УДК 551.461 (476)

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СРЕДНИХ ГОДОВЫХ УРОВНЕЙ ВОДЫ ОЗЕРА НАРОЧЬ

Александр Александрович Волчек,
д.г.н., декан факультета инженерных систем и экологии
УО «Брестский государственный
технический университет»
E-mail: volchak@tut.by
Иван Иосифович Кирвель,
д.г.н., профессор
Академия Поморска
E-mail: kirviel@yandex.by
Адам Хоиньски,
д.г.н., профессор
Институт физической географии
и формирования природной среды
E-mail: choinski@amu.edu.pl
Сергей Иванович Парфомук,
к.т.н., заведующий кафедрой информатики и прикладной математики
УО «Брестский государственный
технический университет»
E-mail: parfom@mail.ru

Аннотация: Данные по уровням озера Нарочь разложены на 3 составляющие: полиномиальную регрессию, периодическую составляющую синусоидального характера и остаточную последовательность независимых случайных величин. Выполнено моделирование траектории колебаний с применением детерминированной части, состоящей из регрессии 8-го порядка и периодической составляющей, а также случайной части, состоящей из независимых одинаково распределенных величин. Смоделированная траектория длиной 200 значений показала вероятность превышения максимального годового уровня, равную 1 %.

Ключевые слова: моделирование, уровень, траектория, колебания, озеро, Нарочь.

Введение

Нарочь – самое большое озеро в Беларуси, расположенное в северо-западной части страны на границе с Литвой. Основное направление рационального использования озера Нарочь состоит в повышении его рыбопродуктивности и рекреационная деятельность. Однако следует сказать, что развитие курортов, увеличение числа отдыхающих и туристов создают угрозу сохранения мезотрофного уровня системы озера. Данные многолетних исследований свидетельствуют, с одной стороны, об устойчивости Нарочанской экологической системы к антропогенному воздействию, а с другой – о некоторых признаках антропогенного эвтрофирования. Распашка земель, мелиорация заболоченных площадей, расширение населенных пунктов оказывает антропогенное влияние на озеро [2 – 5].

Целью настоящей работы является моделирование возможных колебаний средних годовых уровней воды озера.

Методика расчета

Если рассматривать колебания уровня озера в плоскости (приращение уровня), то исключается явная зависимость колебаний уровня от времени, т. к. исходные данные на плоскости представляются множеством точек [6]. Для этого множества точек можно построить выборочную регрессию, показывающую меру разброса экспериментальных точек вокруг некоторой функции *g(x)*, называемой регрессией. Чаще всего мера разброса для непрерывной на заданном отрезке функции *g(x)* определяется формулой

$$Q(g)=\sum_{j=1}^{n}\left(y_j-g(x_j)\right)^2, \tag{1}$$

где y_j – ордината; x_j – абсцисса экспериментальных наблюдений.

Теорема Вейерштрасса гласит, что любая непрерывная на конечном отрезке функция может быть приближена алгебраическим полиномом с любой заданной точностью, поэтому ее можно применять для анализа колебаний уровня воды с применением параметрической модели вида [6]:

$$\Delta H=\Phi(H)+\gamma(t), \tag{2}$$

где H – уровень водоема; ΔH – его приращения; $\gamma(t)$ – случайная возмущающая сила; $\Phi(H)$ – алгебраический полином, называемый автономной (не зависящей от времени) регрессией.

В автономное уравнение или систему автономных уравнений явно не входит независимая переменная (время), что означает, что закон изменения неизвестных функций, описываемых автономным уравнением или системой автономных уравнений, не меняется с течением времени [8]. Для проведения расчетов и последующего моделирования исходные данные наблюдений нормируются с помощью преобразования:

$$Z(t)=\frac{2H(t)-H_{\max}-H_{\min}}{H_{\max}-H_{\min}}, \tag{3}$$

где $Z(t)$ – нормированная величина уровня водоема; $H(t)$ – исходный уровень в момент времени $t=1,\ ...,\ N$; $H_{\max}=\max\limits_{1\le t\le N}H(t)$ – максимальный уровень; $H_{\min}=\min\limits_{1\le t\le N}H(t)$ – минимальный уровень водоема.

