действительно, при $p = \frac{1}{16}$, получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{64}(x-1)^2 + \frac{1}{4(x-1)^2} \leq \frac{1}{8} \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right| \right) &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{4}{(x-1)^2} \leq 2 \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right| \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\left(\frac{x-1}{2} - \frac{2}{x-1} \right)^2 \leq 2 \cdot \left(\left| \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right| - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\left(\frac{x-1}{2} - \frac{2}{x-1} \right)^2 \geq 0$ и $\left| \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right| - 1 \leq 0$, заключаем, что решения неравенства удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{2}{x-1} = 0 \\ \left| \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 4 \\ \left| \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ \left| \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Легко проверить, что при $p = \frac{1}{16}$ найденные значения x являются решениями исходного неравенства.

Ответ: $p = \frac{1}{16}$.

1.2.17. Ответ: $b = \frac{1}{9}$.

1.2.18. Решение. Способ 1. Пусть $m=x+2y$. Тогда

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.2. Неравенства

$$(x^2 + xy + 4y^2 \leq 3) \Leftrightarrow ((m - 2y)^2 + (m - 2y)y + 4y^2 \leq 3) \Leftrightarrow (6y^2 - 3my + m^2 - 3 \leq 0).$$

Неравенство имеет решение, если дискриминант соответствующего квадратного уравнения относительно y удовлетворяет условию:

$$(D = 9m^2 - 24m^2 + 72 \geq 0) \Leftrightarrow (15m^2 \leq 72) \Leftrightarrow \left(m^2 \leq \frac{24}{5}\right) \Leftrightarrow \left(|m| \leq \sqrt{\frac{24}{5}}\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (-\sqrt{4,8} \leq m \leq \sqrt{4,8})$. Наибольшим значением $m = x + 2y$, которое удовлетворяет последнему соотношению, является $m = \sqrt{4,8}$.

Ответ: $\sqrt{4,8}$.

Способ 2. Преобразуем исходное неравенство, используя тождество

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}:$$

$$(x^2 + xy + 4y^2 \leq 3) \Leftrightarrow ((x+2y)^2 - 3xy \leq 3) \Leftrightarrow \left((x+2y)^2 - 3 \cdot \frac{(x+2y)^2 - (x-2y)^2}{8} \leq 3\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5(x+2y)^2 + 3(x-2y)^2 \leq 24) \Leftrightarrow \left((x+2y)^2 \leq \frac{24}{5} - \frac{3}{5} \cdot (x-2y)^2\right).$$

Тогда $x+2y$ принимает наибольшее значение $\sqrt{4,8}$, если $x=2y$.

Ответ: $\sqrt{4,8}$.

1.2.19. *Ответ:* $7\sqrt{3}$.

1.2.20. *Решение.* $\left((x^2 - 2x + 4) \geq \sqrt{5 + 4x - x^2}\right) \Leftrightarrow \left((x-1)^2 + 3 \geq \sqrt{9 - (x-2)^2}\right).$

Учитывая $\begin{cases} (x-1)^2 + 3 \geq 3 \\ \sqrt{9 - (x-2)^2} \leq 3 \end{cases}$, получим, что $(x-1)^2 + 3 \geq \sqrt{9 - (x-2)^2}$ при $\forall x \in \text{ОДЗ}$,

т.е. $(9 - (x-2)^2 \geq 0) \Leftrightarrow (|x-2| \leq 3) \Leftrightarrow (-1 \leq x \leq 5).$

Ответ: $[-1; 5]$.

1.2.21. *Ответ:* $[1; 5]$.

1.2.22. *Решение. Способ 1.* $(36^x + p \cdot 6^x + p + 8 \leq 0) \Leftrightarrow (6^{2x} + p \cdot 6^x + p + 8 \leq 0)$

Обозначим через $y = 6^x > 0$. Тогда $y^2 + py + p + 8 \leq 0$.

Найдем, при каких значениях параметра p полученное неравенство имеет решения:

$$(D = p^2 - 4p - 32 \geq 0) \Rightarrow ((p+4)(p-8) \geq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq -4 \\ p \geq 8 \end{cases}.$$

Для того, чтобы исходное неравенство имело хотя бы одно решение, нужно, чтобы неравенство $y^2 + py + p + 8 \leq 0$ имело по крайней мере одно положительное решение. Для этого достаточно, чтобы наибольший корень соответствующего уравнения являлся положительным числом:

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.2. Неравенства

$$\left(\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4p - 32}}{2} > 0 \right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{p^2 - 4p - 32} > p \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} p \leq -4 \\ p \geq 8 \\ p < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} p \geq 0 \\ p^2 - 4p - 32 > p^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} p \leq -4 \\ p \geq 8 \\ p < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} p \geq 0 \\ p < -8 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow (p \leq -4).$$

Способ 2. $(36^x + p \cdot 6^x + p + 8 \leq 0) \Leftrightarrow (6^{2x} + p \cdot 6^x + p + 8 \leq 0)$

Сделаем замену $t=6^x>0$. Тогда требуется найти значения p , при которых неравенство $t^2+pt+p+8 \leq 0$ выполняется хотя бы при одном положительном значении t . Это выполняется, если парабола $f(t)=t^2+pt+p+8$ имеет хотя бы один положительный корень. Последнее выполнено, если

$$\begin{cases} f(0) < 0 \\ \begin{cases} D \geq 0 \\ t_a = -\frac{p}{2} > 0 \end{cases} \end{cases}, \text{ где } t_b \text{ — абсцисса вершины параболы. Тогда}$$

$$\begin{cases} p + 8 < 0 \\ \begin{cases} p \leq -4 \\ p \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < -8 \\ p \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow (p \leq -4). \\ p < 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -4]$.

1.2.23. Ответ: $[2; +\infty)$.

1.2.24. Решение: ОДЗ определяется неравенством:

$$(1 - \log_{\text{tg}x} 2 \geq 0) \Leftrightarrow (\log_{\text{tg}x} 2 \leq 1).$$

Введем обозначение: $y = \log_{\text{tg}x} 2 \leq 1$.

Тогда неравенство примет вид: $\sqrt{1-y} \cdot (1-3y+2y^2) \geq 0$. Решая его, получим

$$\left(\sqrt{1-y} \cdot (1-3y+2y^2) \geq 0 \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-y \geq 0 \\ 1-3y+2y^2 \geq 0 \\ 1-y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 1 \\ (2y-1)(y-1) \geq 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 1 \\ \begin{cases} y \leq \frac{1}{2} \\ y \geq 1 \end{cases} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}.$$

Откуда

$$\begin{cases} \log_{\text{tg}x} 2 \leq \frac{1}{2} \\ \log_{\text{tg}x} 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\text{tg}x} 4 \leq 1 \\ \text{tg}x = 2 \end{cases}.$$

Из второго уравнения совокупности получим $x = \arctg 2 + \pi k, k \in Z$ —

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.2. Неравенства

решение неравенства. Для неравенства $\log_{\text{tg}x} 4 \leq 1$ рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} \text{tg}x > 1 \\ \log_{\text{tg}x} 4 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{tg}x > 1 \\ \log_{\text{tg}x} 4 \leq \log_{\text{tg}x} \text{tg}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{tg}x > 1 \\ \text{tg}x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow (\text{tg}x \geq 4);$$

$$2) \begin{cases} 0 < \text{tg}x < 1 \\ \log_{\text{tg}x} 4 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \text{tg}x < 1 \\ \log_{\text{tg}x} 4 \leq \log_{\text{tg}x} \text{tg}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \text{tg}x < 1 \\ \text{tg}x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow (0 < \text{tg}x < 1).$$

Так как функция $y = \text{tg}x$ возрастает на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$,

то решением неравенства $\text{tg}x \geq 4$ является совокупность интервалов $\left[\arctg 4 + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$, а неравенства $0 < \text{tg}x < 1$ – интервалы $\left(\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Ответ: $\arctg 2 + \pi k$, $\left[\arctg 4 + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $\left(\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

1.2.25. *Ответ:* $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right]$, $k \in Z$.

1.2.26. *Решение:* ОДЗ неравенства определяется системой:

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ 2^{2x-2} - 3 \cdot 2^{x-2} - 1 > 0 \end{cases}.$$

Решая последнее неравенство системы

$$\begin{aligned} (2^{2x-2} - 3 \cdot 2^{x-2} - 1 > 0) &\Leftrightarrow (2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 > 0) \Leftrightarrow ((2^x - 4)(2^x + 1) > 0) \Leftrightarrow (2^x - 4 > 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2^x > 2^2) \Leftrightarrow (x > 2), \end{aligned}$$

получим

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ x > 2 \end{cases}.$$

Так как с учетом ОДЗ $0 < \sin x \leq 1$ и основание логарифма $\log_{\sqrt{x}} \sin x$ есть $\sqrt{x} > \sqrt{2} > 1$, то $\log_{\sqrt{x}} \sin x \leq 0$. Следовательно, исходное неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} \log_x \left(\frac{1}{9} (2^{2x-2} - 3 \cdot 2^{x-2} - 1) \right) \geq 0 \\ \log_{\sqrt{x}} \sin x = 0 \end{cases}.$$

Решим неравенство совокупности $\log_x \left(\frac{1}{9} (2^{2x-2} - 3 \cdot 2^{x-2} - 1) \right) \geq 0$. Так как $x > 2$,

$$\text{то } \left(\frac{1}{9} (2^{2x-2} - 3 \cdot 2^{x-2} - 1) \geq 1 \right) \Leftrightarrow (2^{2x-2} - 3 \cdot 2^{x-2} - 10 \geq 0) \Leftrightarrow (2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 40 \geq 0) \Leftrightarrow$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.2. Неравенства

$$\Leftrightarrow ((2^x - 8)(2^x + 5) \geq 0) \Leftrightarrow (2^x - 8 \geq 0) \Leftrightarrow (2^x \geq 2^3) \Leftrightarrow (x \geq 3).$$

Следовательно, решением исходного неравенства в этом случае является система

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ x \geq 3 \end{cases}.$$

Если $\log_{\sqrt{x}} \sin x = 0$, то приходим к системе $\begin{cases} \sin x = 1 \\ x > 2 \end{cases}$. Так как на интервале

$(2; 3]$ не содержится решений уравнения $\sin x = 1$, то решение системы

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

совпадает с решением исходного неравенства. Откуда получаем $[3; \pi)$ и $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{N}$ – решение неравенства.

Ответ: $[3; \pi)$, $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{N}$.

1.2.27. Ответ: $\left[2; \frac{5\pi}{6}\right]$, $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{N}$.

1.2.28. Решение. Так как $\sin \frac{x}{3} \leq 1$ и $3 \leq 4 + \cos 6x$, то верна следующая цепочка неравенств

$$1 = \log_3 3 \leq \log_3 (4 + \cos 6x) \leq \sin \frac{x}{3} \leq 1.$$

Поэтому исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{3} = 1 \\ \log_3 (4 + \cos 6x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 4 + \cos 6x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 6\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \cos 6x = -1 \end{cases}$$

Тогда $x = \frac{3\pi}{2} + 6\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$), так как $\cos 6\left(\frac{3\pi}{2} + 6\pi k\right) = \cos(9\pi + 36\pi k) = \cos \pi = -1$.

