

## МЕСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЛЬНЫХ СЕТЧАТЫХ КУПОЛОВ С ШАРНИРНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ СТЕРЖНЕЙ В УЗЛАХ

К. К. Глушко<sup>1</sup>, К. А. Глушко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> К. т. н., ассистент кафедры архитектуры УО «БрГТУ», Брест, Беларусь, [konstantin.glushko@bk.ru](mailto:konstantin.glushko@bk.ru)

<sup>2</sup> К. т. н., доцент, доцент кафедры природообустройства УО «БрГТУ», Брест, Беларусь

### Реферат

Рассмотрена задача местной устойчивости стальных сетчатых куполов с шарнирным соединением стержней в узлах. Определены графические зависимости изменения критической узловой нагрузки в зависимости от податливости узлов. Определены границы устойчивости формы стержневых многогранников, образующих сетчатые купола, и границы потери устойчивости отдельных стержней.

**Ключевые слова:** устойчивость, критическая нагрузка, податливость, узел, шарнир.

### LOCAL STABILITY OF STEEL GRID DOME WITH HINGED ROD CONNECTION IN NODES

K. K. Glushko, K. A. Glushko

### Abstract

The problem of snap through steel mesh domes with a hinged connection of rods in nodes is considered. Graphic dependencies of changes in critical nodal load depending on the compliance of nodes are determined. The boundaries of the stability of the shape of the rod polyhedra forming mesh domes, and the boundaries of the loss of stability of individual rods are determined.

**Keywords:** stability, critical load, compliance, node, hinge.

### Введение

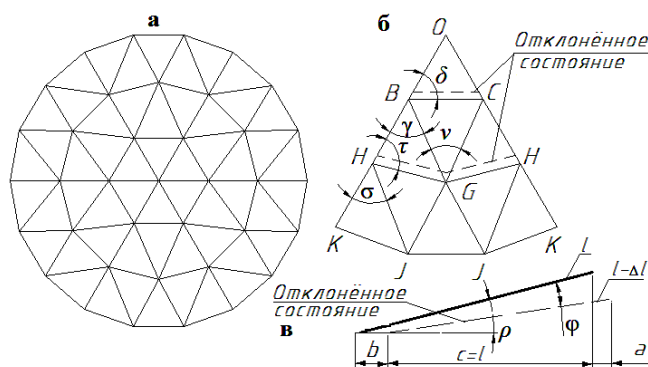
Применение пространственных конструкций часто вызвано необходимостью перекрытия больших пролётов. Наиболее часто для этих целей используются сетчатые купола, позволяющие перекрывать большие пролёты с минимальным расходом материалов. Малый вес, жёсткость, стандартизация их отдельных элементов и эстетические качества являются их наиболее значительными преимуществами. С другой стороны, сложность оценки их действительного напряжённо-деформированного состояния, проверки отдельных видов их устойчивости препятствует широкому распространению этих конструкций.

Существует довольно большое число работ, посвящённых вопросам устойчивости сетчатых куполов как с шарнирным, так и с жёстким соединением стержней в узлах [1–7, 10–17]. Потеря устойчивости шарнирно-стержневых сетчатых куполов носит выраженный местный характер: при этом может проявляться как потеря устойчивости формы стержневых многогранников [1–6, 11, 18], так и потеря устойчивости отдельных стержней. Вместе с тем до настоящего времени практически неисследовано в этом вопросе влияние начальных несовершенств формы и податливостей узлов на величину критической узловой нагрузки.

### Основная часть

Целями представленной работы являются оценка влияния податливостей узлов на величину критической узловой нагрузки, вызывающей продавливание к центру кривизны описанной сферы отдельных узлов сетчатых куполов, а также определение границ потери устойчивости формы стержневых многогранников и потери устойчивости стержней.

Рассматриваемый процесс деформирования стержневых многогранников, образующих сетчатые купола, изначально является геометрически нелинейным, при этом недостаточно рассмотреть процесс деформирования изолированного стержневого многогранника без учёта деформирования смежных стержневых многогранников и деформирования узлов [20]. С целью сравнения результатов вычисления критических узловых были рассмотрены процессы деформирования верхнего стержневого многогранника в составе трёхъярусного и двухъярусного фрагментов шарнирно-стержневого сетчатого купола. На рисунке 1 представлен план радиально-кольцевого сетчатого купола, его фрагмент в пределах смежных плоскостей симметрии и обобщённая схема деформирования стержня.



**Рисунок 1** – План сетчатого купола (а), его сегмент в исходном и в равновесном отклонённом состоянии (б), схема деформирования стержня (в)

Рассмотрим деформирование стержней трёхъярусного фрагмента сетчатого купола, приняв его опирание шарнирно-неподвижным.

Основные предпосылки, принятые в расчёте:

- 1) форма равновесия симметрична, вертикально действующая внешняя нагрузка, приложенная к узлам трёх- и двухъярусных сетчатых куполов, является осесимметричной;
- 2) длины стержней могут быть приняты одинаковыми;
- 3) моменты инерции и площади поперечных сечений стержней одинаковы;
- 4) материал стержней изотропен, деформирование стержней полагается упругим;
- 5) размерами узлов на напряжённо-деформированное состояние сетчатых куполов можно пренебречь, податливость узлов постоянна при растяжении и сжатии, одинакова для всех узлов;
- 6) воздействия на сетчатые купола являются силовыми;
- 7) стержни кольцевых рядов горизонтальны как в исходном состоянии, так и в отклонённом равновесном состоянии;
- 8) узловая нагрузка на рассматриваемые фрагменты действует вертикально.

Изначально следует рассмотреть деформирование кольцевых рядов стержней, в рассматриваемом случае образованных из стержней типа ВС и GH. С учётом деформаций узлов изменение длины

участка опорного контура запишется как сумма продольной деформации стержня и сумма деформаций каждого из узлов на его концах:

$$\Delta l_{BC} = \Delta l'_{BC} + 2 \cdot (0.5 \cdot \omega) N_{BC}, \quad (1)$$

где  $\Delta l_{BC}$  – продольная деформация участка кольцевого ряда стержней, образованного стержнями типа BC, м;

$\Delta l'_{BC}$  – продольная деформация стержня BC, м;

$\omega$  – податливость узла, м/Н;

$N_{BC}$  – продольная сила в стержне BC, Н.

Используя закон Гука для растяжения и сжатия, можно выразить изменение длины участка кольцевого ряда стержней, образованных стержнями типа BC:

$$\Delta l_{BC} = \Delta l'_{BC} (1 + D) \quad (2)$$

и аналогично для участка кольцевого ряда стержней, образованных стержнями типа GH:

$$\Delta l_{GH} = \Delta l'_{GH} (1 + D), \quad (3)$$

где  $D$  – безразмерный параметр податливости узла:

$$D = \omega EA / l \quad (4)$$

здесь  $l$  – длина стержня, м;

$E$  – модуль упругости, Па;

$A$  – площадь поперечного сечения стержня, м<sup>2</sup>.