Метод построения параметрической регрессии основан на использовании следующей линейной относительно параметров дифференциально-разностной модели [1]:

$$Z(t+1)-Z(t)=\Phi(Z(t))+\gamma^{(k)}(t), \tag{4}$$

где $\gamma^{(k)}(t)$ – остаточная последовательность модели регрессии порядка *k*, а $\Phi(Z(t))$ определяется из соотношения:

$$\Phi(Z(t))=\sum_{i=0}^{k}a_iZ^i(t).$$

Будем предполагать, что эта последовательность имеет постоянное математическое ожидание и дисперсию, а ее значения некоррелированы. Оценки параметров a_i определяются из условия минимума функции *Q* методом наименьших квадратов:

$$Q(a_0,a_1,\ ...,\ a_k)=\sum_{t=1}^{N-1}\left[Z(t+1)-Z(t)-\sum_{i=0}^{k}a_iZ^i(t)\right]^2, \tag{5}$$

где k – степень полинома; N – число статистических данных наблюдений.

Функция $Q(a_0,a_1,\ ...,\ a_k)$ достигает минимума в точках, где производные по соответствующим переменным обращаются в ноль. Степень полинома k выбирается при условии стабилизации суммы квадратов остаточной последовательности.

При решении уравнения $\Phi(Z(t))=0$ получают равновесные положения уровня для нормированных данных, а соответствующие им равновесные абсолютные положения уровня при рассмотрении производной в полученных точках означают устойчивое (знак “–”) или неустойчивое (знак “+”) состояние [8]. Для наглядности движения идеальной точки под действием случайной вынуждающей силы рассматривают потенциал

$$U(H)=-\int\Phi(H)dH. \tag{7}$$

Минимумы потенциала соответствуют устойчивым состояниям равновесия, а максимумы – неустойчивым.

Для моделирования траектории исследуется остаточная последовательность. Если исследуемая функция $Y(t)$ есть сумма периодической функции $f_p(t)$ с периодом P_0 и шума $\varepsilon(t)$, то при наложении отрезков ряда Y_k длиной P_0 друг на друга выявляется вид периодической функции $f_p(t)$. Для этого необходимо свернуть временной ряд с периодом P_0 и рассмотреть фазовую диаграмму этого периода. Фазовая диаграмма представляет собой зависимость Y_k от X_k, где абсцисса X_k определяется следующим выражением [9]:

$$X_k = fr\left(\frac{t_k - t_*}{P_0}\right), k = 1, \ldots N, \tag{8}$$

где $fr(z)$ – дробная часть числа z; t_k – моменты времени наблюдений; t_* – произвольно выбранный момент времени.

Исходные данные и результаты исследований

В основу исследования положены материалы наблюдений за средними годовыми значениями уровней воды в озере Нарочь за 55-летний интервал – с 1956 по 2010 гг. Для проведения анализа имеющегося ряда данных наблюдений построен график колебаний уровня воды озера Нарочь на исследуемом интервале, изображенный на рис. 1. Для моделирования колебаний уровня во избежание ошибок при округлении в вычисления исходные данные были нормированы с помощью преобразования (3). При использовании для нормированных данных модели (4)–(5) были рассчитаны суммы квадратов остаточной последовательности $\gamma^{(k)}(t)$ для степени полинома k, равной числам от 3 до 10 включительно.