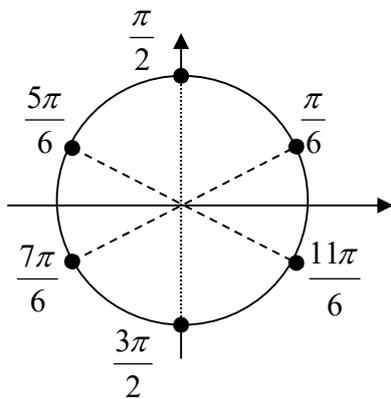


Рис. 11

Можно решить систему иначе

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 6\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 6x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 6\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

На единичной окружности изображены точки соответствующие величинам $x_n = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$ (см. рис. 11). Из рисунка видно, что только $x = \frac{3\pi}{2} + 6\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ – является решением системы.

Ответ: $\frac{3\pi}{2} + 6\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.2.29. Решение. Способ 1.

Решим неравенство

$$|(x^2 - 6x + 5)| < 5x - x^2 \Leftrightarrow ((x-5)(x-1)) < 5x - x^2$$

методом интервалов. Тогда

$$1). \begin{cases} (x-5)(x-1) \geq 0 \\ x^2 - 6x + 5 < 5x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 5 \\ 2x^2 - 11x + 5 < 0 \end{cases}.$$

Откуда

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 5 \\ 2(x-0,5)(x-5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 5 \\ 0,5 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow (0,5 < x \leq 1).$$

2).

$$\begin{cases} (x-5)(x-1) < 0 \\ -x^2 + 6x - 5 < 5x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 5 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow (1 < x < 5).$$

Объединяя полученные результаты, получим $0,5 < x < 5$. На рис. 12 приведена графическая интерпретация решения данного неравенства.

Способ 2. Исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 < 5x - x^2 \\ x^2 - 6x + 5 > -(5x - x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 11x + 5 < 0 \\ x^2 - 6x + 5 > x^2 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-5) < 0 \\ -x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 5 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} < x < 5\right).$$

Ответ: $(0,5; 5)$.

1.2.30. Решение. Так как $4x - x^2 - 2 = 2 - (x-2)^2 \leq 2$, то $\log_2(2 - (x-2)^2) \leq \log_2 2 = 1$. Учитывая, что $0 < 2^{-|x-2|} \leq 1$, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \log_2(2 - (x-2)^2) = 1 \\ 2^{-|x-2|} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2^{-|x-2|} = 1 \end{cases}.$$

Подставив 2, во второе уравнение системы получим, что решением исходного неравенства является $x=2$.

Ответ: $x=2$.

1.2.31. Решение. ОДЗ неравенства определяется системой:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 3 \\ x \geq 1 \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow (2 \leq x \leq 3).$$

Заметим, что на отрезке $[2; 3]$ выполняется неравенство $\sqrt{x-1} - \sqrt{6-x} < 0$. Действительно,

$$(\sqrt{x-1} - \sqrt{6-x} < 0) \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} < \sqrt{6-x}) \Rightarrow (x-1 < 6-x) \Leftrightarrow (2x < 7) \Leftrightarrow (x < 3,5).$$

Учитывая, что $\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} > 0$, получаем, что неравенство выполняется для любого x из ОДЗ.

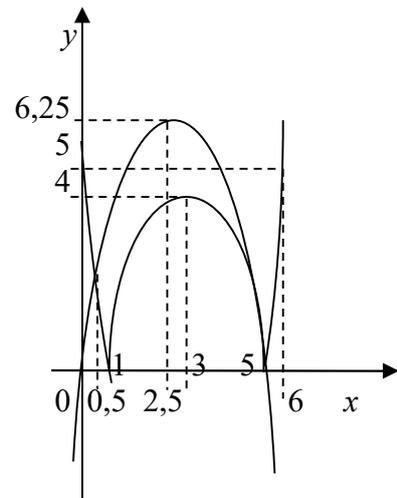


Рис. 12

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.2. Неравенства

Ответ: [2; 3].

1.2.32. Решение: Введем обозначение $y = \log_5(x^2 - 4x + 5)$. Так как

$$\left(\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 4x + 5)} < \log_5(5x^2 - 20x + 25)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 4x + 5)} < \log_5(x^2 - 4x + 5) + 1\right), \text{ то}$$

$$\left(\sqrt{1 - y} < y + 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - y \geq 0 \\ y + 1 > 0 \\ 1 - y < y^2 + 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 1 \\ y > -1 \\ y^2 + 3y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < y \leq 1 \\ y(y + 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < y \leq 1 \\ y < -3 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (0 < y \leq 1).$$

$$\text{Поэтому } (0 < \log_5(x^2 - 4x + 5) \leq 1) \Leftrightarrow (0 < \log_5((x - 2)^2 + 1) \leq 1) \Leftrightarrow (1 < (x - 2)^2 + 1 \leq 5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0 < (x - 2)^2 \leq 4) \Leftrightarrow (0 < |x - 2| \leq 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \neq 0 \\ -2 \leq x - 2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ 2 < x \leq 4 \end{cases}.$$

Ответ: $[0; 2) \cup (2; 4]$.

1.2.33. Ответ: $\left[1 - \frac{\sqrt{6}}{2}; 1\right) \cup \left(1; 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$.

1.2.34. Ответ: $\left[2 - \frac{\sqrt{6}}{2}; 2\right) \cup \left(2; 2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$.

1.2.35. Ответ: $[-1; 0) \cup (0; 3]$.

1.2.36. Решение. Подставляя $x=1$ в исходное неравенство, получим неравенство:

$$\left(\log_{1+t^2}(1+t+3t^2-1) \leq 1\right) \Leftrightarrow \left(\log_{1+t^2}(t+3t^2) \leq 1\right) \Leftrightarrow \log_{1+t^2}(t+3t^2) \leq \log_{1+t^2}(1+t^2).$$

Учитывая, что $1+t^2 > 1$ при $\forall t \neq 0$, имеем

$$\begin{cases} t \neq 0 \\ t+3t^2 > 0 \\ t+3t^2 \leq 1+t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0 \\ t(1+3t) > 0 \\ 2t^2+t-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -\frac{1}{3} \\ t > 0 \\ 2t^2+t-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -\frac{1}{3} \\ t > 0 \\ -1 \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq t < -\frac{1}{3} \\ 0 < t \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $t \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

1.2.37. Ответ: $t \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right]$.

1.2.38. Решение. Подставляя $x=2$ в исходное неравенство, получим неравенство:

$$\left(\log_{\frac{2}{2+p^2}}\left(0,5p^2 + 0,5 - 4 + \frac{6p}{2}\right) \geq -1\right) \Leftrightarrow \left(\log_{\frac{2}{2+p^2}}(0,5p^2 + 3p - 3,5) \geq -1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_{\frac{2}{2+p^2}}(0,5p^2 + 3p - 3,5) \geq \log_{\frac{2}{2+p^2}} \frac{p^2 + 2}{2}\right).$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.2. Неравенства

Учитывая, что $0 < \frac{2}{2+p^2} < 1$ для $\forall p \neq 0$, имеем

$$\begin{cases} p \neq 0 \\ 0,5p^2 + 3p - 3,5 > 0 \\ 0,5p^2 + 3p - 3,5 \leq 0,5p^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \neq 0 \\ p^2 + 6p - 7 > 0 \\ 3p \leq 4,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \neq 0 \\ (p+7)(p-1) > 0 \\ p \leq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \neq 0 \\ p < -7 \\ p > 1 \\ p \leq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < -7 \\ 1 < p \leq 1,5 \end{cases}$$

Ответ: $p \in (-\infty; -7) \cup (1; 1,5]$.

1.2.39. Ответ: $p \in [-1\frac{2}{3}; -1) \cup (4; +\infty)$.

1.2.40. Решение. Так как

$$\cos(2+4x) + \cos(2-4x) = 2 \cos \frac{(2+4x)+(2-4x)}{2} \cdot \cos \frac{(2+4x)-(2-4x)}{2} = 2 \cos 2 \cdot \cos 4x,$$

$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = -1$ и $2 \cos^2 2x - 1 = \cos 4x$, то неравенство можно переписать в виде:

$$2 \cos 2 \cdot \cos 4x \geq \sqrt{\frac{\cos 4x}{2 - \sin x}}. \text{ Заметим, что } 2 - \sin x > 0 \text{ для любого } x. \text{ Поэтому}$$

должна выполняться система неравенств:

$$\begin{cases} \cos 4x \geq 0 \\ 2 \cos 2 \cdot \cos 4x \geq 0 \end{cases}$$

Учитывая, что $\cos 2 < 0$ ($\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$), получим систему

$$\begin{cases} \cos 4x \geq 0 \\ \cos 4x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\cos 4x = 0) \Leftrightarrow \left(4x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z\right).$$

Легко проверить, что $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z$ удовлетворяет исходному неравенству и обращает его в равенство.

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z$.

1.2.41. Ответ: $x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

1.2.42. Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

1.2.43. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

2.3. Системы

1.3.1. Решение. Система равносильна совокупности:

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ 2 \sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ -\cos 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \{\emptyset\}$$

$$\begin{cases} \cos y = 0 \\ \sin x > 0 \\ 2 \sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ \sin x > 0 \\ 2 \sin^2 x - \cos(\pi + 2\pi k) - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ \sin x > 0 \\ 2 \sin^2 x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ \sin x > 0 \\ \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \end{cases}$$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

1.3.2. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

1.3.3. Решение. Система равносильна совокупности:

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ 2 \sin^2 x - \cos\left(2y - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ 2 \sin^2 x - 1 + 1 - \cos\left(2y - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos\left(2y - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x \geq 0 \\ 2 \sin^2 x - \cos\left(2y - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 \cos^2 x - 1 \geq 0 \\ 2(1 - \cos^2 x) - \cos\left(2y - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ -1 \geq 0 \\ \cos\left(2y - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \{\emptyset\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ 2y - \frac{\pi}{3} = 2\pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z \\ 2y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z \\ y = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z; y = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

1.3.4. Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z; y = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

1.3.5. Решение. Решим систему уравнений:

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.3. Системы

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1) + (y^2 - 6y + 9) = 0 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} ((x - y)^2 + 2(x - y) + 1) + (y - 3)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y + 1)^2 + (y - 3)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y = 3 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ответ: (2; 3).

1.3.6. Ответ: (-1; 1).

1.3.7. Решение. Для решений системы должны выполняться соотношения:

$$\begin{cases} xy + 24 = \frac{x^3}{y} \\ xy - 6 = \frac{y^3}{x} \end{cases} \Rightarrow \left((xy + 24)(xy - 6) = \frac{x^3}{y} \cdot \frac{y^3}{x} \right) \Rightarrow ((xy + 24)(xy - 6) = x^2 y^2).$$

Обозначая через $z = xy$, получим: $((z + 24)(z - 6) = z^2) \Leftrightarrow (18z - 144 = 0) \Leftrightarrow (z = 8)$.

Тогда исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} x = \frac{8}{y} \\ xy - 6 = \frac{y^3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{y} \\ 8 - 6 = \frac{y^4}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{y} \\ y^4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{y} \\ y = -2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ x = 4 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Ответ: (-4; -2), (4; 2).

1.3.8. Ответ: (-4; -2), (0; 0), (4; 2).