Общая запись продольной деформации стержня, расположенного между смежными кольцевыми рядами стержней, запишется в виде:

$$\Delta l_{ij} = \Delta l'_{ij} - \omega \cdot N_{ij} - a_{ij} \cos \alpha_{ij} + b_{ij} \cos \beta_{ij}, \quad (5)$$

где  $\Delta l_{ij}$  – продольная деформация стержня  $ij$ , м;

$N_{ij}$  – продольная сила в этом стержне, Н;

$a_{ij}$  – горизонтальное перемещение конца  $i$  стержня  $ij$ , м;

$b_{ij}$  – то же, конца  $j$ , м;

$\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  – углы перемещением верхнего и нижнего конца стержня соответственно и осью стержня, рад;

$\Delta l'_{ij}$  – продольная деформация (м) наклонного стержня, оба конца которого неподвижны в горизонтальном направлении, но подвижны в вертикальном:

$$\Delta l'_{ij} = l \rho_{ij}^2 \chi_{ij} (1 - 0.5 \chi_{ij}), \quad (6)$$

где  $\rho_{ij}$  – угол наклона стержня  $ij$  в исходном состоянии, рад;

$\chi_{ij}$  – безразмерный параметр перемещения узла  $i$  относительно узла  $j$ , отношение угла поворота хорды стержня относительно начального положения к начальному углу её наклона  $\rho_{ij}$ .

Формула (6) была получена В. А. Савельевым [10] и К. Klöppel, R. Schardt [18] и справедлива при условии малости углов  $\rho_{ij}$ . Величины продольных деформаций стержней меридиональных и диагональных направлений в трёхъярусном фрагменте сетчатого купола можно получить, определив горизонтальные перемещения их концов из рисунка 1 (б).

$$a_{OC} = 0; \quad b_{OC} = a_{CH} = a_{CG} = 0.5 \Delta l_{BC} \sec \delta; \quad (7)$$

$$b_{CH} = b_{CG} = 0.5 \Delta l_{GH} \sec \tau; \quad a_{HK} = a_{HJ} = b_{CH}.$$

Принимая равенство длин стержней, можно установить углы наклона стержней меридиональных и диагональных направлений к горизонтальным плоскостям. На рисунке 2 изображены углы наклона  $\rho$  стержней меридиональных направлений в трёхъярусном фрагменте.

При этом можно учесть начальные геометрические несовершенства формы сетчатого купола осесимметричного характера, которые проявляются в отклонении величин углов наклона стержней меридиональных направлений к горизонтальным плоскостям в исходном состоянии:

$$\frac{\rho_{OC}}{\rho_{CH}} = \frac{1}{3m_1}; \quad \frac{\rho_{OC}}{\rho_{HK}} = \frac{1}{5m_2}, \quad (8)$$

где  $\rho_{OC}, \rho_{CH}, \rho_{HK}$  – углы наклона стержней  $OC, CH, HK$  соответственно к горизонтальным плоскостям;

$m_1, m_2$  – коэффициенты, учитывающие отклонения от соотношений величин начальных углов наклона стержней от 1/3 и 1/5: при их значениях больших единицы форма верхнего стержневого много-

гранника более пологая, чем необходимо, в противном случае – более выпуклая [19].

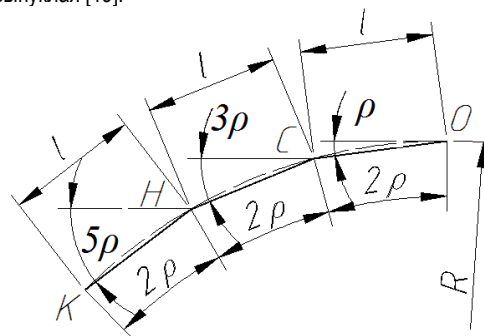


Рисунок 2 – Углы наклона стержней меридиональных направлений к горизонтальным

Из рисунка 2 следует, что углы между горизонтальными плоскостями и осями стержней типа CH и HK кратны углу наклона к горизонтальной плоскости оси стержня OC. Это позволяет в дальнейшем разделить величины продольных деформаций стержней, определяемых по формулам (5) и (6), на  $\rho_{OC}^2$  и длину стержней  $l$ . Используя формулы (2), (3), (5), (6), (7), можно записать выражения для определения безразмерных параметров продольных деформаций стержней меридиональных направлений в трёхъярусном фрагменте сетчатого купола, принимая  $\alpha_{OC} = \beta_{OC} = 0, \alpha_{CH} = \beta_{CH} = 0,$

$\alpha_{HK} = \beta_{HK} = 0, \alpha_{CG} = \gamma, \beta_{CG} = 0.5\nu, \alpha_{HJ} = \sigma:$

$$\bar{\epsilon}_{OC} = \frac{\chi_1 (1 - 0.5 \chi_1)}{1 + D} + 0.5 \cdot \bar{\epsilon}_{BC} \sec \delta; \quad (9)$$

$$\bar{\epsilon}_{CH} = \frac{9m_1^2 \chi_2 (1 - 0.5 \chi_2)}{1 + D} - 0.5 \cdot \bar{\epsilon}_{BC} \sec \delta + 0.5 \cdot \bar{\epsilon}_{GH} \sec \tau; \quad (10)$$

$$\bar{\epsilon}_{CG} = \frac{9m_1^2 \chi_2 (1 - 0.5 \chi_2)}{1 + D} - 0.5 \cdot \bar{\epsilon}_{BC} \sec \delta \cos \gamma + \quad (11)$$

$$+ 0.5 \cdot \bar{\epsilon}_{GH} \sec \tau \cos 0.5\nu;$$

$$\bar{\epsilon}_{HK} = \frac{25m_2^2 \chi_3 (1 - 0.5 \chi_3)}{1 + D} - 0.5 \cdot \bar{\epsilon}_{GH} \sec \tau; \quad (12)$$

$$\bar{\epsilon}_{HJ} = \frac{25m_2^2 \chi_3 (1 - 0.5 \chi_3)}{1 + D} - 0.5 \cdot \bar{\epsilon}_{GH} \sec \tau \cos \sigma, \quad (13)$$

где, упростив запись, принято  $\chi_1 = \chi_{OC}, \chi_2 = \chi_{CH} = \chi_{CG}, \chi_3 = \chi_{HK} = \chi_{HJ}$  – безразмерные параметры перемещений узлов первого, второго и третьего сверху ярусов соответственно.