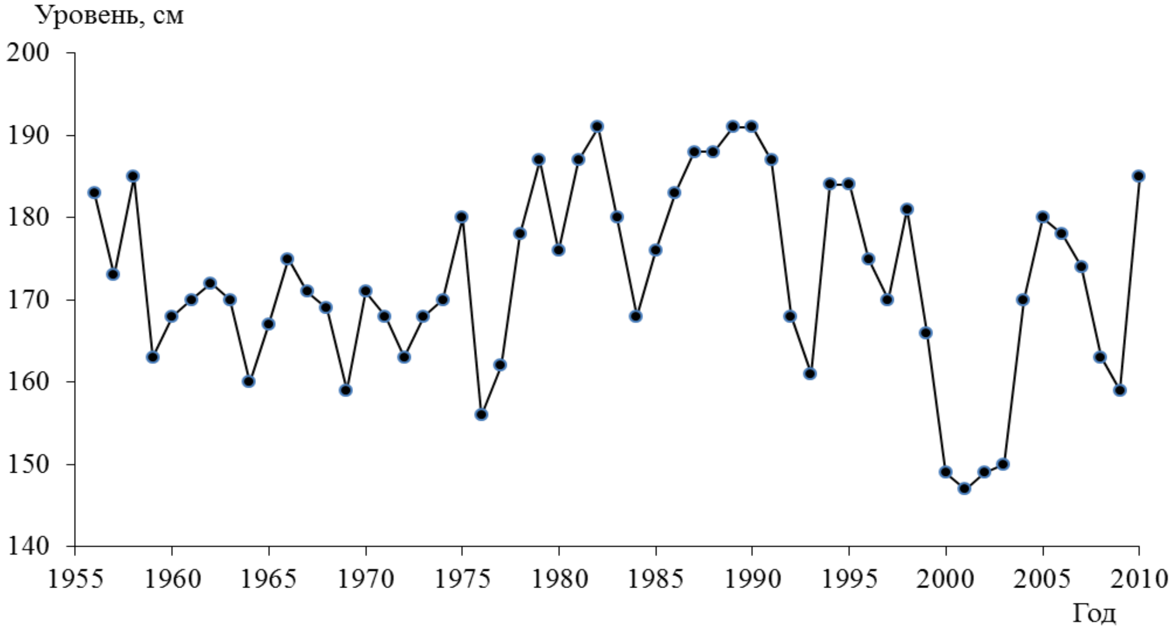

Рис. 1. Колебания уровня озера Нарочь, 1956 – 2010 гг.

Полученные результаты свидетельствуют о стабилизации остаточной суммы квадратов нормированных данных при $k = 8$, поэтому дальнейшего увеличения порядка регрессии не требуется (рис. 2).

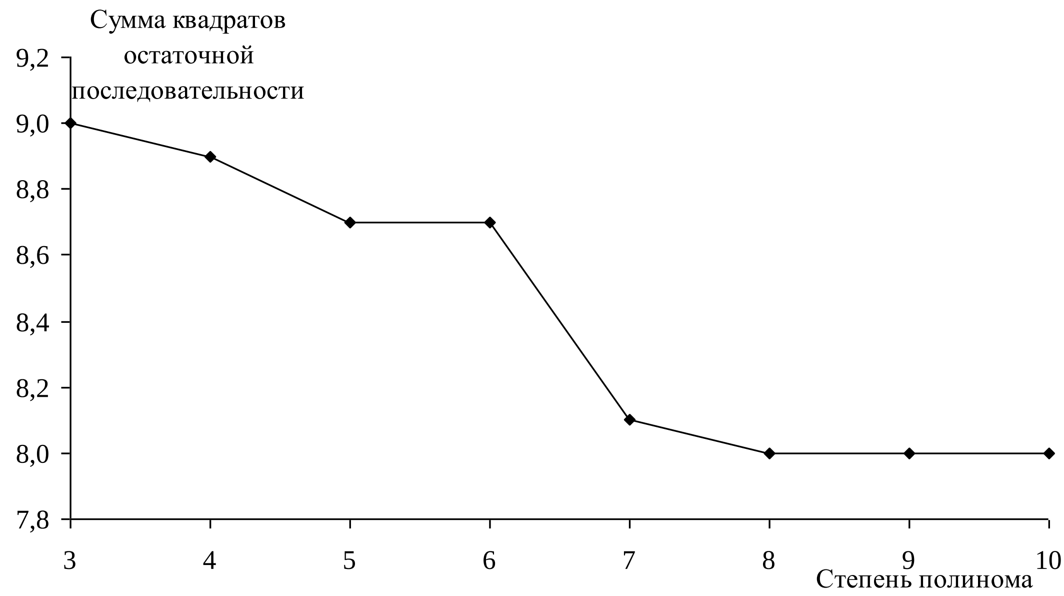

Рис. 2. Зависимость суммы квадратов остаточной последовательности от степени полинома