1.3.9. Решение. Преобразуем уравнения системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y - 18 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + xy - 62 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy - (x + y) - 18 = 0 \\ 2(x + y)^2 - 3xy - 62 = 0 \end{cases}.$$

Произведем замену переменных: $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$. Тогда

$$\begin{cases} u^2 - 2v - u - 18 = 0 \\ 2u^2 - 3v - 62 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 2v - u - 18 = 0 \\ v = \frac{2u^2 - 62}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 2 \cdot \frac{2u^2 - 62}{3} - u - 18 = 0 \\ v = \frac{2u^2 - 62}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3u^2 - 4u^2 + 124 - 3u - 54}{3} = 0 \\ v = \frac{2u^2 - 62}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 3u - 70 = 0 \\ v = \frac{2u^2 - 62}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 7 \\ u = -10 \\ v = \frac{2u^2 - 62}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 7 \\ v = 12 \\ u = -10 \\ v = 46 \end{cases}.$$

Учитывая замену переменных, имеем

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - y \\ (7 - y)y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - y \\ y^2 - 7y + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - y \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -10 \\ xy = 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 10 \\ (-10 - y)y = 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 10 \\ y^2 + 10y + 46 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 10 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Ответ: (3; 4), (4; 3).

1.3.10. Ответ: (-1; 1), (1; -1), (1; 2), (2; 1).

1.3.11. Решение. Преобразуем первое уравнение системы:

$$(x^2 - 2xy - 3y^2 = 0) \Leftrightarrow (x^2 + xy - 3xy - 3y^2 = 0) \Leftrightarrow (x(x + y) - 3y(x + y) = 0) \Leftrightarrow \Leftrightarrow ((x + y)(x - 3y) = 0).$$

Тогда исходная система распадается на две:

$$\begin{cases} x = -y \\ x^2 - xy - 2x - 3y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 2y^2 - y - 6 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3y \\ x^2 - xy - 2x - 3y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 2y^2 - 3y - 2 = 0 \end{cases}.$$

Решим полученные системы:

$$1). \begin{cases} x = -y \\ y = 2 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad 2). \begin{cases} x = 3y \\ y = 2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \\ x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ответ: $(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$, (-2; 2), $(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$, (6; 2).

1.3.12. Ответ: (-1; -1), $(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$.

1.3.13. Решение. Заметим, что если пара $(x_0; y_0)$ является решением системы, то и пара $(-x_0; y_0)$ – также будет её решением. Поэтому из того, что система имеет единственное решение, необходимо вытекает, что $x = 0$. При этом система принимает вид

$$\begin{cases} 3 + 4 = 3y + 3p \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{7 - 3y}{3} \\ y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{4}{3} \\ y = 1 \\ p = \frac{10}{3} \\ y = -1 \end{cases}.$$

Таким образом, возможными значениями p , при которых система имеет единственное решение, являются только $p = \frac{4}{3}$ и $p = \frac{10}{3}$. Заметим, что при

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.3. Системы

этих значениях p решением системы являются $(0; 1)$ и $(0; -1)$ соответственно.

Проверим достаточность найденных значений p .

При $p = \frac{4}{3}$ система принимает вид

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5 \cdot |x| = 3y + 5x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

На множестве x и y , удовлетворяющих второму уравнению этой системы, выполнены неравенства $2^{|x|} \geq 1 \geq y$, $|x| \geq x^2$.

Следовательно, $3 \cdot 2^{|x|} + 5 \cdot |x| \geq 3y + 5x^2$, причем равенство достигается только при $x = 0$, $y = 1$. Поэтому значение $p = \frac{4}{3}$ удовлетворяет условию задачи.

Доказать единственность решения последней системы можно иначе. Первое уравнение запишем в виде $3 \cdot (2^{|x|} - y) + 5 \cdot (|x| - x^2) = 0$. Так как оба выражения в скобках неотрицательны, то

$$\begin{cases} 2^{|x|} = y \\ |x| - x^2 = 0 \end{cases}$$

С учетом неравенств $2^{|x|} \geq 1 \geq y$, первое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2^{|x|} = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Пара $(0; 1)$ удовлетворяет и второму уравнению системы.

При $p = \frac{10}{3}$ исходная система имеет вид

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5 \cdot |x| = 3y + 5x^2 + 6 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Для последней системы доказать единственность решения не удастся. Поэтому можно попробовать найти хотя бы ещё одно решение. Легко проверить, что пары $x = 1$, $y = 0$ и $x = -1$, $y = 0$ также являются решениями системы, как и найденное ранее решение $x = 0$, $y = -1$. Следовательно, значение $p = \frac{10}{3}$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $p = \frac{4}{3}$.

1.3.14. *Ответ:* $p = \frac{2}{5}$.

1.3.15. *Решение.* Заметим, что $(3 + \sqrt{8})^y = (3 - 2\sqrt{2})^{-y}$. Тогда, если $(x_0; y_0)$ является решением системы, то $(x_0; -y_0)$ — также её решение. Поэтому из

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.3. Системы

условия единственности решения необходимо вытекает, что $y=0$ и система принимает вид:

$$\begin{cases} 2-3p = x^2 + 6x + 5 \\ x^2 \cdot (p^2 - 5p + 6) = 0. \text{ Тогда} \\ -6 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2-3p = x^2 + 6x + 5 \\ x^2 \cdot (p^2 - 5p + 6) = 0 \\ -6 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3p = x^2 + 6x + 5 \\ p = 2 \\ p = 3 \\ x = 0 \\ -6 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ x^2 + 6x + 5 = -4 \\ -6 \leq x \leq 0 \\ x = 0 \\ 2-3p = 5 \\ p = 3 \\ x^2 + 6x + 5 = -7 \\ -6 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ x = -3 \\ p = 3 \\ x^2 + 6x + 12 = 0 \\ -6 \leq x \leq 0 \\ x = 0 \\ p = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ x = -3 \\ p = -1 \\ x = 0 \end{cases}, \text{ так как уравнение } x^2 + 6x + 12 = 0 \text{ решений не имеет } (D = -12 < 0).$$

Таким образом, возможными значениями p , при которых исходная система имеет единственное решение, являются только $p=2$ и $p=-1$. Заметим, что при этих значениях p решением системы являются $(-3; 0)$ и $(0; 0)$ соответственно. Покажем, что при найденных значениях p система имеет единственное решение.

Подставим эти значения p в исходную систему. Тогда, при $p = 2$

$$\begin{cases} (3-2\sqrt{2})^y + (3+\sqrt{8})^y - 6 = x^2 + 6x + 5 \\ y^2 = 0 \\ -6 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 6x + 9 = 0 \\ -6 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$$

система имеет единственное решение $(-3; 0)$.

При $p = -1$:

$$\begin{cases} (3-2\sqrt{2})^y + (3+\sqrt{8})^y + 3 = x^2 + 6x + 5 \\ y^2 + 12x^2 = 0 \\ -6 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-2\sqrt{2})^y + (3+\sqrt{8})^y + 3 = x^2 + 6x + 5 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ -6 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

т.е. система имеет единственное решение $(0; 0)$.

Ответ: $p = -1, p = 2$.

1.3.16. Ответ: $p = -3$, $p = -2$.

1.3.17. Решение. Из второго уравнения получаем $(y+1)x = -2y-1$. Отсюда $y \neq -1$ (проверьте подстановкой). Тогда $x = \frac{-2y-1}{y+1}$. Подставляя x в первое

уравнение, получим:

$$\begin{aligned} & \left(p \cdot \left(\frac{-2y-1}{y+1} \right) \cdot y + \frac{-2y-1}{y+1} - y + \frac{3}{2} = 0 \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{2py(-2y-1) + 2(-2y-1) - 2y(y+1) + 3(y+1)}{2(y+1)} = 0 \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{-4py^2 - 2py - 4y - 2 - 2y^2 - 2y + 3y + 3}{2(y+1)} = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{(-4p-2)y^2 - (2p+3)y + 1}{2(y+1)} = 0 \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{2(2p+1)y^2 + (2p+3)y - 1}{2(y+1)} = 0 \right), \text{ откуда} \\ & \qquad \qquad \qquad 2(2p+1)y^2 + (2p+3)y - 1 = 0 \quad (y \neq -1). \end{aligned} \quad (*)$$

При $p = -\frac{1}{2}$ получим уравнение $2y-1=0$, $y = \frac{1}{2}$ ($x = -\frac{4}{3}$).

При $p \neq -\frac{1}{2}$ найдем дискриминант уравнения (*):

$$D = (2p+3)^2 + 8(2p+1) = 4p^2 + 28p + 17,$$

который равен нулю при

$$p = \frac{-28 \pm \sqrt{28^2 - 16 \cdot 17}}{8} = \frac{-28 \pm 4\sqrt{7^2 - 17}}{8} = \frac{-7 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда при $p = \frac{-7+4\sqrt{2}}{2}$ у квадратного уравнения (*) будет единственный корень

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2p+3}{4(2p+1)} = -\frac{-7+4\sqrt{2}+3}{4(-7+4\sqrt{2}+1)} = -\frac{-4+4\sqrt{2}}{4(-6+4\sqrt{2})} = -\frac{-1+\sqrt{2}}{-6+4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{6-4\sqrt{2}} = \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1) \cdot (6+4\sqrt{2})}{(6-4\sqrt{2}) \cdot (6+4\sqrt{2})} = \frac{6\sqrt{2}+8-6-4\sqrt{2}}{4} = \frac{2+2\sqrt{2}}{4} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \neq -1. \end{aligned}$$

Заметим, что соответствующее значение x равно:

$$x = \frac{-2 \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{2} - 1}{\frac{1+\sqrt{2}}{2} + 1} = -2 \cdot \frac{1+\sqrt{2}+1}{1+\sqrt{2}+2} = -2 \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = -2 \cdot \frac{(2+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = -\frac{2}{7} \cdot (4+\sqrt{2}).$$

Аналогично, при $p = \frac{-7-4\sqrt{2}}{2}$: $y = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \neq -1$ и $x = -\frac{2}{7} \cdot (4-\sqrt{2})$.

Возможен случай, когда один из корней уравнения (*) равен -1. Подставив

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.3. Системы

в это уравнение $y=-1$, получим $p=1$. А так как для исходной системы $y \neq -1$, то в этом случае система имеет единственное решение $\left(x = -\frac{8}{7}; y = \frac{1}{6}\right)$.

Ответ: $\frac{-7-4\sqrt{2}}{2}, \frac{-7+4\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 1$.

1.3.18. Ответ: $\frac{11}{12}; 1; 3$.

1.3.19. Решение. Умножая неравенство системы на 4, получим из системы

$$\begin{cases} 2^{x+1} = y^2 + 4 \\ 2^{x+1} \leq 4y \end{cases}$$

неравенство $y^2 + 4 = 2^{x+1} \leq 4y$. Откуда $(y^2 + 4 \leq 4y) \Leftrightarrow ((y-2)^2 \leq 0) \Leftrightarrow (y=2)$. Но тогда $2^{x+1} = y^2 + 4 = 4 + 4 = 8 = 2^3$. Следовательно, $(x+1=3) \Leftrightarrow (x=2)$. Легко проверить, что пара чисел $x=2, y=2$ удовлетворяют исходной системе.

Ответ: $(2; 2)$.

1.3.20. Ответ: $(0; 0,5)$.

1.3.21. Ответ: $(2; 2)$.