Используя свойство малости углов наклона осей стержней к горизонтальным плоскостям, можно составить уравнение равновесия системы сходящихся сил в узлах типа C и H

$$\begin{cases} N_{HK} + 2N_{HJ} \cos \sigma - 2N_{GH} \cos \tau - N_{CH} = 0; \\ N_{CH} + 2N_{CG} \cos \gamma - 2N_{BC} \cos \delta - N_{OC} = 0, \end{cases} \quad (14)$$

разделив которые на  $EAp_{OC}^2$ , можно получить систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров продольных деформаций кольцевых направлений типа BC и GH:

$$\begin{cases} \bar{\epsilon}_{HK} + 2\bar{\epsilon}_{HJ} \cos \sigma - 2\bar{\epsilon}_{GH} \cos \tau - \bar{\epsilon}_{CH} = 0; \\ \bar{\epsilon}_{CH} + 2\bar{\epsilon}_{CG} \cos \gamma - 2\bar{\epsilon}_{BC} \cos \delta - \bar{\epsilon}_{OC} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Откуда

$$\bar{\epsilon}_{BC} = \frac{1}{1 + D} \cdot \frac{0.5 A \sec \tau (1 + D) (1 + 2 \cos \gamma \cos 0.5 \nu)}{0.5 B \sec \tau (1 + 2 \cos \gamma \cos 0.5 \nu) - 2 \cos \delta - \sec \delta (1 + \cos^2 \gamma)} + \quad (16)$$

$$\frac{9m_1^2 \chi_2 (1 - 0.5 \chi_2) (1 + 2 \cos \gamma) - \chi_1 (1 - 0.5 \chi_1)}{0.5 B \sec \tau (1 + 2 \cos \gamma \cos 0.5 \nu) - 2 \cos \delta - \sec \delta (1 + \cos^2 \gamma)};$$

$$\bar{\epsilon}_{GH} = A + B \bar{\epsilon}_{BC}, \quad (17)$$

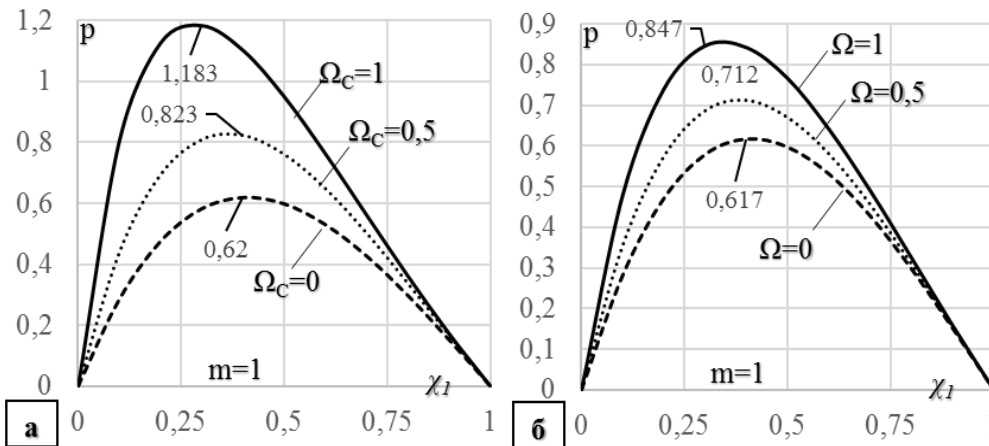


Рисунок 3 – Диаграммы равновесных состояний для шестиугольного (а) и пятиугольного (б) в плане стержневых многогранников, определённые в двухъярусном фрагменте сетчатого купола без учёта податливости узлов

где

$$A = \frac{1}{1+D} \frac{25m_2^2\chi_3(1-0.5\chi_3)(1+2\cos\sigma) - 9m_1^2\chi_2(1-0.5\chi_2)}{2\cos\tau + \sec\tau(1+\cos^2\sigma)}; \quad (18)$$

$$B = \frac{1}{2\cos\delta(2\cos\tau + \sec\tau(1+\cos^2\sigma))}. \quad (19)$$

Принимая теперь шарнирно-неподвижное опирание для двухъярусного фрагмента сетчатого купола и используя второе уравнение из системы (14), можно определить безразмерный параметр продольной деформации стержней BC:

$$\bar{\varepsilon}_{BC} = \frac{9m_1^2\chi_2(1-0.5\chi_2)(1+2\cos\gamma) - \chi_1(1-0.5\chi_1)}{2\cos\delta + \sec\delta(1+\cos^2\gamma)}. \quad (20)$$

При рассмотрении двухъярусного фрагмента сетчатого купола в формулах (10)–(13) принято, что  $\bar{\varepsilon}_{CH} = \bar{\varepsilon}_{HK} = \bar{\varepsilon}_{HU} = 0$ .

Проецируя продольные силы в стержнях на вертикальную ось действия внешней узловой нагрузки, можно получить уравнения равновесия узлов типа O, C и H. Соотнося уравнения равновесия узла C к уравнению равновесия в узле O и уравнение равновесия узла H и узла O, можно получить систему нелинейных уравнений в безразмерных параметрах продольных деформаций, разделив числитель и знаменатель на  $EAp_{OC}^3$ :

$$\begin{cases} \frac{3m_1(\bar{\varepsilon}_{CH} + 2\bar{\varepsilon}_{OC})(1-\chi_2) - \bar{\varepsilon}_{OC}(1-\chi_1)}{k\varepsilon_{OC}(1-\chi_1)} = \Omega_C; \\ \frac{5m_2(\bar{\varepsilon}_{HK} + 2\bar{\varepsilon}_{HU})(1-\chi_3) - 3m_1\bar{\varepsilon}_{CH}(1-\chi_2)}{k\varepsilon_{OC}(1-\chi_1)} = \Omega_H, \end{cases} \quad (21)$$

где  $\Omega_C = P_C/P_O$ ,  $\Omega_H = P_H/P_O$  – соотношения нагрузок в узлах C, H и O; k – количество стержней, соединённых в узле O.

Задавая значение параметра перемещения узла O в пределах верхнего яруса  $\chi_1$ , можно определить два других параметра перемещений узлов  $\chi_2$  и  $\chi_3$ . Многократно решив систему уравнений (21) (для двухъярусного фрагмента сетчатого купола следует решать только первое уравнение системы), определив неизвестные параметры перемещений узлов, можно произвести подстановку найденных значений в уравнение равновесия верхнего узла:

$$p = \frac{P_O}{\rho_{OC}^3 EA} = k\varepsilon_{OC}(1-\chi_1). \quad (22)$$

На рисунке 3 показаны диаграммы равновесных состояний верхнего стержневого многогранника в составе двухъярусного сетчатого купола с пятью и шестью стержнями, соединёнными в центральном узле, соответственно. Решение системы уравнений произ-

водилось без учёта начальных несовершенств формы при  $m=m_1=m_2=1$  и  $D=0$ .