Далее методом наименьших квадратов была рассчитана функция $\Phi(Z(t))$, описывающая колебания нормированных данных наблюдений и представленная в виде полиномиальной регрессии 8-й степени:

$$\Phi(Z(t)) = -9.8234Z^8(t) - 9.5248Z^7(t) + 20.3185Z^6(t) + 17.6399Z^5(t) - \\ -13.8939Z^4(t) - 8.3926Z^3(t) + 3.3150Z^2(t) + 0.1504Z(t) - 0.0134. \quad (9)$$

Равновесные положения уровня являются корнями уравнения $\Phi(Z(t)) = 0$ и принимают для нормированных данных значения $Z_1 = -0,082$, $Z_2 = 0,049$, $Z_3 = 0,349$, что соответствует трем значениям уровня $H_1 = 167,196$ м, $H_2 = 170,069$ м, $H_3 = 176,678$ м, являющихся положениями равновесия (рис. 3).

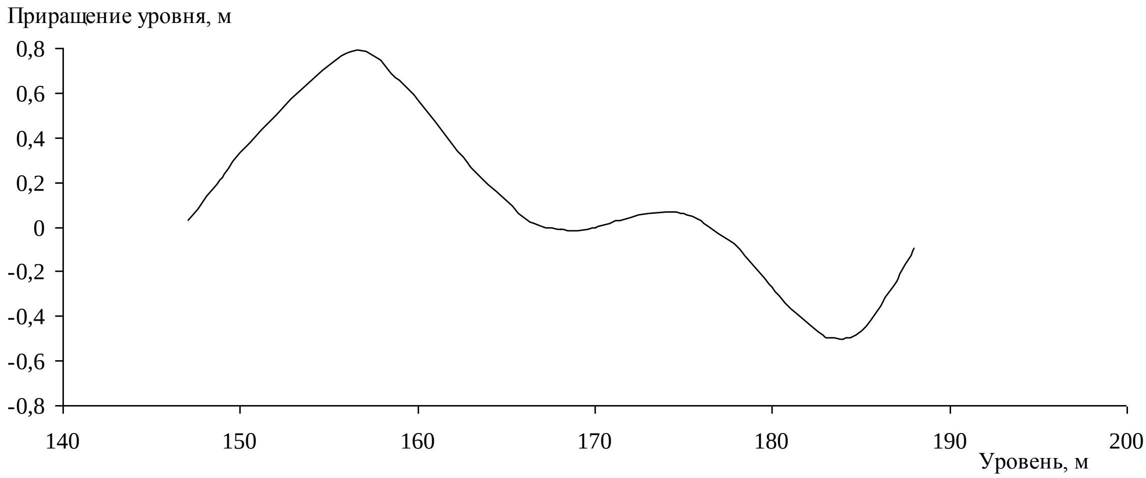

Рис. 3. Полиномиальная регрессия 8-го порядка в абсолютном масштабе.

Используя выражение (7), исследован потенциал уровня озера Нарочь (рис. 4). Точки экстремумов потенциала совпадают с корнями уравнения $\Phi(Z(t)) = 0$. При этом для озера Нарочь характерно два минимума $H_1 = 167,196$ м, $H_3 = 176,678$ м (устойчивые состояния равновесия) и один максимум $H_2 = 170,069$ м (неустойчивый уровень).