1.3.22. Ответ: $(\sqrt{2}; 2)$.

1.3.23. Решение.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}y = 0 \\ \operatorname{tg}^2x + \operatorname{ctg}^2y = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}x = -\operatorname{ctg}y \\ (-\operatorname{ctg}y)^2 + \operatorname{ctg}^2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}x = -\operatorname{ctg}y \\ 2\operatorname{ctg}^2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}x = -\operatorname{ctg}y \\ \operatorname{ctg}y = \sqrt{3} \\ \operatorname{ctg}y = -\sqrt{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}x = -\operatorname{ctg}y \\ \operatorname{ctg}y = \sqrt{3} \\ \operatorname{tg}x = -\operatorname{ctg}y \\ \operatorname{ctg}y = -\sqrt{3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}x = -\sqrt{3} \\ \operatorname{ctg}y = \sqrt{3} \\ \operatorname{tg}x = \sqrt{3} \\ \operatorname{ctg}y = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n, n \in Z \\ y = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi m, m \in Z \\ x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n, n \in Z \\ y = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi m, m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z \\ y = \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z \\ y = \frac{5\pi}{6} + \pi m, m \in Z \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi m\right); \left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi m\right), n, m \in Z$.

1.3.24. Ответ: $\left((-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k\right);$

$\left((-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k\right), k, n \in Z$.

1.3.25. Решение.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sin x + ctgy = 0 \\ 2(\sin^2 x + ctg^2 y) = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -ctgy \\ (-ctgy)^2 + ctg^2 y = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -ctgy \\ 2ctg^2 y = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -ctgy \\ ctgy = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ ctgy = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -ctgy \\ ctgy = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -ctgy \\ ctgy = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ ctgy = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ ctgy = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi k, \quad k \in Z \\ y = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, \quad n \in Z \\ x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k, \quad k \in Z \\ y = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, \quad n \in Z \end{cases} \end{aligned}$$

Откуда получаем

$$\begin{cases} x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in Z \\ y = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, \quad n \in Z \end{cases} \quad \text{ИЛИ} \quad \begin{cases} x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in Z \\ y = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, \quad n \in Z \end{cases}.$$

Ответ: $\left((-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k; \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n \right);$

$\left((-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k; \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n \right), \quad k, n \in Z.$

1.3.26. *Ответ:* $\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right); \left((-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right), \quad k, n \in Z.$

1.3.27. *Решение.* Введем обозначения: $a = 3^x$ и $b = 3^{y-x}$. Тогда решая систему

$$\begin{cases} a - 5b = 4001 \\ 3b + a = 8097 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4001 + 5b \\ 8b = 4096 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4001 + 5 \cdot 512 \\ b = 512 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6561 \\ b = 512 \end{cases},$$

получим:

$$\begin{cases} 3^x = 6561 \\ 2^{y-x} = 512 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3^8 \\ 2^{y-x} = 2^9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y - x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 17 \end{cases}.$$

Ответ: (8; 17).

1.3.28. *Ответ:* (0; 6).

1.3.29. *Ответ:* (3; 4), (4, 3).

1.3.30. *Ответ:* (2; 3), (3, 2).

2.4. Функции

1.4.1. Решение. Запишем функцию в виде

$$y = x - \sqrt{(2x-3)^2} - \sqrt{(x-2)^2} = x - |2x-3| - |x-2|.$$

Методом интервалов освободимся от абсолютных величин

$$\begin{cases} x \leq 1,5 \\ y = x + (2x-3) + (x-2) = 4x-5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 1,5 < x \leq 2 \\ y = x - (2x-3) + (x-2) = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ y = x - (2x-3) - (x-2) = 5-2x \end{cases}.$$

Таким образом, функцию можно записать в виде:

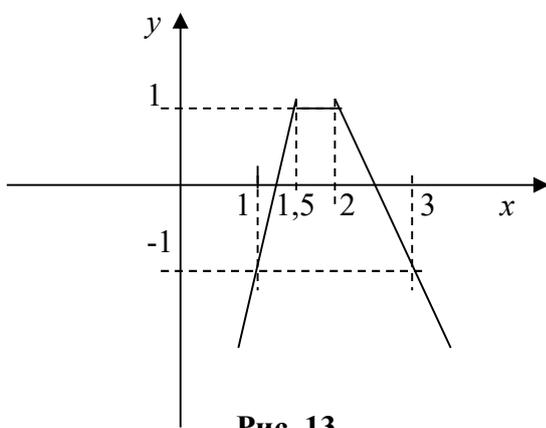


Рис. 13

$$y = \begin{cases} 4x-5, & \text{если } x \leq 1,5, \\ 1, & \text{если } 1,5 < x \leq 2, \\ 5-2x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Строим график этой функции.

Ответ: $y \in (-\infty; 1]$.

1.4.2. Ответ: $y \in (3; +\infty]$.

1.4.3. Методом интервалов освободимся от абсолютных величин

$$\begin{cases} x \leq 0,5 \\ y = -(2x-2) - (x-3) - 2x = -5x+4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0,5 < x \leq 3 \\ y = (2x-1) - (x-3) - 2x = 2-x \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 3 \\ y = (2x-1) + (x-3) - 2x = x-4 \end{cases}.$$

Таким образом, функцию можно записать в виде:

$$y = \begin{cases} -5x+4, & \text{если } x \leq 0,5, \\ 2-x, & \text{если } 0,5 < x \leq 3, \\ x-4, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Учитывая, что функции $f(x) = -5x+4$ убывает на $(-\infty; 0,5)$, $g(x) = 2-x$ убывает на $(0,5; 3)$, $h(x) = x-4$ — возрастает на $(3; +\infty)$, и $\min f(x) = f(0,5) = 1,5$,

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.4. Функции

$\min g(x) = g(3) = -1$, $\min h(x) = h(3) = -1$, получим, что $\min y(x) = y(3) = -1$.

Ответ: $\min y(x) = y(3) = -1$.

1.4.4. Ответ: $\max y(x) = y\left(\frac{3}{2}\right) = 1$.

1.4.5. Решение. Расстояние между точкой $(x; y)$ графика функции и точкой $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ определяется выражением: $\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{16}$.

Учитывая, что

$$f'(x) = 4x^3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(8x^3 - 1) = \frac{1}{2}(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1),$$

получим: $x_{\min} = \frac{1}{2}$. Тогда $\min f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{5}{16} = \frac{1 - 4 + 5}{16} = \frac{1}{8}$.

Так как при $x = \frac{1}{2}$ $y = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, то ближайшей точкой $(x; y)$ графика функции к точке $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ является точка $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$, а кратчайшее расстояние

будет равно $\sqrt{\min f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

1.4.6. Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

1.4.7. Решение.

Прямая, перпендикулярная касательной функции $y(x) = \frac{3}{4} + 2x^2$ в точке $(x; y)$, имеет

угловой коэффициент равный $k = -\frac{1}{y'(x)} = -\frac{1}{4x}$.

Если эта прямая будет совпадать с прямой, проходящей через точки $(x; y)$ и $(1; 1)$, то должно выполняться следующее условие для угловых коэффициентов этих прямых:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y - 1}{x - 1} = -\frac{1}{y'(x)} = -\frac{1}{4x}.$$

Тогда получим $\left(4x\left(2x^2 - \frac{1}{4}\right) = -x + 1\right) \Leftrightarrow (8x^3 - x + x = 1) \Leftrightarrow \left(x^3 = \frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2}\right)$ и

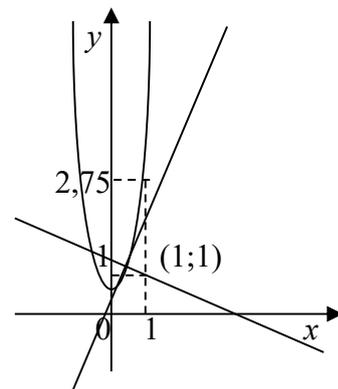


Рис. 14

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.4. Функции

$y = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$. Заметим, что график функции $y(x) = \frac{3}{4} + 2x^2$ расположен выше

касательной к данной кривой в точке $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$, определяемой уравнением

$$\left(y - \frac{5}{4} = y'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \Leftrightarrow \left(y - \frac{5}{4} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \Leftrightarrow \left(y = 2x + \frac{1}{4}\right).$$

Действительно,

$$\left(\frac{3}{4} + 2x^2 \geq 2x + \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \left(2x^2 - 2x + \frac{1}{2} \geq 0\right) \Leftrightarrow (4x^2 - 4x + 1 \geq 0) \Leftrightarrow ((2x - 1)^2 \geq 0).$$

Поэтому ближайшей точкой $(x; y)$ графика функции к точке $(1; 1)$ является

точка $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$, расстояние между которыми равно

$$\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$.

1.4.8. Ответ: $(1; 0)$.

1.4.9. Решение. Докажем, что $\log_3 5 < \frac{3}{2} < \log_2 3$. Действительно,

$$\left(\log_2 3 > \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\ln 3}{\ln 2} > \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow (2 \ln 3 > 3 \ln 2) \Leftrightarrow (\ln 3^2 > \ln 2^3) \Leftrightarrow (\ln 9 > \ln 8) \Leftrightarrow (9 > 8), \text{ и}$$
$$\left(\log_3 5 < \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\ln 5}{\ln 3} < \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow (2 \ln 5 < 3 \ln 3) \Leftrightarrow (\ln 5^2 < \ln 3^3) \Leftrightarrow (\ln 25 < \ln 27) \Leftrightarrow (25 < 27).$$

Следовательно $\log_3 5 < \log_2 3$.

Ответ: $\log_3 5 < \log_2 3$.

1.4.10. Ответ: $\log_4 7 < \log_3 6$

1.4.11. Решение. Используя формулы приведения, и то, что область

значений функции $y = \arcsin x$: $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, получим

$$\arcsin(\sin 10) = \arcsin(\sin(10 - 2\pi)) = \arcsin(\sin(\pi - (10 - 2\pi))) =$$
$$= \arcsin(\sin(3\pi - 10)) = 3\pi - 10.$$

Ответ: $\arcsin(\sin 10) = 3\pi - 10$.

1.4.12. Ответ: $\operatorname{arctg}(tg 5) = 5 - 2\pi$.

1.1.13. Решение. Так как $\sin x$ и $\cos^2 x$ по абсолютной величине не превосходят единицу, то функция определена при любых значениях x .

Имеем $y = \sqrt{\sin x - 1 + \sin^2 x + 5} = \sqrt{\sin^2 x + \sin x + 4}$. Пусть $\sin x = t$, $(-1 \leq t \leq 1)$, тогда следует найти наибольшее и наименьшее значение функции

$y = \sqrt{t^2 + t + 4}$ на отрезке $[-1; 1]$. Выделим полный квадрат: $y = \sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}}$.

Отсюда $y_{\min} = \frac{\sqrt{15}}{2}$ при $t = -\frac{1}{2}$. Найдем значения функции на концах отрезка $y(-1) = \sqrt{1^2 - 1 + 4} = 2$, $y(1) = \sqrt{1^2 + 1 + 4} = \sqrt{6}$. Следовательно, $y_{\max} = \sqrt{6}$. Тогда $E(y) = \left[\frac{\sqrt{15}}{2}; \sqrt{6}\right]$ – множество значений функции.