Решая систему нелинейных уравнений для определения безразмерных параметров перемещений узлов трёхъярусного фрагмента сетчатого купола  $\chi_2$  и  $\chi_3$  в зависимости от параметра перемещений  $\chi_1$  и подставляя полученные величины в уравнение (22), можно получить диаграммы равновесных состояний, аналогичные изображённым на рисунке 3. Произведя сравнение параметров критических нагрузок, которые являются локальными максимумами на полученных диаграммах равновесных состояний, при различных параметрах  $D=0-6$  и  $m_1=0,9$ ,  $m_2=1$ , выявлено, что расхождение между ними не превышает 0,7%–1%. Из этого следует, что влияние напряжённо-деформированного состояния стержней, находящихся за пределами двух верхних ярусов купола, оказывает малое влияние на характер деформирования верхнего стержневого многогранника. Принимая малость влияния напряжённо-деформированного состояния стержней сетчатого купола, находящихся за пределами второго яруса от рассматриваемого стержневого многогранника, на его характер деформирования, можно несколько обобщить полученные выводы. В нагруженной части сетчатого купола можно выделить двухъярусный фрагмент, нагрузка на узлы которого может быть принята осесимметричной и перпендикулярной его основанию без значительной погрешности. Для определения величин критических нагрузок, вызывающих местную потерю устойчивости сетчатых куполов в виде продавливания к центру кривизны их узлов, достаточно произвести их расчёт в составе двухъярусного сетчатого купола. Геометрические параметры двухъярусного сетчатого купола и геометрические характеристики поперечных сечений его стержней должны быть аналогичны выделенному в полноразмерном сетчатом куполе двухъярусному фрагменту. Таким образом, проверку местной устойчивости сетчатых куполов можно производить не только при осесимметричном их нагружении в целом, но и при нагружении некоторой области, внутри которой нагрузка на выделенные двухъярусные фрагменты может быть принята осесимметричной.

Полученные значения безразмерных параметров критических нагрузок объединены в зависимости от параметра податливости узлов D и представлены в виде графиков на рисунке 4.

Условием соблюдения устойчивости формы стержневых многогранников, образующих сетчатые купола, является следующее неравенство:

$$\frac{P_{yz}}{\rho_{OC}^3 EA} < p_{cr}, \quad (23)$$

где  $P_{yz}$  – узловая нагрузка, приложенная к центральному узлу рассматриваемого стержневого многогранника, H;

$p_{cr}$  – значение безразмерного параметра критической узловой нагрузки.

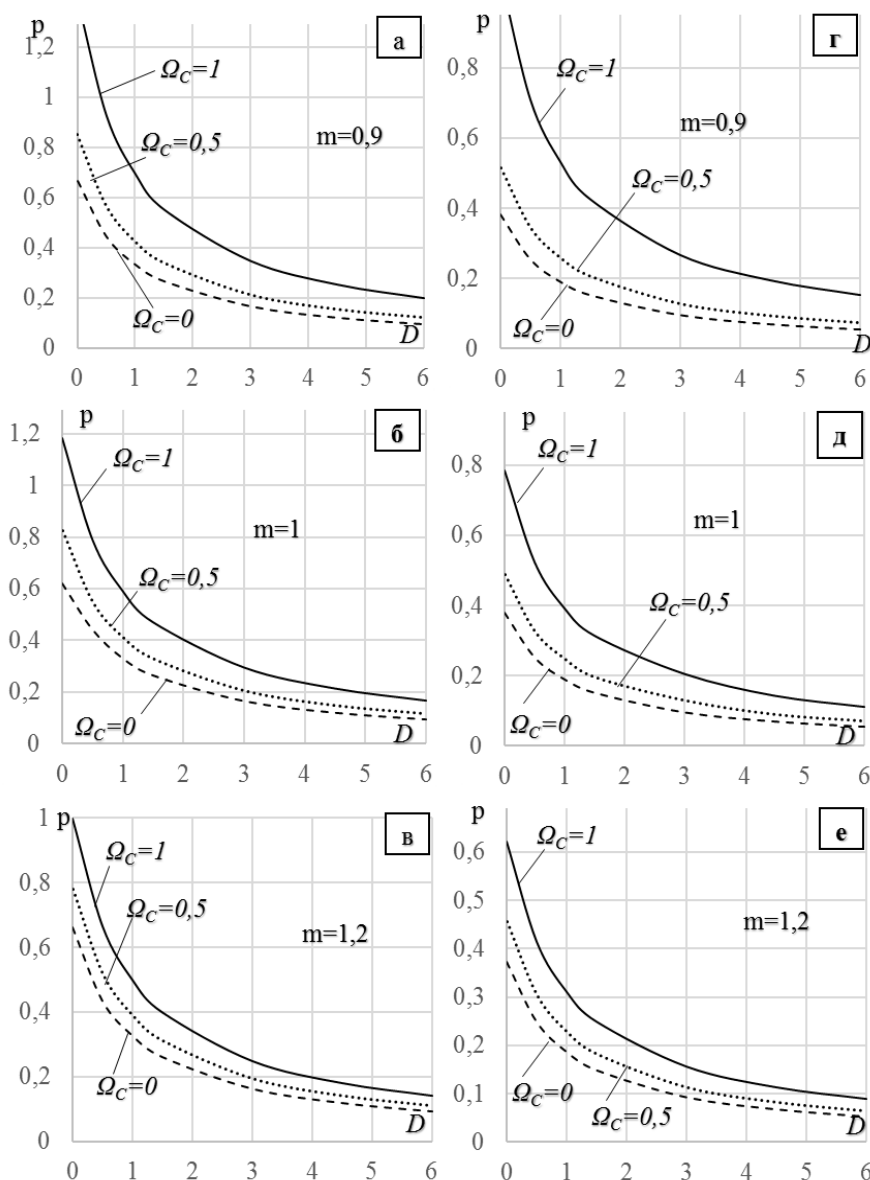


Рисунок 4 – Графики изменения параметров критических узловых нагрузок для шестиугольных (а-в) и пятиугольных (д-е) в плане стержневых многогранников в зависимости от безразмерных параметров податливости узлов  $D$

Представленное выше аналитическое решение можно сопоставить с численным. Численно решение производилось в программе SAP2000. Была рассмотрена геометрически нелинейное деформирование двухъярусного сетчатого купола. Материал стержней – сталь, тип сечения – труба, геометрическая схема сетчатого купола оставалась неизменной для каждого значения коэффициентов  $m$  и безразмерного параметра податливости узлов  $D$ , изменялась продольная жёсткость стержней  $EA$ . Радиус описанной сферы составил 12,625 м.

На рисунке 5 показаны основные размеры двухъярусного сетчатого купола.