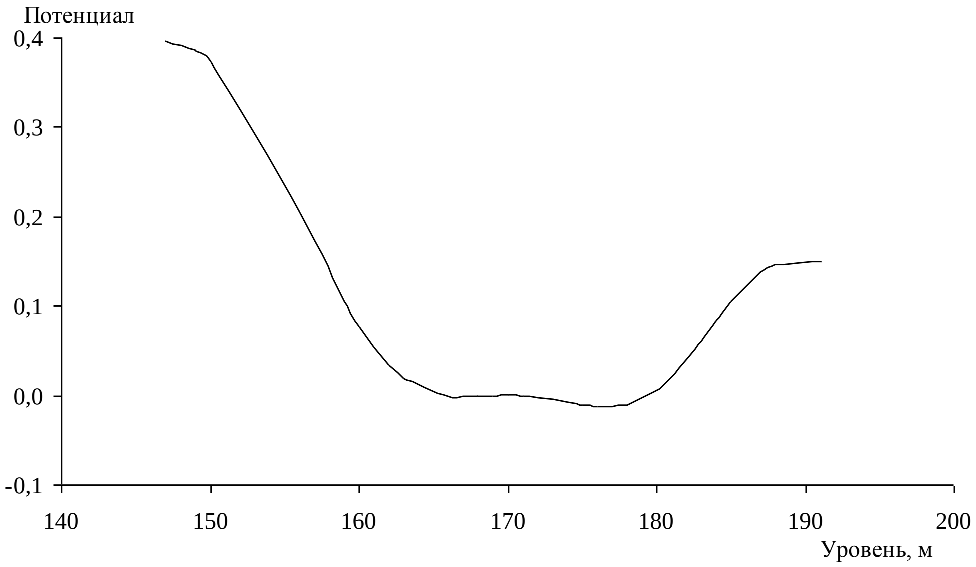

Рис. 4. Потенциал регрессии 8-го порядка.

Для моделирования траектории колебаний уровня была исследована остаточная последовательность. Период P_0 остаточной последовательности определен с применением спектрально-временного анализа, в основу которого положено вычисление спектров вариации на скользящих временных отрезках [7]. Для уровня озера Нарочь выявлен 2-летний цикл, что положено в основу построения фазовой диаграммы на основании соотношения (8), изображенной на рис. 5.

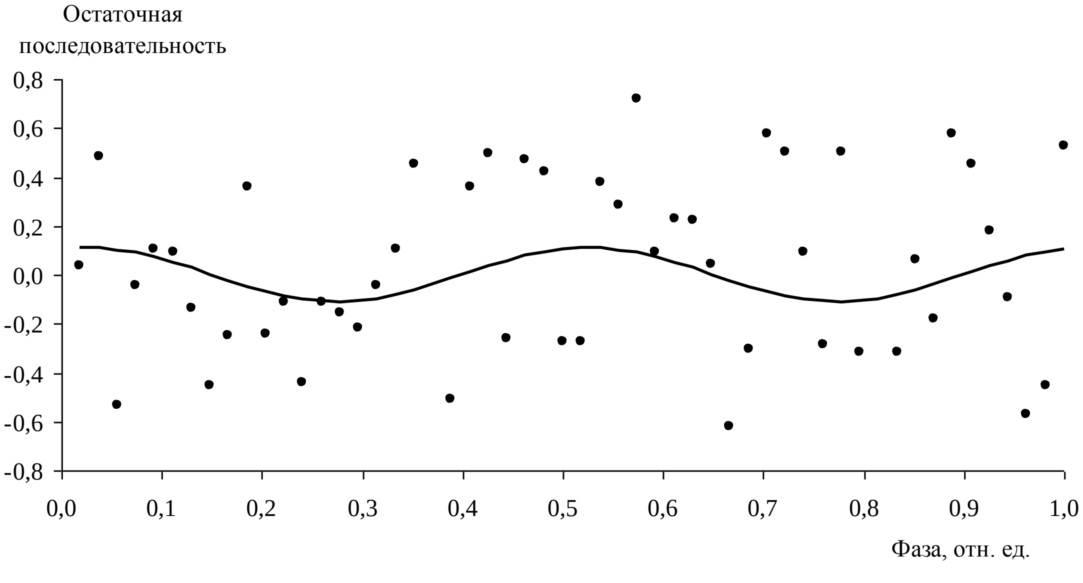

Рис. 5. Фазовая диаграмма остаточной последовательности.