Ответ: $E(y) = \left[\frac{\sqrt{15}}{2}; \sqrt{6}\right]$.

1.1.14. Ответ: $E(y) = \left[\frac{\sqrt{15}}{2}; \sqrt{6}\right]$.

1.1.15. Решение. Так как $\cos x$ и $\cos 2x$ по абсолютной величине не превосходят единицу, то функция определена при любых значениях x . Имеем $y = \sqrt{1,5 + \cos x - \cos^2 x + 0,5} = \sqrt{2 + \cos x - \cos^2 x}$. Пусть $\cos x = t$, $(-1 \leq t \leq 1)$, тогда следует найти наибольшее и наименьшее значение функции

$y = \sqrt{2 + t - t^2}$ на отрезке $[-1; 1]$. Выделим полный квадрат: $y = \sqrt{\frac{9}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2}$.

Отсюда $y_{\max} = \frac{3}{2}$ при $t = \frac{1}{2}$. Найдем значения функции на концах отрезка $y(-1) = \sqrt{2 - 1 - 1^2} = 0$, $y(1) = \sqrt{2 + 1 - 1^2} = \sqrt{2}$. Следовательно, $y_{\min} = 0$. Тогда $E(y) = [0; 1,5]$ – множество значений функции.

Ответ: $E(y) = [0; 1,5]$.

1.1.16. Ответ: $E(y) = \left[\frac{\sqrt{19}}{2}; \sqrt{6}\right]$.

1.4.17. Решение. Способ 1. Преобразуем данную функцию:

$$y = 3\sin^2 x + 2\sin 2x + 6\cos^2 x = \sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 4\cos^2 x + 2 = (\sin x + 2\cos x)^2 + 2.$$

Учитывая, что период функции $y(x)$ $T = \pi$ (так как $y(x + \pi) = (\sin(x + \pi) + 2\cos(x + \pi))^2 + 2 = (-\sin x - 2\cos x)^2 + 2 = (\sin x + 2\cos x)^2 + 2 = y(x)$), найдем ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[0; \pi]$:

$$y'(x) = 2(\sin x + 2\cos x)(\cos x - 2\sin x) \Rightarrow$$

$$(2(\sin x + 2\cos x)(\cos x - 2\sin x) = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Вычислим значения функции $y(x)$ в точках 0 ; $\operatorname{arctg}(1/2)$; $\operatorname{arctg}(-2) + \pi$; π .

$y(0) = 6$; $y(\pi) = 6$. Используя формулы $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ и

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.4. Функции

учитывая, что в первой четверти $\sin x \geq 0$ и $\cos x \geq 0$, находим $y(\arctg(1/2))=7$.
 $y(\arctg(-2)+\pi)=2$, т.к. $\sin x \geq 0$ и $\cos x \leq 0$ во второй четверти или учитывая, что: $(x = \arctg(-2) + \pi, n \in Z) \Leftrightarrow (\operatorname{tg} x = -2) \Leftrightarrow (\sin x + 2 \cos x = 0)$.

Следовательно: $\min y(x) = y(\arctg(-2) + \pi) = 2$; $\max y(x) = y(\arctg(1/2) + \pi k) = 7$.

Способ 2. Преобразуем данную функцию:

$$y = 3\sin^2 x + 2\sin 2x + 6\cos^2 x = \sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 4\cos^2 x + 2 = (\sin x + 2\cos x)^2 + 2 =$$

$$= 5 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{5}} \sin x \right)^2 + 2 = 5(\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha)^2 + 2 = 5 \cos^2(x - \alpha) + 2, \text{ где}$$

$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Учитывая, что $0 \leq \cos^2(x - \alpha) \leq 1$ получим, $2 \leq y(x) \leq 7$.

Следовательно: $\min y(x) = 2$; $\max y(x) = 7$.

Ответ: $\min y = 2$; $\max y = 7$.

1.4.18. *Ответ:* $\min y = 0,5$; $\max y = 5,5$.

1.4.19. *Решение.* *Способ 1.* Преобразуем данную функцию:

$$y = \sqrt{11 - \sin 2x - 4 \cos x - 4 \sin x} = \sqrt{12 - \cos^2 x - 2 \cos x \sin x - \sin^2 x - 4(\cos x + \sin x)} =$$

$$= \sqrt{12 - (\cos x + \sin x)^2 - 4(\cos x + \sin x)}$$

Введем обозначение:

$$t = \cos x + \sin x = \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Заметим, что $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Рассмотрим функцию $z(t) = 12 - t^2 - 4t$ и найдем ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$: $(z'(t) = -2t - 4) \Rightarrow (-2t - 4 = 0) \Rightarrow (t = -2 \notin [-\sqrt{2}; \sqrt{2}])$.

Вычисляя значения функции $z(t)$ на концах отрезка: $z(-\sqrt{2}) = 10 + 4\sqrt{2}$; $z(\sqrt{2}) = 10 - 4\sqrt{2}$, получим, что $\max z = z(-\sqrt{2}) = 10 + 4\sqrt{2}$; $\min z = z(\sqrt{2}) = 10 - 4\sqrt{2}$.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)$ равны:

$$\max y = \sqrt{z(-\sqrt{2})} = \sqrt{10 + 4\sqrt{2}}; \min y = \sqrt{z(\sqrt{2})} = \sqrt{10 - 4\sqrt{2}}.$$

Способ 2. Рассмотрим функцию: $z(x) = 11 - \sin 2x - 4 \cos x - 4 \sin x$.

Учитывая, что период функции $z(x)$ $T = 2\pi$, найдем ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[0; 2\pi]$:

$$z'(x) = -2 \cos 2x + 4 \sin x - 4 \cos x = 2(\sin^2 x - \cos^2 x) + 4(\sin x - \cos x) =$$

$$= 2(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + 2) \Rightarrow$$

$$(2(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + 2) = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \right).$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.4. Функции

Вычислим значения функции $z(x)$ в точках $0; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; 2\pi$:

$$z(0)=z(2\pi)=7; z\left(\frac{\pi}{4}\right)=10-4\sqrt{2}; z\left(\frac{5\pi}{4}\right)=10+4\sqrt{2}.$$

Тогда $\max z = 10 + 4\sqrt{2}$, $\min z = 10 - 4\sqrt{2}$.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)$ равны:

$$\max y = \sqrt{10 + 4\sqrt{2}}; \min y = \sqrt{10 - 4\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\max y = \sqrt{10 + 4\sqrt{2}}; \min y = \sqrt{10 - 4\sqrt{2}}$.

1.4.20. Ответ: $\min y = \sqrt{22 - 5\sqrt{2}}; \max y = \sqrt{22 + 5\sqrt{2}}$.

1.4.21. Решение. Способ 1. Найдем экстремумы функции $y(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{(2x-3)(x^2+1) - 2x(x^2-3x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 - 2x^3 + 6x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{3x^2 - 3}{(x^2+1)^2} = \frac{3(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow (x_{\min} = 1; x_{\max} = -1). \end{aligned}$$

Вычислим значения функции в точках экстремума: $y(-1) = \frac{5}{2}$, $y(1) = -\frac{1}{2}$.

Докажем, что $-\frac{1}{2} \leq y(x) \leq \frac{5}{2}$:

$$\begin{aligned} \left(y(x) \leq \frac{5}{2}\right) &\Leftrightarrow \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1} \leq \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow (2(x^2 - 3x + 1) \leq 5(x^2 + 1)) \Leftrightarrow (3x^2 + 6x + 3 \geq 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((x+1)^2 \geq 0, \forall x \in R) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(y(x) \geq -\frac{1}{2}\right) &\Leftrightarrow \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1} \geq -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (2(x^2 - 3x + 1) \geq -(x^2 + 1)) \Leftrightarrow (3x^2 - 6x + 3 \geq 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((x-1)^2 \geq 0, \forall x \in R) \end{aligned}$$

Способ 2. $\left(y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}\right) \Leftrightarrow (y(x^2 + 1) = x^2 - 3x + 1) \Leftrightarrow ((y-1)x^2 + 3x + (y-1) = 0)$.

Если $y=1$, то $x=0$. Пусть $y \neq 1$. Тогда уравнение относительно x имеет решение, если:

$$(D = 9 - 4(y-1)^2 = 5 + 8y - 4y^2 \geq 0) \Leftrightarrow ((2y+1)(2y-5) \leq 0) \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{5}{2}\right).$$

Ответ: $[-0,5; 2,5]$.

1.4.22. Ответ: $\left[0; \frac{4}{3}\right]$.

1.4.23. Решение. Наименьшее значение выражение $3 - \sqrt{4 - \sqrt{3x^2 + 4\sqrt{3} \cdot x + 4}}$ принимает в том случае, если значение выражения $\sqrt{4 - \sqrt{3x^2 + 4\sqrt{3} \cdot x + 4}}$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.4. Функции

или $4 - \sqrt{3x^2 + 4\sqrt{3} \cdot x + 4}$ является наибольшим. Это происходит тогда, когда выражение $\sqrt{3x^2 + 4\sqrt{3} \cdot x + 4}$ или $3x^2 + 4\sqrt{3} \cdot x + 4 = (\sqrt{3}x + 2)^2$ принимает наименьшее значение. Т. е., когда $(\sqrt{3}x + 2 = 0) \Leftrightarrow \left(x = -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. Следовательно, при $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ наименьшее значение выражения $3 - \sqrt{4 - \sqrt{3x^2 + 4\sqrt{3} \cdot x + 4}}$ равно $3 - \sqrt{4 - \sqrt{0}} = 3 - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$.

Ответ: 1, $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

1.4.24. *Ответ:* 1, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.4.25. *Ответ:* -2, $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

1.4.26. *Ответ:* 5, $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.5. Текстовые задачи

1.5.1. Решение. Пусть x, y, z – количество (в тоннах) колбасных изделий первого, второго и третьего сорта, соответственно, производимых мясокомбинатом за день. Тогда

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x + 3y + 8z = 30 \\ x + z = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x + z = 6 \\ 2x + 8z = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4,5 \\ y = 3 \\ z = 1,5 \end{cases}.$$

Ответ: 4,5 т, 3 т, 1,5 т.

1.5.2. Ответ: 5,5 т; 4 т; 2,5 т..

1.5.3. Решение. Пусть x, y, z – количество (в тоннах) орехов первого, второго и третьего сорта, соответственно, проданных магазином. Тогда

$$\begin{cases} x + y + z = 10,5 \\ 2x + 4y + 6z = 33 \\ xz = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 10,5 \\ 2y + 4z = 12 \\ xz = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4,5 + z \\ y = 6 - 2z \\ (4,5 + z)z = (6 - 2z)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4,5 + z \\ y = 6 - 2z \\ 4z^2 - 24z + 36 = 4,5z + z^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4,5 + z \\ y = 6 - 2z \\ 3z^2 - 28,5z + 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4,5 + z \\ y = 6 - 2z \\ 2z^2 - 19z + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4,5 + z \\ y = 6 - 2z \\ z = \frac{19 \pm \sqrt{169}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4,5 + z \\ y = 6 - 2z \\ \begin{cases} z = 1,5 \\ z = 8 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \\ z = 1,5 \\ x = 12,5 \\ y = -10 \\ z = 8 \end{cases}$$

Решение (6; 3; 1,5) удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 6 т; 3 т; 1,5 т.