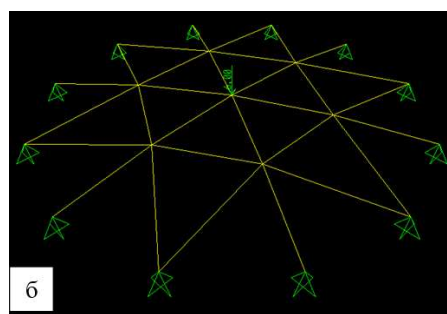
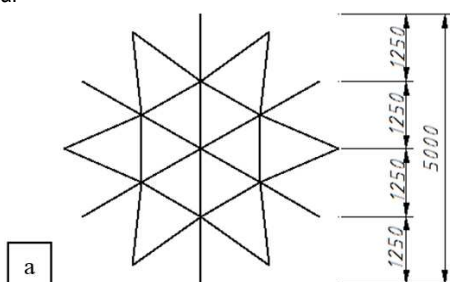


Рисунок 5 – Размеры двухъярусного сетчатого купола в плане с верхним стержневым многогранником в виде правильного шестиугольника в плане (а) и общий вид расчётной модели (б)

В силу того, что диаграммы равновесных состояний стержневых многогранников сетчатых куполов, изображённые на рисунке 3, являются немонотонными, очень сложно добиться сходимости итерационного расчёта, используя в качестве аргумента узловую нагрузку [8, 20]. При сравнении варьируемым параметром были выбраны

**Таблица 1** – Величины расхождений критических параметров нагрузок шарнирно-стержневых многогранников сетчатых куполов

D	Правильный шестиугольник									Правильный пятиугольник								
	Расхождение, %									Расхождение, %								
	m=0.9			m=1			m=1.2			m=0.9			m=1			m=1.2		
	1	0.5	0	1	0.5	0	1	0.5	0	1	0.5	0	1	0.5	0	1	0.5	0
0	5,4	5,1	5,2	4,1	6,8	6,0	4,1	2,4	7,2	7,7	6,2	8,2	6,1	6,2	8,0	7,8	8,1	9,1
0.5	6,6	6,2	6,4	5,1	8,1	7,2	5,0	3,0	8,4	8,9	7,2	9,6	7,3	7,4	9,5	9,3	9,5	10,7
1	4,5	4,3	4,4	3,5	6,3	5,6	3,5	2,0	7,1	7,6	6,1	7,8	5,7	5,7	7,7	7,5	7,9	8,7
1.5	7,5	7,1	7,3	7,6	7,5	7,5	5,8	6,6	6,4	6,8	5,5	8,6	6,8	9,1	7,9	9,0	7,6	10,0
3	6,7	6,3	6,5	8,1	8,8	9,4	5,1	8,4	9,5	10,1	8,2	11,7	7,9	12,0	10,5	12,5	10,6	13,7
4.5	4,4	4,2	4,3	7,5	6,8	8,4	3,4	9,5	8,1	8,6	7,0	10,2	6,1	11,8	8,6	11,6	8,8	12,4
6	5,8	5,5	5,6	8,0	8,8	9,9	4,5	9,0	10,4	11,1	9,0	12,6	7,9	12,8	11,1	13,6	11,4	12,8

перемещения узлов, а внешняя узловая нагрузка являлась результатом суммирования вертикальных проекций продольных сил в стержнях. Найденные параметры перемещений с использованием первого уравнения системы (21) были применены для вычисления вертикальных перемещений узлов:

$$f_i = \rho_{ij} \chi_{ij}, \quad (24)$$

где  $f_i$  – вертикальное перемещение  $i$ -го узла.

Соотнеся критические узловые нагрузки, полученные при помощи аналитического решения и численного, можно установить, насколько велико их расхождение. В таблице 1 представлены величины расхождений критических узловых нагрузок на шестиугольный и пятиугольный стержневые многогранники.

Полученные величины расхождений критических нагрузок, полученные при помощи аналитического решения и численного, представленные в таблице 1, находятся в интервале от 2 % до 13,7%. Причём величины критических нагрузок, полученные численно, всегда выше аналогичных значений, полученных с использованием аналитического расчёта.

Можно произвести сравнение полученных результатов с известными решениями. М. Е. Липницкий в работе [7] обозначил пределы величин критических нагрузок на узлы верхних стержневых многогранников сферических однослойных сетчатых куполов, построенных на основе сети *равносторонних* треугольников. Величины критических нагрузок записаны в виде неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{3}} EA \left( \frac{\Delta_1}{l} \right)^3 \leq P_{cr} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} EA \left( \frac{\Delta_1}{l} \right)^3, \quad (25)$$

где  $\Delta_1$  – стрела подъёма верхнего стержневого многогранника.

Левое значение неравенства соответствует значению критической узловой нагрузки изолированного шарнирно-стержневого многогранника с шестью узлами в вершине и опорами, имеющими возможность перемещаться из-за растяжения стержней опорного контура ( $\Omega_C=0$ ), правое значение критической узловой нагрузки справедливо для такого случая, при котором опоры рассматриваемого стержневого многогранника могут быть представлены шарнирно-неподвижными ( $\Omega_C=1$ ).

В работах [1–6] А. А. Журавлёвым рассмотрены вопросы потери устойчивости формы стержневых многогранников, в частности верхнего фрагмента *геодезического* сетчатого купола в виде 980-гранника. Автором получено выражение для определения критической нагрузки, вызывающей потерю устойчивости формы верхнего стержневого многогранника, пятиугольного в плане:

$$\frac{P_{cr}}{\sin^3 \rho_{oc} EA} = \frac{5\sqrt{3}}{9} \frac{\xi}{1+\xi}, \quad (26)$$

где безразмерный параметр  $\xi$  выражается по формуле

$$\xi = 8 \sin 36^\circ \cos \frac{\rho_{oc}}{2} + 2 \frac{l_{cg}}{l_{oc}} + \frac{l_{ch}}{l_{oc}}, \quad (27)$$

где  $l_{ij}$  – длина стержня, расположенного между узлами  $i$  и  $j$  в двухъярусном фрагменте, м.

А. А. Журавлёв также обосновал достаточность рассмотрения двухъярусного фрагмента сетчатого купола для решения задачи продавливания его узлов к центру кривизны описанной сферы – потери устойчивости формы стержневых многогранников.

Формулы (26) и (27) справедливы для случая приложения нагрузки равной величины к узлам сетчатого купола ( $\Omega_C=1$ ). В таблице 2 показаны величины параметров критических нагрузок, определённых по формулам (25) и (26).

**Таблица 2** – Критические параметры нагрузок шарнирно-стержневых многогранников сетчатых куполов

Количество граней стержневого многогранника	$P_{cr}$	
	$\Omega_C=0$	$\Omega_C=1$
6	0,577	1,155
5	-	0,852

Значения параметров критических нагрузок, полученные с использованием известных решений и с использованием полученных выше зависимостей (результаты вычислений изображены в виде графиков на рисунке 3), различаются не более чем на 2–11%. Следует отметить, что полученные величины расхождений величин критических параметров нагрузок обусловлены тем, что в полученных решениях использованы различные геометрические схемы сетчатых куполов – углы между стержнями в плоскости грани несколько отличаются использованных в предложенном выше решении, в формулах (26) и (27) принимаются различными также и длины стержней.