Предположим, что фазовая диаграмма остаточной последовательности имеет характерную для сезонных колебаний синусоидальную форму, тогда ее можно представить следующим образом:

$$\gamma^{(8)}(t) = A_0 + A_1 \sin 4\pi t + A_2 \cos 4\pi t + \varepsilon(t),\ t = 1, 2, \ldots N, \qquad (10)$$

где $\varepsilon(t)$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

Значения неизвестных параметров выражения (10) получены методом наименьших квадратов и имеют следующие значения: $A_0 = 0$, $A_1 = 0,03418$, $A_2 = 0,10471$. После удаления из остаточной последовательности периодической составляющей рассчитаны параметры последовательности $\varepsilon(t)$, имеющие следующие значения: математическое ожидание $M_k = 0$ и стандартное отклонение $\sqrt{D_k} = 0,3805$. Для моделирования траектории колебаний уровня озера Нарочь выражение (9) преобразуется к следующему выражению:

$$\Phi(Z(t)) = -9.8234Z^8(t) - 9.5248Z^7(t) + 20.3185Z^6(t) + 17.6399Z^5(t) - 13.8939Z^4(t) - \\ -8.3926Z^3(t) + 3.3150Z^2(t) + 1.1504Z(t) - 0.0134 + A_0 + A_1 \sin 4\pi t + A_2 \cos 4\pi t + \varepsilon(t), \quad (11)$$

где $\varepsilon(t)$ – остаточная последовательность, имеющая нормальное распределение с параметрами $N(0;0,3805)$.

На рис. 6 представлена траектория, смоделированная с помощью автономного дифференциально-разностного уравнения и периодической составляющей. Моделирование по формуле (11) траектории длиной 200 значений показало, что за пределы верхнего уровня, равного 191 м, выходят 2 значения, что составляет 1 %. Это позволяет говорить о том, что вероятность превышения максимального годового уровня озера Нарочь маловероятна.

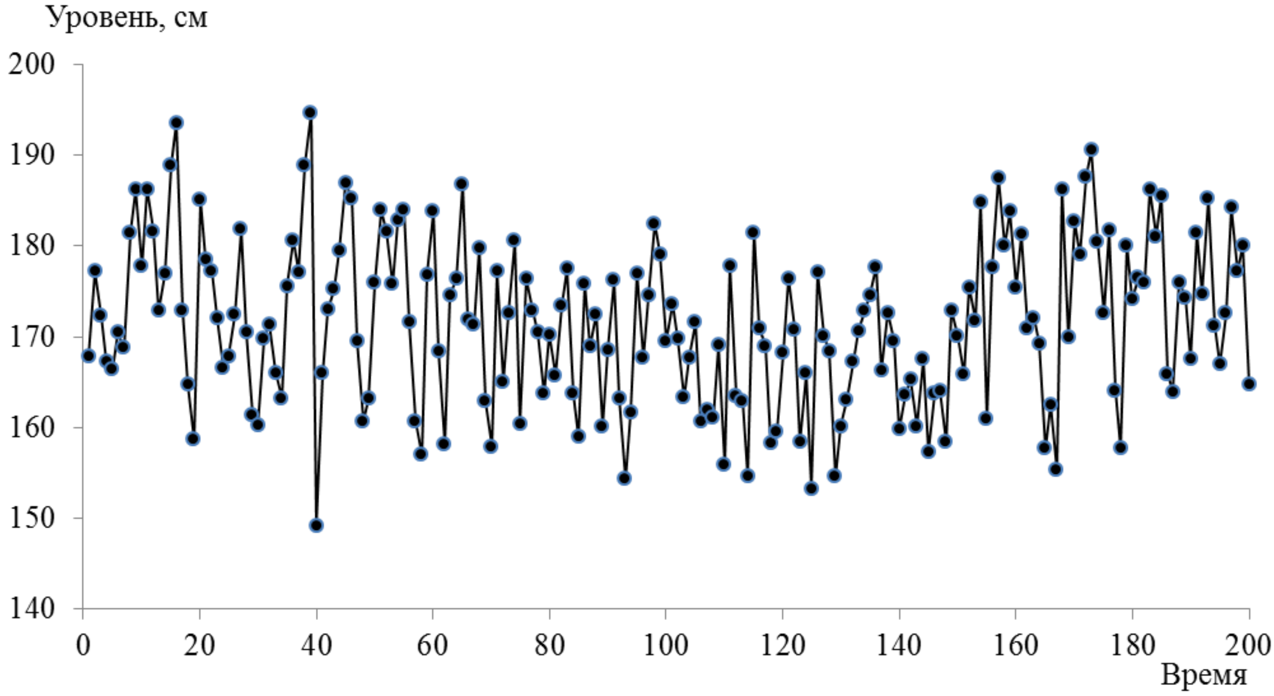

Рис. 6. Моделированная траектория колебаний уровня озера Нарочь.