1.5.4. Ответ: 2 т; 1 т; 0,5 т.

1.5.5. Решение. Пусть x – число деталей в первом ящике, y – число деталей во втором ящике. По условию задачи x, y – целые неотрицательные числа, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} x + y > 29 \\ x - 2 > 3y \\ 3x - 2y < 60 \end{cases}$$

Решим систему аналитическим и графическим способом.

Система представляет собой систему линейных неравенств с двумя переменными. Будем для её решения использовать свойство транзитивности: если $a > b$, а $b > c$, то $a > c$.

$$\begin{cases} x > 29 - y \\ x > 3y + 2 \\ x < \frac{60 + 2y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{60 + 2y}{3} > 29 - y \\ \frac{60 + 2y}{3} > 3y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y > 27 \\ 7y < 54 \end{cases} \Leftrightarrow \left(5\frac{2}{5} < y < 7\frac{5}{7} \right).$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.5. Текстовые задачи

Следовательно, $y \in \left(5\frac{2}{5}; 7\frac{5}{7}\right)$. Но на множестве $\left(5\frac{2}{5}; 7\frac{5}{7}\right)$ содержится только два целых числа: 6 и 7. Если $y=6$, то получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x > 23 \\ x > 20 \Leftrightarrow (23 < y < 24), \\ x < 24 \end{cases}$$

которая не имеет решений в целых числах. Если $y=7$, то система примет вид:

$$\begin{cases} x > 22 \\ x > 23 \Leftrightarrow \left(23 < x < 24\frac{2}{3}\right). \\ x < \frac{74}{3} \end{cases}$$

На множестве $\left(23; 24\frac{2}{3}\right)$ содержится только целое число $x=24$.

Окончательно получим: $x=24, y=7$.

Дадим геометрическую интерпретацию решений системы. Изобразим на координатной плоскости множество точек, которые удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} y > 29 - x \\ y < \frac{x - 2}{3} \\ y > \frac{3x - 60}{2} \end{cases}$$

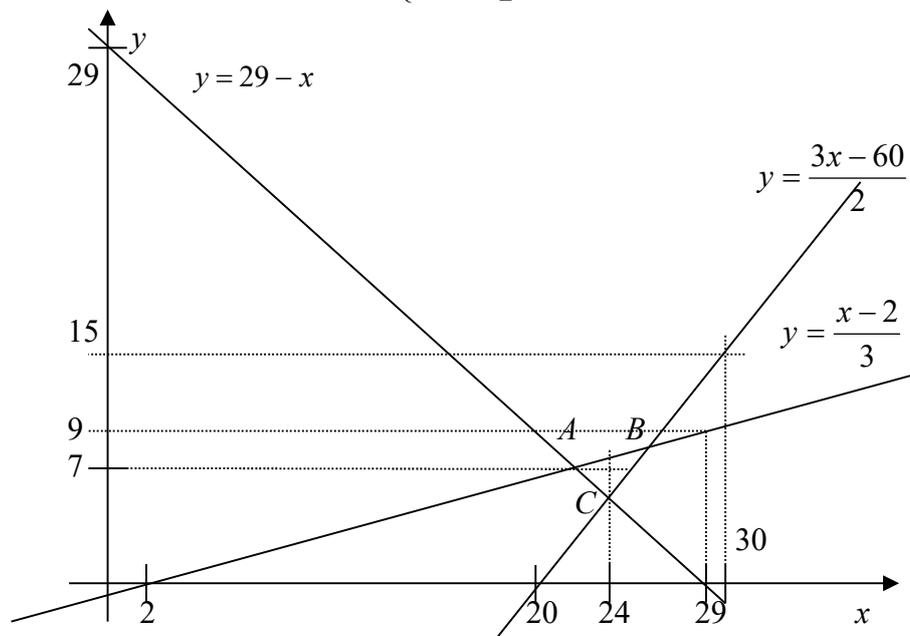


Рис. 15

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.5. Текстовые задачи

Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе, есть множество точек плоскости, расположенных внутри $\triangle ABC$. Из этого множества нужно отобрать те, координаты которых целые числа.

Найдем координаты точек A, B, C , для чего решаем следующие системы:

$$\begin{cases} x + y = 29 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow A \left(\frac{89}{4}; \frac{27}{4} \right); \begin{cases} 3x - 2y = 60 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow B \left(\frac{176}{7}; \frac{54}{7} \right); \begin{cases} x + y = 29 \\ 3x - 2y = 60 \end{cases} \Rightarrow C \left(\frac{118}{5}; \frac{27}{5} \right).$$

Для точек в пределах $\triangle ABC$ должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} \frac{89}{4} < x < \frac{176}{7} \\ \frac{27}{5} < y < \frac{54}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22\frac{1}{4} < x < 25\frac{1}{7} \\ 5\frac{2}{5} < y < 7\frac{5}{7} \end{cases}.$$

Этой системе неравенств удовлетворяют следующие точки с целыми координатами: (23; 6), (23; 7), (24; 6), (24; 7), (25; 6), (25; 7). Внутри $\triangle ABC$ находится единственная точка (24; 7) с целыми координатами.

Ответ: $x=24, y=7$.

1.5.6. *Ответ:* В первой бригаде – 11 человек, во второй бригаде – 17 человек.

1.5.7. Решение. Пусть x - число деталей, изготовленных за смену первой бригадой; y - число деталей, изготовленных за смену второй бригадой.

Тогда

$$\begin{cases} x = 1,15y \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{7}y < 1000 \\ \frac{1}{3}x + \frac{6}{7}y > 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{20}y \\ \frac{23}{30}y + \frac{1}{7}y < 1000 \\ \frac{23}{60}y + \frac{6}{7}y > 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{20}y \\ \frac{161+30}{210}y < 1000 \\ \frac{161+360}{420}y > 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{20}y \\ \frac{191}{210}y < 1000 \\ \frac{521}{420}y > 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{20}y \\ \frac{420000}{521} < y < \frac{210000}{191} \\ 806\frac{74}{521} < y < 1099\frac{91}{191} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{20}y \\ 807 \leq y \leq 1099 \end{cases}$$

По условию задачи y натуральное число, которое делится нацело на 7 и 20, а, следовательно, и на 140. На отрезке $[807; 1099]$ таких чисел два: 840 и 980. Если $y=840$, то $x = \frac{23}{20}y = 23 \cdot 42 = 966$. Если $y=980$, то $x = \frac{23}{20}y = 23 \cdot 49 = 1127$.

Заметим, что x делится нацело на 3 и 23, а поэтому делится и на 69. Но 1127 не делится на 69, так как не делится на 3. Отсюда заключаем, что $x=966$ и $y=840$, которые удовлетворяют условиям задачи.

Заметим, что аналогично, можно получить границы для x из системы:

$$\begin{cases} y = \frac{20}{23}x \\ \frac{420000}{521} < y < \frac{210000}{191} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{20}{23}x \\ \frac{23 \cdot 210000}{521} < x < \frac{23 \cdot 10500}{191} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{20}{23}x \\ \frac{23 \cdot 21000}{521} < x < \frac{23 \cdot 10500}{191} \end{cases} \Leftrightarrow$$

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.5. Текстовые задачи

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{20}{23}x \\ \frac{483000}{521} < x < \frac{241500}{191} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{20}{23}x \\ 927 \frac{33}{521} < x < 1264 \frac{76}{191} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{20}{23}x \\ 928 \leq x \leq 1264 \end{cases}.$$

Тогда, по условию задачи, x натуральное число, которое делится нацело на 3 и 23, а, следовательно, и на 69. На отрезке $[928; 1264]$ таких чисел пять: 966, 1035, 1104, 1173, 1242, каждому из которых соответствует возможное значение y : 840, 900, 960, 1020, 1080. Но среди этих значений только одно делится на 140. Откуда заключаем, что решение задачи: $x = 966$ и $y = 840$.

Ответ: 966 дет.; 840 дет.

1.5.8. *Ответ: 900 машин выпускал первый завод, 855 машин – второй.*

1.5.9. *Решение.* Пусть x – стоимость 1 кг лука, y – стоимость 1 кг картофеля, z – стоимость 1 кг огурцов. Тогда

$$\begin{cases} 0,5x + 3y + z = 20500 \\ 2x + 4z = 46000 \end{cases}.$$

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} 0,5x + 3y + z = 20500 \\ 2x + 4z = 46000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5x + 3y + z = 20500 \\ x = 23000 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5(23000 - 2z) + 3y + z = 20500 \\ x = 23000 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 9000 \\ x = 23000 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3000 \\ x = 23000 - 2z \end{cases}.$$

Учитывая последнюю систему, получим:

$$x + 2y + 2z = (23000 - 2z) + 2 \cdot 3000 + 2z = 29000, \text{ что и требовалось найти.}$$

Ответ: 29000 руб.

1.5.10. *Ответ: 60 кг.*

1.5.11. *Решение.* Пусть x – время, затраченное на 1 км пути пешком, y – время, затраченное на 1 км пути верхом, z – время, затраченное на 1 км пути на велосипеде. Тогда

$$\begin{cases} 3x + 7y + 2z = 95 \\ x + 2y + z = 31 \end{cases}.$$

Умножим, обе части второго уравнения системы на 4. Тогда получим:

$$\begin{cases} 3x + 7y + 2z = 95 \\ 4x + 8y + 4z = 124 \end{cases}.$$

Вычитая из левой и правой частей второго уравнения системы соответствующие части первого уравнения, имеем $x + y + 2z = 29$, что и требовалось найти.

Ответ: 29 мин.

1.5.12. *Ответ: 272000 рублей.*

1.5.13. *Решение.* Пусть n – количество студентов первоначально, участвовавших в покупке магнитофона, x – сумма, которую планировал внести каждый из них. Тогда

$$\begin{cases} 170 \leq nx \leq 195 \\ nx = (n-2)(x+1) \end{cases}$$

Произведем преобразования для этой системы:

$$\begin{cases} 170 \leq nx \leq 195 \\ nx = nx - 2x + n - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 170 \leq nx \leq 195 \\ 2x = n - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 170 \leq nx \leq 195 \\ x = \frac{n-2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 170 \leq n \cdot \frac{n-2}{2} \leq 195 \\ x = \frac{n-2}{2} \end{cases}$$

Следовательно, для целых n должна выполняться система неравенств:

$$\begin{cases} 170 \leq n \cdot \frac{n-2}{2} \\ n \cdot \frac{n-2}{2} \leq 195 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - 2n - 340 \geq 0 \\ n^2 - 2n - 390 \leq 0 \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{cases} n \geq \frac{2 + \sqrt{4 + 4 \cdot 340}}{2} = \frac{2 + \sqrt{1364}}{2} > \frac{2 + \sqrt{1296}}{2} = \frac{2 + 36}{2} = 19 \\ n \leq \frac{2 + \sqrt{4 + 4 \cdot 390}}{2} = \frac{2 + \sqrt{1564}}{2} < \frac{2 + \sqrt{1600}}{2} = \frac{2 + 40}{2} = 21 \end{cases} \Rightarrow (19 < n < 21) \Rightarrow (n = 20)$$

Тогда стоимость магнитофона:

$$nx = n \cdot \frac{n-2}{2} = \frac{20 \cdot 18}{2} = 180 \text{ (руб.)}$$

Ответ: 180 руб.