Диаграммы равновесных состояний, изображённые на рисунке 4, иллюстрируют изменение параметров критических узловых нагрузок, но, используя их, невозможно установить, произойдёт ли потеря устойчивости формы стержневых многогранников в виде продавливания узлов к центру описанной сферы раньше, чем проявится потеря устойчивости отдельных стержней рассматриваемого многогранника или исчерпание прочностных характеристик материала стержней. Для установления границ выполнения этих условий необходимо рассмотреть следующие неравенства:

1) потеря устойчивости формы стержневых многогранников проявляется раньше, чем потеря устойчивости стержней:

$$\frac{\pi^2 EI}{l^2} \geq \rho_{oc}^2 EA \bar{\epsilon}_{oc}^{cr}, \quad (28)$$

где  $I$  – минимальный момент инерции поперечного сечения;

$\bar{\epsilon}_{oc}^{cr}$  – параметр продольной деформации стержня  $OC$ , величина которого определяется той величиной безразмерного параметра перемещения узла  $O$   $\chi_1$ , при котором  $\rho = \rho_{cr}$  (следует отметить,

что величина  $\bar{\epsilon}_{oc}^{cr}$  во всех случаях меньше максимальной на всём участке деформирования  $0 \leq \chi_1 \leq 1$ );

2) потеря устойчивости формы стержневых многогранников проявляется раньше, чем исчерпание прочностных характеристик материала стержней:

$$f_y A \geq \rho_{oc}^2 EA \varepsilon_{oc}^{-cr}, \quad (29)$$

где  $f_y$  – предел текучести материала стержней.

Упрощая выражения (27) и (28), можно определить величину угла наклона стержней верхнего стержневого многогранника к горизонтальной плоскости, при которой оба условия будут удовлетворяться:

1) из условия устойчивости стержней:

$$\rho_{oc} \leq \frac{\pi}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{oc}^{-cr}}}, \quad (30)$$

где  $\lambda$  – гибкость стержня;

2) из условия прочности:

$$\rho_{oc} \leq \sqrt{\frac{f_y}{E}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{oc}^{-cr}}}. \quad (31)$$

Следует отметить, что неравенства (29) и (30) определяют угол наклона стержней стержневых многогранников к касательным плоскостям, при котором произойдёт только продавливание их узлов к центру кривизны описанной сферы.

Оба неравенства (29) и (30) содержат в правой части  $1/\sqrt{\varepsilon_{oc}^{-cr}}$ . Изменение этой величины мало зависит от наличия начальных несовершенств формы в принятых пределах  $m=0,9-1,2$  при изменении параметра податливости узлов  $D$ . Различие ординат при различных величинах  $m$  составляет 1,4–2%, что меньше расчётной погрешности. Из этого следует, что изменение величин  $1/\sqrt{\varepsilon_{oc}^{-cr}}$  можно представить как зависимость только от параметра податливости узлов  $D$ . Графическое представление этих зависимостей для каждой из величин неравномерности осесимметричного нагружения представлены в виде графиков, изображённых на рисунке 6.

При величинах  $1/\sqrt{\varepsilon_{oc}^{-cr}}$ , определённых для разных величин соотношений узловых нагрузок  $\Omega_c$ , меньших, указанных на графиках рисунка 6, потеря устойчивости формы стержневых многогранников в виде продавливания их узлов к центру описанной сферы будет происходить в упругой стадии деформирования без потери устойчивости стержней. Оба эти условия будут выполняться только на границе выполнения неравенств (28) и (29): в случае, если  $\lambda = \pi \sqrt{E/f_y}$ .

Используя графики, изображённые на рисунке 6, можно определить такой угол наклона стержней верхнего стержневого многогранника (для произвольного стержневого многогранника – угол наклона к касательной плоскости при его вершине), при котором продавливание узлов сетчатого купола к центру кривизны описанной сферы и связанная с этим явлением потеря устойчивости отдельных стержней невозможны при сохранении упругого деформирования материала стержней.

### Заключение

1. Предложены выражения для определения параметров критических узловых нагрузок, вызывающих местную потерю устойчивости стальных сетчатых куполов с шарнирными узлами, с учётом геометрически нелинейного деформирования образующих их стержневых многогранников и величин податливостей узлов.
2. На основе предложенных выражений для определения параметров критических узловых нагрузок, вызывающих местную потерю устойчивости стальных сетчатых куполов с шарнирными узлами построены графические зависимости изменения безразмерных параметров критических узловых нагрузок для выпуклых

стержневых многогранников в виде правильных шестиугольников и пятиугольников в плане, позволяющие учитывать влияние неравномерного осесимметричного приложения узловой нагрузки, наличие начальных несовершенств формы стержневых многогранников, податливость узлов.

3. Определены границы местной потери устойчивости сетчатых куполов в виде продавливания узлов образующих их стержневых многогранников к центру кривизны описанной сферы.

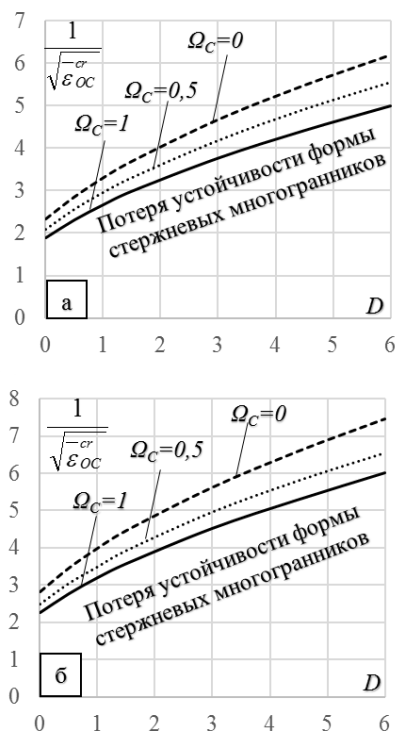


Рисунок 6 – Границы потери устойчивости формы шестиугольных (а) и пятиугольных (б) в плане стержневых многогранников

### Список цитированных источников

1. Журавлев, А. А. К вопросу о местной устойчивости сетчатых куполов с треугольной решеткой / А. А. Журавлев // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1971. – № 5. – С. 77–80.
2. Журавлев, А. А. Пространственные деревянные конструкции / А. А. Журавлев, Г. Б. Вержбовский, Н. Н. Ерёменко. – Ростов н/Д : РГСУ, 2003. – 518 с.
3. Журавлев, А. А. Процелкивание стержневой конструкции сетчатого купола в форме 980-гранника / А. А. Журавлев // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1983. – № 6. – С. 34–39.
4. Журавлев, А. А. Устойчивость стержневых систем в форме выпуклых конфигураций на плоскости и в пространстве / А. А. Журавлев // Известия РГАС. – 1996. – № 1. – С. 42–48.
5. Журавлев, А. А. Устойчивость упругих стержневых систем в форме выпуклых многогранников / А. А. Журавлев // Строительная механика и расчет сооружений. – 1985. – № 6. – С. 41–43.
6. Кузнецов, А. А. Местная устойчивость сетчатых деревянных куполов : дис. канд. техн. наук 05.23.01 / А. А. Кузнецов. – Пенза : Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, 2006. – 120 с.
7. Липницкий, М. Е. Купола (расчёт и проектирование) : практическое пособие / М. Е. Липницкий, М. Е. Дьяков. – Ленинград : Стройиздат, 1973. – 129 с.