Заключение

В результате проведенных исследований колебаний уровня озера Нарочь исходные данные разложены на 3 составляющие: полиномиальную регрессию, позволяющую определить не зависящий от времени закон траектории, периодическую составляющую синусоидального характера и остаточную последовательность независимых случайных величин. Моделирование траектории колебаний основано на детерминированной части, состоящей из регрессии 8-го порядка и периодической составляющей, а также случайной части, состоящей из независимых одинаково распределенных величин.

С применением предложенной модели можно моделировать траектории колебаний уровня озера Нарочь. Смоделированная траектория длиной 200 значений продемонстрировала вероятность превышения максимального годового уровня, равную 1 %.

Литература:

1. Айвазян С. А. Прикладная статистика. Исследование зависимостей / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 487 с.

2. Блакітная кніга Беларусі: Энцыкл./ Беларус. Энцыкл.; Рэдкал.: Н. А. Дзісько і інш. – Мінск: БелЭн, 1994. – 415 с.
3. Блакітны скарб Беларусі: Рэкі, азёра, вадасховішчы, турысцкі патынцыял водных аб'ектаў / Маст.: Ю. А. Тарэеў, У. І. Цярэнцьеў – Мінск: БелЭн, 2007. – 480 с.
4. Водные ресурсы Национального парка «Нарочанский»: справочник / А. Г. Аронов [и др.]; под общей редакцией В. С. Люштыка, д-ра биол. наук Т. В. Жуковой. – Минск : РИФТУР ПРИНТ, 2012. – 128 с.
5. Иванов-Смоленский В.Г. Все озера Беларуси : справочник / В. Г. Иванов-Смоленский. – Минск: РИФТУР ПРИНТ, 2013. – 752 с.
6. Кожевникова И. А. Моделирование колебаний уровня озера Кинерет / И. А. Кожевникова, В. И. Швейкина // Водные ресурсы. – 2014. – Том 41, № 1. – С. 565–572.
7. Логинов В. Ф. Спектрально-временной анализ уровенного режима озер и колебаний расходов воды крупных рек Беларуси / В. Ф. Логинов, В. Ф. Иконников // Природопользование: сб. научн. тр. / Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т проблем использования природ. ресурсов и экологии; под ред. И. И. Лиштвана, В. Ф. Логинова. – Минск, 2003. – Вып. 9. – С. 25–33.
8. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М.: Наука, 1965. – 331 с.
9. Теребиж В. Ю. Анализ временных рядов в астрофизике / В. Ю. Теребиж. – М.: Наука, 1992. – 389 с.

SIMULATION OF OSCILLATIONS IN AVERAGE ANNUAL WATER LEVELS OF LAKE NAROCH

Alexander Volchak,
Dr. Sc., dean of the engineering systems and ecology faculty
Brest State Technical University,
E-mail: volchak@tut.by
Ivan Kirviel,
Dr. Sc., professor
Pomeranian Academy
E-mail: kirviel@yandex.by
Adam Choiński,
Dr. Sc., professor
Institute of Physical Geography and Environmental Planning
E-mail: choinski@amu.edu.pl
Sergey Parfomuk,
Ph. D., head of department of informatics and applied mathematics
Brest State Technical University,
E-mail: parfom@mail.ru

Abstract: Data on levels of Lake Naroch decomposed into 3 components: polynomial regression, sinusoidal periodic component and residual sequence of independent random values. Modeling of the trajectory oscillations was performed using deterministic part consisting of a regression of 8th order and a periodic part and random part consisting of independent identically distributed variables. Simulated trajectory with a length of 200 values showed the probability of exceeding the maximum annual level equal to 1 %.

Keywords: modeling, level, trajectory, oscillation, the lake Naroch