1.5.14. *Ответ:* 2,5 т.

1.5.15. *Ответ:* 3 т.

1.5.16. *Решение.* Пусть t_1 – время движения из A в B первого поезда; t_2 – время движения из B в A второго поезда; S – расстояние между пунктами A и B . Так как первый поезд пройдет расстояние $\frac{S}{2}$ за $\frac{t_1}{2}$ часов, а второй – за

$\left(\frac{t_1}{2} - \frac{1}{2}\right)$ часов, то приходим к системе:

$$\begin{cases} 2 \cdot \frac{S}{t_1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{S}{t_2} = \frac{11}{30} S \\ \frac{t_1}{2} \cdot \frac{S}{t_1} = \left(\frac{t_1}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{S}{t_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{t_1} + \frac{3}{2t_2} = \frac{11}{30} \\ t_2 = t_1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{t_1} + \frac{3}{2(t_1-1)} - \frac{11}{30} = 0 \\ t_2 = t_1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-11t_1^2 + 116t_1 - 60}{30t_1(t_1-1)} = 0 \\ t_2 = t_1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11t_1^2 - 116t_1 + 60 = 0 \\ t_2 = t_1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (11t_1 - 6)(t_1 - 10) = 0 \\ t_2 = t_1 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 10 \\ t_2 = 9 \end{cases}$$

Ответ: 10 часов, 9 часов.

1.5.17. *Ответ:* 60 км в час; 40 км в час.

1.5.18. *Решение.* Пусть t_1 – время в пути из A в B первого пешехода; t_2 – время в пути из B в A второго пешехода; S – расстояние между пунктами A и B . Тогда:

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.5. Текстовые задачи

$$\begin{cases} 30 \cdot \frac{S}{t_1} + 30 \cdot \frac{S}{t_2} = S \\ t_2 = t_1 + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{30(t_1 + t_2)}{t_1 t_2} = 1 \\ t_2 = t_1 + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{30(2t_1 + 11)}{t_1(t_1 + 11)} = 1 \\ t_2 = t_1 + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^2 - 49t_1 - 330 = 0 \\ t_2 = t_1 + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (t_1 + 6)(t_1 - 55) = 0 \\ t_2 = t_1 + 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 55 \\ t_2 = 66 \end{cases}$$

Ответ: 55 минут, 66 минут.

1.5.19. *Ответ:* 3 часа.

1.5.20. *Решение.* Пусть первого слитка надо взять x кг, а второго – y кг, тогда вес нового слитка: $x+y=8$. Так как в первом содержание меди 40%, то x кг сплава первого слитка содержит $(x \cdot 0,4)$ кг меди; аналогично y кг сплава второго слитка будет содержать $(y \cdot 0,3)$ кг меди. В новом сплаве весом $(x+y)$ кг должно содержаться 32% меди, следовательно: $(x+y) \cdot 0,32 = 0,4x + 0,3y$. Таким образом,

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ (x + y) \cdot 0,32 = 0,4x + 0,3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ 0,08x - 0,02y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ y = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,6 \\ y = 6,4 \end{cases}$$

Ответ: 1,6 кг, 6,4 кг.

1.5.21. *Ответ:* 3:1.

1.5.22. *Решение.* Пусть x л. – кислоты содержится в первом растворе, а y л. – во втором. Тогда

$$\begin{cases} \frac{x + y}{4 + 6} = \frac{35}{100} \\ \frac{x + 4 \cdot \frac{y}{6}}{4 + 4} = \frac{36}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ x + \frac{2y}{3} = \frac{72}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ 75x + 50y = 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 150x + 150y = 525 \\ 150x + 100y = 432 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 - 2y}{2} \\ 50y = 93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{41}{25} \\ y = \frac{93}{50} \end{cases}$$

Ответ: 1,64 л.; 1,86 л.

1.5.23. *Ответ:* 1 кг; 2 кг.

1.5.24. *Решение.* Пусть t_1 – время, за которое первая труба, действуя отдельно, наполняет бассейн; t_2 – время, за которое вторая труба, действуя отдельно, наполняет бассейн; V – объем бассейна. Тогда:

$$\begin{cases} 6 \left(\frac{V}{t_1} + \frac{V}{t_2} \right) = V \\ t_2 = t_1 + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) = 1 \\ t_2 = t_1 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6(t_1 + t_2)}{t_1 t_2} = 1 \\ t_2 = t_1 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1(t_1 + 5) = 6(2t_1 + 5) \\ t_2 = t_1 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^2 - 7t_1 - 30 = 0 \\ t_2 = t_1 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (t_1 + 3)(t_1 - 10) = 0 \\ t_2 = t_1 + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 10 \\ t_2 = 15 \end{cases}$$

Ответ: 10 часов, 15 часов.

1.5.25. Ответ: 5 часов.

1.5.26. Решение. Пусть x – количество дней необходимых только первому для выполнения задания; y – количество дней необходимых второму мастеру для выполнения задания. Тогда $x > 0$, $y > 0$. Примем величину работы (в данном случае это выполнение некоторого задания) за единицу.

Следовательно, $\frac{1}{x}$ – производительность первого мастера (его дневная выработка), $\frac{1}{y}$ – производительность второго мастера. При совместной

работе мастеров выполняется $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ часть работы за день. Так как всё

задание выполняется ими за 30 дней, то $30\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$. За 6 дней совместной

работы мастера выполнят $6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ часть задания, оставшуюся же часть

работы выполняет один из мастеров, скажем, первый, работая отдельно, за 40 дней.

$$\text{Значит, } 6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{40}{x} = 1.$$

Таким образом, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 30\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \\ 6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{40}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{30}{x} + \frac{30}{y} = 1 \\ \frac{46}{x} + \frac{6}{y} = 1 \end{cases}.$$

Выполняя элементарные преобразования, получим

$$\begin{cases} 30x + 30y = xy \\ 6x + 46y = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x + 30y = 6x + 46y \\ 30x + 30y = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1,5x \\ 30x + 45x = 1,5x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1,5x \\ 3x(x - 50) = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 75 \end{cases}$$

Ответ: 50 дней, 75 дней.

1.5.27. Ответ: 6 часов, 18 часов.

1.5.28. Решение. Пусть x_i – производительность i -го рабочего, y – объём работы. Тогда по условию задачи

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{y}{7,5}; \quad x_1 + x_3 + x_5 = \frac{y}{5}; \quad x_1 + x_3 + x_4 = \frac{y}{6}; \quad x_2 + x_4 + x_5 = \frac{y}{4}.$$

Умножив последнее уравнение на 2, и сложив затем все четыре уравнения, получаем:

$$3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = y \cdot \left(\frac{1}{7,5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{y}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} = 3.$$

Ответ: за 3 часа.

1.5.29. *Ответ: 11 испарителей.*

1.5.30. *Решение.* Пусть x , y и z - производительность станков, V - объём работы. По условию, $\frac{V}{y+z}$ - время работы первого станка, $\frac{V}{x+z}$ - второго, $\frac{V}{x+y}$ - третьего. Отсюда

$$\frac{Vx}{y+z} + \frac{Vy}{x+z} + \frac{Vz}{x+y} = V \Rightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 1.$$

Далее, $\frac{V}{x+y+z}$ - время, за которое была выполнена работа при одновременной работе всех трёх станков. По условию, необходимо определить следующую величину t :

$$t = \frac{\frac{V}{x+y} + \frac{V}{x+z} + \frac{V}{z+y}}{\frac{V}{x+y+z}} = \frac{x+y+z}{x+y} + \frac{x+y+z}{x+z} + \frac{x+y+z}{y+z} =$$

$$= \left(1 + \frac{z}{x+y}\right) + \left(1 + \frac{y}{x+z}\right) + \left(1 + \frac{z}{y+z}\right) = 3 + \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}\right) = 4.$$

Ответ: в 4 раза.

1.5.31. *Ответ: рабочих было 20 чел., в день они работали 6 часов.*

1.5.32. *Решение.* Пусть x и y - скорости движения (число ступенек в минуту) второго человека по неподвижному эскалатору и эскалатора соответственно, z - расстояние (в ступеньках), которое надо пройти по неподвижному эскалатору. Тогда $\frac{z}{2x+y}$ и $\frac{z}{x+y}$ - время спуска первого и второго (по движущемуся эскалатору). По условию, за время спуска первого “ушло” $z - 60$ ступенек. Откуда $\frac{z}{2x+y} \cdot y = z - 60$. Аналогично,

$\frac{z}{x+y} \cdot y = z - 40$. Итак,

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{30 \cdot (2x+y)}{x} \\ z &= \frac{40 \cdot (x+y)}{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} z &= 60 + 30 \cdot \frac{y}{x} \\ z &= 40 + 40 \cdot \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = 120.$$

Ответ: 120 ступенек.

1.5.33. *Ответ: $5 + 5\sqrt{2}$ км.*

1.5.34. *Решение.* Пусть v_1 , v_2 - скорости первого и второго автомобиля соответственно, а S - расстояние между пунктами A и B . Тогда по условию задачи:

$$\begin{cases} S = \left(\frac{S}{v_1 + v_2} - 56 \right) \cdot (2v_1 + v_2) \\ S = \left(\frac{S}{v_1 + v_2} - 65 \right) \cdot (v_1 + 2v_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{S(2v_1 + v_2)}{v_1 + v_2} - S = 56(2v_1 + v_2) \\ \frac{S(v_1 + 2v_2)}{v_1 + v_2} - S = 65(v_1 + 2v_2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{Sv_1}{v_1 + v_2} = 112v_1 + 56v_2 \\ \frac{Sv_2}{v_1 + v_2} = 65v_1 + 130v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{S}{v_1 + v_2} = 112 + 56 \cdot \frac{v_2}{v_1} \\ \frac{S}{v_1 + v_2} = 65 \cdot \frac{v_1}{v_2} + 130 \end{cases}.$$

Отсюда

$$\left(112 + 56 \frac{v_2}{v_1} = \frac{65}{\frac{v_2}{v_1}} + 130 \right) \Leftrightarrow \left(56 \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 - 18 \frac{v_2}{v_1} - 65 = 0 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{v_2}{v_1} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 + 4 \cdot 56 \cdot 65}}{112} = \frac{18 \pm 122}{112} \right) \Rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1} = \frac{140}{112} = \frac{5}{4} \right).$$

Следовательно, $\frac{S}{2v_1 + 2v_2} = 56 + 28 \cdot \frac{v_2}{v_1} = 56 + 28 \cdot \frac{5}{4} = 56 + 35 = 91$ мин.

Поэтому встреча автомобилей в том случае, когда скорость обоих была бы удвоенной, произойдет раньше на 91 минуту, чем 12 часов дня, т. е. в 10 часов 29 минут.

Ответ: в 10 часов 29 минут.

1.5.35. *Ответ: 8 км.*

1.5.36. Решение. Пусть вместимость бутылки равна x . Первоначально соль составляла $0,12x$. После того, как отлили 1 л, соль составляла уже $0,12 \cdot (x-1)$, т.е. $\frac{0,12 \cdot (x-1)}{x}$ часть начального объёма. После того, как отлили

ещё 1 л, соль стала занимать уже $\frac{0,12 \cdot (x-1)^2}{x}$, а как долили 1 л воды, то

$\frac{0,12 \cdot (x-1)^2}{x^2}$ часть начального объёма и это составляет 3%.