8. Перельмутер, А. В. Расчётные модели сооружений и возможность их анализа / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – Киев : Сталь, 2002. – 600 с. : ил.
9. Рекомендации по расчету и конструированию сетчатых куполов со стержнями из холодногнутых тонкостенных профилей / сост.: В. И. Тур, А. В. Тур, И. С. Холопов. – Ульяновск : УлГТУ, 2012. – 38 с.
10. Савельев, В. А. Влияние начальных несовершенств и неравномерности загрузки на устойчивость сферического купола с жёсткими узлами / В. А. Савельев // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1971. – № 5. – С. 32–34.
11. Савельев, В. А. Теоретические основы проектирования металлических куполов : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.23.01 / В. А. Савельев. – М., 1995. – 39 с.
12. Abedi, K. Progressive collapse of single-layer braced domes / K. Abedi, G.A.R. Parke // International Journal of Space Structures. – 1991. – № 11 (3). – P. 291–306.
13. Abedi, K. Propagation of local instabilities in braced domes / K. Abedi : doctoral dissertation. – University of Surrey, 1997. – 333 p.
14. Aquilar, R. J. The snap-through buckling of triangular lattice domes under the simultaneous application of concentrated loads. In space structure / R. J. Aquilar, T. Huang ; ed. R. M. Davies. – Blackwell Sc. Publ., Oxford, 1967.
15. Aquilar, R. J. Snap-through buckling of framed triangular domes / R. J. Aquilar // J. Struct. Div. – 1967. – № 1 (93). – P. 301–317.
16. Gioncu, V. Buckling of Shell Structures (in Romanian) / V. Gioncu, M. Ivan. – Bucharest : Ed. Academiei, 1978.
17. Kato, S. Dynamic Elasto-Plastic Buckling Simulation System for Single Layer Reticular Domes with Semi-Rigid Connections under Multiple Loadings / S. Kato, M. Murata // International Journal of Space Structures. – 1997. – Vol. 12, № 3–4. – P. 161–172.
18. Klöppel, K. Zur Berechnung von Netzkuppeln / K. Klöppel, R. Schardt // Der Stahlbau. – 1962. – № 5. – S. 129–136.
19. Глушко, К. К. Влияние начальных несовершенств формы на местную устойчивость сетчатого купола при действии осесимметричной узловой нагрузки / К. К. Глушко // Актуальные проблемы исследования материалов, конструкций, технологий и организации строительства в трансграничном аспекте : сборник статей II Международной научной конференции, Брест, 18–20 октября 2017 г. / Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: С. М. Семенюк [и др.]. – Брест : БрГТУ, 2017. – С. 32–36.
20. Глушко, К. К. Устойчивость формы стальных однослойных сетчатых куполов с жёсткими узлами при действии распределённой внешней нагрузки / К. К. Глушко // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. – 2019. – № 1 : Строительство и архитектура. – С. 80–85.
4. Zhuravlev, A. A. Ustojchivost' sterzhnevnykh sistem v forme vypuklykh konfiguracij na ploskosti i v prostranstve / A. A. Zhuravlev // Izvestiya RGAS. – 1996. – № 1. – S. 42–48.
5. Zhuravlev, A. A. Ustojchivost' uprugih sterzhnevnykh sistem v forme vypuklykh mnogogrannikov / A. A. Zhuravlev // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. – 1985. – № 6. – S. 41–43.
6. Kuznecov, A. A. Mestnaya ustojchivost' setchatyh dere-vyannykh kupolov : dis. kand. tekhn. nauk 05.23.01 / A. A. Kuznecov. – Penza : Penzenskij gosudarstvennyj univer-sitet arhitektury i stroitel'stva, 2006. – 120 s.
7. Lipnickij, M. E. Kupola (raschyot i proektirovanie) : prakticheskoe posobie / M. E. Lipnickij, M. E. D'yakov. – Leningrad : Strojizdat, 1973. – 129 s.
8. Perel'muter, A. V. Raschyotnye modeli sooruzhenij i vozmozhnost' ih analiza / A. V. Perel'muter, V. I. Slivker. – Kiev : Stal', 2002. – 600 s. : il.
9. Rekomendacii po raschetu i konstruirovaniu setchatyh kupolov so sterzhnyami iz holodnognutyh tonkostennykh profilej / Sost.: V. I. Tur, A. V. Tur, I. S. Holopov. – Ul'yanovsk : UIGTU, 2012. – 38 s.
10. Savel'ev, V. A. Vliyanie nachal'nykh nesovershenstv i neravnomernosti zagruzheniya na ustojchivost' sferiche-skogo kupola s zhyostkimi uzlamy / V. A. Savel'ev // Stroitel'naya mekhanika i raschyot sooruzhenij. – 1971. – № 5. – S. 32–34.
11. Savel'ev, V. A. Teoreticheskie osnovy proektirovaniya metallicheskih kupolov : avtoref. dis. ... d-ra tekhn. nauk : 05.23.01 / V. A. Savel'ev. – M., 1995. – 39 s.
12. Abedi, K. Progressive collapse of single-layer braced domes / K. Abedi, G.A.R. Parke // International Journal of Space Structures. – 1991. – № 11 (3). – P. 291–306.
13. Abedi, K. Propagation of local instabilities in braced domes / K. Abedi : doctoral dissertation. – University of Surrey, 1997. – 333 p.
14. Aquilar, R. J. The snap-through buckling of triangular lattice domes under the simultaneous application of concentrated loads. In space structure / R. J. Aquilar, T. Huang ; ed. R. M. Davies. – Blackwell Sc. Publ., Oxford, 1967.
15. Aquilar, R. J. Snap-through buckling of framed triangular domes / R. J. Aquilar // J. Struct. Div. – 1967. – № 1 (93). – P. 301–317.
16. Gioncu, V. Buckling of Shell Structures (in Romanian) / V. Gioncu, M. Ivan. – Bucharest : Ed. Academiei, 1978.
17. Kato, S. Dynamic Elasto-Plastic Buckling Simulation System for Single Layer Reticular Domes with Semi-Rigid Connections under Multiple Loadings / S. Kato, M. Murata // International Journal of Space Structures. – 1997. – Vol.12, № 3–4. – P. 161–172.
18. Klöppel, K. Zur Berechnung von Netzkuppeln / K. Klöppel, R. Schardt // Der Stahlbau. – 1962. – № 5. – S. 129–136.
19. Glushko, K. K. Vliyanie nachal'nykh nesovershenstv formy na mestnyuyu ustojchivost' setchatogo kupola pri dejstvii osesimmetrichnoj uzlovoj nagruzki / K. K. Glushko // Aktual'nye problemy issledovaniya materialov, konstrukcij, tehnologij i organizacii stroitel'stva v transgranichnom aspekte : sbornik statej II Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, Brest, 18–20 oktyabrya 2017 g. / Brest. gos. tekhn. unt ; redkol.: S. M. Semenyuk [i dr.]. – Brest : BrGTU, 2017. – S. 32–36.
20. Glushko, K. K. Ustojchivost' formy stal'nykh odnoslojnykh setchatyh kupolov s zhyostkimi uzlamy pri dejstvii raspredel'yonnoj vneshnej nagruzki / K. K. Glushko // Vestn. Brest. gos. tekhn. unta. – 2019. – № 1 : Stroitel'stvo i arhitektura. – S. 80–85.

#### References

1. Zhuravlev, A. A. K voprosu o mestnoj ustojchivosti set-chatyh kupolov s treugol'noj reshetkoj / A. A. Zhuravlev // Izv. vuzov. Stroitel'stvo i arhitektura. – 1971. – № 5. – S. 77–80.
2. Zhuravlev, A. A. Prostranstvennye derevyannye konstrukcii / A. A. Zhuravlev, G. B. Verzhbovskij, N. N. Eryomenko. – Rostov n/D : RGSU, 2003. – 518 s.
3. Zhuravlev, A. A. Proshchelnivanie sterzhnevoj konstrukcii setchatogo kupola v forme 980-grannika / A. A. Zhuravlev // Izv. vuzov. Stroitel'stvo i arhitektura. – 1983. – № 6. – S. 34–39.
4. Zhuravlev, A. A. Ustojchivost' sterzhnevnykh sistem v forme vypuklykh konfiguracij na ploskosti i v prostranstve / A. A. Zhuravlev // Izvestiya RGAS. – 1996. – № 1. – S. 42–48.
5. Zhuravlev, A. A. Ustojchivost' uprugih sterzhnevnykh sistem v forme vypuklykh mnogogrannikov / A. A. Zhuravlev // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. – 1985. – № 6. – S. 41–43.
6. Kuznecov, A. A. Mestnaya ustojchivost' setchatyh dere-vyannykh kupolov : dis. kand. tekhn. nauk 05.23.01 / A. A. Kuznecov. – Penza : Penzenskij gosudarstvennyj univer-sitet arhitektury i stroitel'stva, 2006. – 120 s.
7. Lipnickij, M. E. Kupola (raschyot i proektirovanie) : prakticheskoe posobie / M. E. Lipnickij, M. E. D'yakov. – Leningrad : Strojizdat, 1973. – 129 s.
8. Perel'muter, A. V. Raschyotnye modeli sooruzhenij i vozmozhnost' ih analiza / A. V. Perel'muter, V. I. Slivker. – Kiev : Stal', 2002. – 600 s. : il.
9. Rekomendacii po raschetu i konstruirovaniu setchatyh kupolov so sterzhnyami iz holodnognutyh tonkostennykh profilej / Sost.: V. I. Tur, A. V. Tur, I. S. Holopov. – Ul'yanovsk : UIGTU, 2012. – 38 s.
10. Savel'ev, V. A. Vliyanie nachal'nykh nesovershenstv i neravnomernosti zagruzheniya na ustojchivost' sferiche-skogo kupola s zhyostkimi uzlamy / V. A. Savel'ev // Stroitel'naya mekhanika i raschyot sooruzhenij. – 1971. – № 5. – S. 32–34.
11. Savel'ev, V. A. Teoreticheskie osnovy proektirovaniya metallicheskih kupolov : avtoref. dis. ... d-ra tekhn. nauk : 05.23.01 / V. A. Savel'ev. – M., 1995. – 39 s.
12. Abedi, K. Progressive collapse of single-layer braced domes / K. Abedi, G.A.R. Parke // International Journal of Space Structures. – 1991. – № 11 (3). – P. 291–306.
13. Abedi, K. Propagation of local instabilities in braced domes / K. Abedi : doctoral dissertation. – University of Surrey, 1997. – 333 p.
14. Aquilar, R. J. The snap-through buckling of triangular lattice domes under the simultaneous application of concentrated loads. In space structure / R. J. Aquilar, T. Huang ; ed. R. M. Davies. – Blackwell Sc. Publ., Oxford, 1967.
15. Aquilar, R. J. Snap-through buckling of framed triangular domes / R. J. Aquilar // J. Struct. Div. – 1967. – № 1 (93). – P. 301–317.
16. Gioncu, V. Buckling of Shell Structures (in Romanian) / V. Gioncu, M. Ivan. – Bucharest : Ed. Academiei, 1978.
17. Kato, S. Dynamic Elasto-Plastic Buckling Simulation System for Single Layer Reticular Domes with Semi-Rigid Connections under Multiple Loadings / S. Kato, M. Murata // International Journal of Space Structures. – 1997. – Vol.12, № 3–4. – P. 161–172.
18. Klöppel, K. Zur Berechnung von Netzkuppeln / K. Klöppel, R. Schardt // Der Stahlbau. – 1962. – № 5. – S. 129–136.
19. Glushko, K. K. Vliyanie nachal'nykh nesovershenstv formy na mestnyuyu ustojchivost' setchatogo kupola pri dejstvii osesimmetrichnoj uzlovoj nagruzki / K. K. Glushko // Aktual'nye problemy issledovaniya materialov, konstrukcij, tehnologij i organizacii stroitel'stva v transgranichnom aspekte : sbornik statej II Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, Brest, 18–20 oktyabrya 2017 g. / Brest. gos. tekhn. unt ; redkol.: S. M. Semenyuk [i dr.]. – Brest : BrGTU, 2017. – S. 32–36.
20. Glushko, K. K. Ustojchivost' formy stal'nykh odnoslojnykh setchatyh kupolov s zhyostkimi uzlamy pri dejstvii raspredel'yonnoj vneshnej nagruzki / K. K. Glushko // Vestn. Brest. gos. tekhn. unta. – 2019. – № 1 : Stroitel'stvo i arhitektura. – S. 80–85.

Материал поступил в редакцию 16.12.2019