Отсюда $\frac{0,12 \cdot (x-1)^2}{x^2} = 0,03 \Rightarrow x = 2$ л.

Ответ: 2 л.

1.5.37. *Ответ: 10 литров.*

1.5.38. Решение. Пусть первоначально из первого сосуда отливают x л кислоты. После того, как дольют воды во второй сосуд, концентрация кислоты там станет $\frac{x}{20}$. Из второго сосуда отливают x л смеси (т.е.

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.5. Текстовые задачи

$x \cdot \frac{x}{20} = \frac{x^2}{20}$ кислоты) и доливают первый сосуд; в нём станет кислоты $20 - x + \frac{x^2}{20}$. Концентрация её в первом сосуде станет $\frac{1}{20} \cdot \left(20 - x + \frac{x^2}{20}\right)$. Во

втором сосуде кислоты будет $x - \frac{x^2}{20}$. Из первого сосуда отливают $6\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$ л смеси, т.е. $\frac{20}{3} \cdot \frac{1}{20} \cdot \left(20 - x + \frac{x^2}{20}\right)$ л кислоты и доливают ею второй

сосуд. Так как кислоты теперь в обоих сосудах одинаково, то имеем

$$20 - x + \frac{x^2}{20} - \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{20} \cdot \left(20 - x + \frac{x^2}{20}\right) = x - \frac{x^2}{20} + \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{20} \cdot \left(20 - x + \frac{x^2}{20}\right).$$

Решая это уравнение, получим $x = 10$.

Ответ: 10 л.

1.5.39. *Ответ:* в первом сосуде было 20 л спирта, во втором - 10 л.

1.5.40. *Решение.* Пусть n – первоначальное число участников, x – первоначальная стоимость для одного человека. Тогда

$$\begin{cases} 70 < n \cdot x \leq 75 \\ n \cdot x = (n - 2) \cdot (x + 3) \\ n \in N \end{cases}$$

Из второго условия выразим $x = \frac{3n - 6}{2}$ и подставим в первое условие:

$$140 < 3n^2 - 6n \leq 150, \text{ т.е. } 143 < 3 \cdot (n - 1)^2 \leq 153; \text{ т.е. } 47\frac{2}{3} < (n - 1)^2 \leq 51.$$

Так как $(n - 1)^2$ – натуральное число, то, очевидно $(n - 1)^2 = 49$. Следовательно, $n = 8$, $n = 8$. Тогда $x = 9$.

Ответ: 9 руб.

1.5.41. *Ответ:* 159 журналов.

1.5.42. *Ответ:* 1750 т.

1.5.43. *Решение.* Пусть S – расстояние между пунктами A и B , а v_1 , v_2 , v_3 – скорости пассажирского, скорого и товарного поездов соответственно. Тогда

$$\begin{cases} 4v_1 + 4v_2 = S \\ \frac{S}{v_3} - \frac{S}{v_2} = 7 \\ v_1 = 1,5v_3 \end{cases}.$$

Так как $v_1 = 1,5v_3$, то приходим к системе

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.5. Текстовые задачи

$$\begin{cases} 6v_3 + 4v_2 = S \\ \frac{S}{v_3} - \frac{S}{v_2} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\frac{v_3}{S} + 4\frac{v_2}{S} = 1 \\ \frac{S}{v_3} - \frac{S}{v_2} = 7 \end{cases}.$$

Заметим, что $t_2 = \frac{S}{v_2}$, $t_3 = \frac{S}{v_3}$ – время в пути из города B в город A скорого и

товарного поездов соответственно. Тогда имеем:

$$\begin{cases} \frac{6}{t_3} + \frac{4}{t_2} = 1 \\ t_3 - t_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{t_3} + \frac{4}{t_3 - 7} = 1 \\ t_2 = t_3 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6t_3 - 42 + 4t_3 - t_3^2 + 7t_3}{t_3(t_3 - 7)} = 0 \\ t_2 = t_3 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t_3^2 - 17t_3 + 42}{t_3(t_3 - 7)} = 0 \\ t_2 = t_3 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(t_3 - 14)(t_3 - 3)}{t_3(t_3 - 7)} = 0 \\ t_2 = t_3 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_3 = 14 \\ t_3 = 3 \\ t_2 = t_3 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = 7 \\ t_3 = 14 \\ t_2 = -4 \\ t_3 = 3 \end{cases}.$$

Очевидно, что только $t_2 = 7$, $t_3 = 14$ удовлетворяют условиям задачи.

Заметим, что так как $v_1 = 1,5v_3$, то время в пути пассажирского поезда:

$$t_1 = \frac{S}{v_1} = \frac{S}{1,5v_3} = \frac{2}{3}t_3 = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3} = 9 \text{ часов } 20 \text{ минут}.$$

Ответ: 14 часов.

1.5.44. *Ответ:* 15 часов.

1.5.45. *Решение.* Пусть S – расстояние между пунктами A и B , а v_1 , v_2 – скорости машины и мотоцикла соответственно. Тогда

$$\begin{cases} \frac{S}{v_1} - \frac{S}{v_2} = 1 \\ 6v_2 = S + 6v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{S}{v_1} - \frac{S}{v_2} = 1 \\ 6\frac{v_2}{S} = 1 + 6\frac{v_1}{S} \end{cases}.$$

$t_1 = \frac{S}{v_1}$, $t_2 = \frac{S}{v_2}$ – время в пути из пункта A в пункт B машины и мотоцикла

соответственно. Тогда получим систему:

$$\begin{cases} t_1 - t_2 = 1 \\ \frac{6}{t_2} - \frac{6}{t_1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 + 1 \\ \frac{6}{t_2} - \frac{6}{t_2 + 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 + 1 \\ \frac{6t_2 + 6 - 6t_2 - t_2^2 - t_2}{t_2(t_2 + 1)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 + 1 \\ \frac{t_2^2 + t_2 - 6}{t_2(t_2 + 1)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 + 1 \\ \frac{(t_2 - 2)(t_2 + 3)}{t_2(t_2 + 1)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 2 \\ t_1 = -2 \\ t_2 = -3 \end{cases}.$$

Очевидно, что только $t_1 = 3$, $t_2 = 2$ удовлетворяют условиям задачи.

Ответ: 2 часа.

1.5.46. *Ответ: 13 часов 30 минут.*

1.5.47. Решение. Пусть было куплено x – бубликов, y – булок, z – слоек. По условию x, y, z – неотрицательные целые числа. Тогда математическую модель задачи можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} x + y + z = 15 \\ 60x + 70y + 80z = 1000 \\ x, y, z \leq 7 \\ y > 4 \\ x, y, z \in N \cup \{0\} \end{cases} .$$

Упрощая второе уравнение системы, получим уравнение $6x + 7y + 8z = 100$. Выражая x из первого уравнения системы и подставляя во второе уравнение системы, приходим к системе:

$$\begin{cases} x = 15 - y - z \\ 6(15 - y - z) + 7y + 8z = 100 \\ x, y, z \leq 7 \\ y > 4 \\ x, y, z \in N \cup \{0\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 - y - z \\ y + 2z = 10 \\ x, y, z \leq 7 \\ y > 4 \\ x, y, z \in N \cup \{0\} \end{cases} .$$

Откуда следует, что $y = 10 - 2z$ и имеет место неравенство $4 < y \leq 7$. Поэтому $(4 < 10 - 2z \leq 7) \Leftrightarrow (-6 < -2z \leq -3) \Leftrightarrow (1,5 \leq z < 3)$. Учитывая целочисленность переменных, получаем, что $z = 2$. Следовательно,

$$\begin{cases} x = 15 - y - z \\ y = 10 - 2z \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 6 \\ z = 2 \end{cases} .$$

Легко проверить, что указанные значения переменных удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 7 бубликов, 6 булок, 2 слойки.

1.5.48. *Ответ: 4 пирожка, 5 бубликов, 5 коржиков.*

1.5.49. *Ответ: 6 оценок “3”, 8 оценок “4”, 11 оценок “5”.*

1.5.50. *Ответ: 37 порций 1-го сорта; 40 порций 2-го сорта; 43 порции 3-го сорта.*

1.5.51. Решение. Пусть S – величина исходного вклада, $p = \frac{\alpha}{100}$ – ежемесячная процентная ставка, где $\alpha\%$ – проценты начисляемые банком. Заметим, что накопленная сумма определяется соотношением $S(1+p)^n$, где n – количество периодов начисления процентов. Тогда согласно условию задачи имеет место следующая система:

Глава 2. Решения, указания, ответы 2.5. Текстовые задачи

$$\begin{cases} S(1+p)^{12} = S + 900 \\ (S(1+p)^6 - 400)(1+p)^6 = 2000 \end{cases}$$

Введя обозначение $x = (1+p)^6 > 1$, получим систему, которую решим методом подстановки:

$$\begin{aligned} \begin{cases} Sx^2 = S + 900 \\ (Sx - 400)x = 2000 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} S(x^2 - 1) = 900 \\ (Sx - 400)x = 2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{900}{x^2 - 1} \\ \left(\frac{900x}{x^2 - 1} - 400\right)x = 2000 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{900}{x^2 - 1} \\ \left(\frac{9x}{x^2 - 1} - 4\right)x = 20 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{900}{x^2 - 1} \\ \left(\frac{9x - 4x^2 + 4}{x^2 - 1}\right)x = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{900}{x^2 - 1} \\ (9x - 4x^2 + 4)x = 20(x^2 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{900}{x^2 - 1} \\ 9x^2 - 4x^3 + 4x = 20x^2 - 20 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{900}{x^2 - 1} \\ 4x^3 + 11x^2 - 4x - 20 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Разлагая левую часть уравнения на множители, получим:
 $(4x^3 + 11x^2 - 4x - 20 = 0) \Leftrightarrow (4x^3 + 8x^2 + 3x^2 + 6x - 10x - 20 = 0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow ((x+2)(4x^2 + 3x - 10) = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 3x - 10 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{-3 \pm 13}{8} \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Условию задачи удовлетворяет только $x = \frac{5}{4}$. Откуда заключаем, что

величина исходного вклада равна:

$$S = \frac{900}{x^2 - 1} = \frac{900}{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1} = \frac{900}{\frac{25}{16} - 1} = \frac{900}{\frac{9}{16}} = \frac{900 \cdot 16}{9} = 1600 \text{ рублей.}$$

Ответ: 1600 руб.

1.5.52. Ответ: 100 долларов.

1.5.53. Ответ: 100 долларов.

1.5.54. Ответ: 900 долларов.

Учебное издание

**Махнист Леонид Петрович,
Рубанов Владимир Степанович,
Сидоревич Михаил Павлович**

МАТЕМАТИКА

**Избранные задачи вступительных экзаменов по математике
в Брестский государственный технический университет
в 1995-2000 г. г.**

Редактор *Т.В. Строкач*

Ответственный за выпуск *В.С. Рубанов*

Компьютерный набор *Л.П. Махнист*

Технический редактор: **Никитчик А.Д.**

Подписано в печать 26.01.2001. Формат 60x84 1/16.
Бумага писч. Усл. п. л. 5,8. Уч. изд. л. 6,25. Тираж 50 экз.
Заказ № 104.

Отпечатано на ризографе Брестского государственного технического университета.
224017, Брест, ул. Московская, 267.