$u_{Data}(t)$ можно получать из полиномиальной интерполяции или аппроксимации, нахождением функции регрессии, сплайнов и т.п.[3]. На рисунке 3 представлены $u_g(t)$, $u_{Data}(t)$ и узловые точки из файла данных, причем функция $u_{Data}(t)$ получена кусочно-непрерывной аппроксимацией.

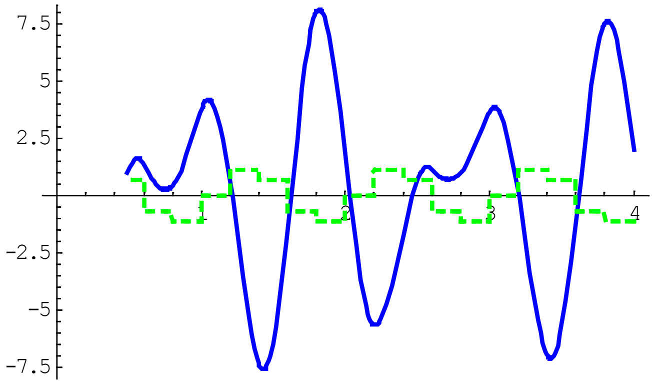

Рисунок 4 – График функции $u(t)$ рассчитанной численно из уравнения (3) (сплошная линия), и функция $u_{Data}(t)/200$ (штриховая линия).

Для проверки удовлетворительности аппроксимации решено дифференциальное уравнение

$$u''(t) + 2\alpha\beta\xi u'(t) + \alpha^2\Omega^2 u(t) = -u_{Data}(t) \quad (3)$$

с помощью функции NDSolve системы «Математика», т.е. в результате применения численного метода. На рисунке 4 показаны рассчитанная по файлу данных функция $u(t)$ и функция $u_{Data}(t)/200$. При сравнении функций $u(t)$, полученных из решения уравнений (2) и (3), можно сделать вывод, что выбранная аппроксимация кусочно-непрерывной функцией дает результаты, близкие к решению уравнения (2). На рисунке 5 показано, что функция $u(t)$ при синусоидальном смещении грунта, и функция $u(t)$, полученная при аппроксимации файла данных, практически совпадают. В случае же неудовлетворительного совпадения результатов всегда можно поменять аппроксимирующую функцию, и добиться хорошего соответствия модельных результатов истинным.

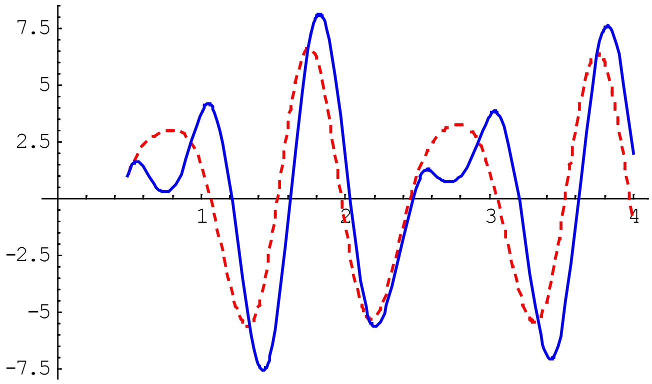

Рисунок 5 – График функции $u(t)$ (штриховая линия), рассчитанной из уравнения (2) при $u_g(t) = \mathrm{A}\sin\delta t$, и график функции $u(t)$, рассчитанной численно из уравнения (3) по файлу данных (сплошная линия).

Наблюдаемое соответствие численного моделирования сейсмических колебаний зданий или других конструкций фактическим данным позволяет предположить, что использованный в работе подход может оказаться полезным при инженерном расчете различных объектов в сейсмически активных районах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Пейн Г. Физика колебаний и волн. М.: Мир, 1979.- 389 с.
2. J.Voitle, E.Lumsdaine Response of a Structure to Seismic Input // Proceedings of Conference “Engineering Problems Solving using Mathematica”. – Rotterdam (Holland). – 1992. – P.95-101.
3. Wolfram S. Mathematica: a system for doing mathematics by computer. Addison-Wesley, 1991.

УДК 531.1

Прокопеня А.Н.

О ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЧНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЬЮТОНОВОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ МНОГИХ ТЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

Задача многих тел впервые была сформулирована И. Ньютоном и состоит в следующем: зная начальные положения и скорости трех или более массивных частиц, движущихся под действием сил взаимного гравитационного притяжения, найти их положения и скорости в любой момент времени. В последние три столетия эта задача привлекала внимание многих выдающихся математиков и механиков. Однако до сих пор она не решена в конечном виде, и только в случае двух взаимодействующих частиц соответствующее общее решение было найдено. Более того, оказалось, что дифференциальные уравнения, описывающие движение частиц, в общем случае не могут быть проинтегрированы. Поэтому дальнейший прогресс в решении задачи многих тел связан, по мнению А. Пуанкаре, с поиском новых классов точных частных решений соответствующих уравнений движения и исследованием их устойчивости. При этом анализ устойчивости найденных решений является наиболее сложной задачей качественной теории дифференциальных уравнений, требующей для своего решения громоздких и трудоемких аналитических расчетов, выполнение которых возможно лишь при использовании современных систем символьных вычислений, к которым относится, например, система *Mathematica* [1].

В работе [2] рассмотрена плоская ньютонова задача многих тел и найдено соответствующее точное частное решение, описывающее равномерное вращение n частиц одинаковой массы m, находящихся в вершинах правильного n-угольника, вокруг $(n+1)$-ой частицы массой m_0, помещенной в его центр. Затем было показано [3, 4], что существует целый класс точных симметричных решений задачи многих тел, геометрически изображаемых правильным многоуголь-

Прокопеня Александр Николаевич. *Кандидат физ.-мат. наук, доцент каф. физики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

ником, в вершинах которого находятся частицы одинаковой массы. Многоугольник вращается с переменной угловой скоростью вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости многоугольника, испытывая масштабное преобразование, причем в его центре может находиться еще одна частица произвольной массы. Устойчивость инвариантного многоугольника была полностью исследована в первом и втором приближениях в работах [5, 6]. В данной работе исследуется устойчивость в первом приближении решений, описывающих изменяющиеся многоугольники [3, 4].

УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим систему, состоящую из $(n+1)$ частиц массами m_0 и $m_1 = m_2 = ... = m_n \equiv m$, движущихся под действием силы гравитационного притяжения вида: $F_{ij} = f\dfrac{m_i m_j}{r_{ij}^2}$, где $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ – расстояние между i-ой и j-ой частицами, а f – гравитационная постоянная. В относительной декартовой системе координат, начало которой совпадает с частицей массой m_0, уравнения движения частиц имеют вид [3]:

$$\frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2} + f(m_0+m)\frac{\vec{r}_j}{r_j^3} = fm\sum_{i=1(i\neq j)}^{n}\left(\frac{\vec{r}_i-\vec{r}_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}\right)$$

$$(j=\overline{1,n}) \tag{1}$$

Для дальнейших вычислений уравнения (1) удобно переписать в цилиндрических координатах:

$$\begin{gathered}
\frac{d^2\rho_j}{dt^2} - \rho_j\left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)^2 + f(m_0+m)\frac{\rho_j}{r_j^3} = \\
= fm\sum_{i=1(i\neq j)}^{n}\left(\frac{cos(\varphi_i-\varphi_j)\rho_i - \rho_j}{r_{i,j}^3} - \frac{cos(\varphi_i-\varphi_j)\rho_i}{r_i^3}\right) \\
\rho_j\frac{d^2\varphi_j}{dt^2} + 2\frac{d\rho_j}{dt}\frac{d\varphi_j}{dt} = \\
= fm\sum_{i=1(i\neq j)}^{n}\left(\frac{1}{r_{i,j}^3} - \frac{1}{r_i^3}\right)sin(\varphi_i-\varphi_j)\rho_i \\
\frac{d^2 z_j}{dt^2} + f(m_0+m)\frac{z_j}{r_j^3} = fm\sum_{i=1(i\neq j)}^{n}\left(\frac{z_i-z_j}{r_{i,j}^3} - \frac{z_i}{r_i^3}\right)
\end{gathered} \tag{2}$$

$(j=\overline{1,n})$,

где $r_i^2 = \rho_i^2 + z_i^2$,

$$r_{i,j}^2 = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 = \rho_i^2 + \rho_j^2 - 2\rho_i\rho_j cos(\varphi_i - \varphi_j) + (z_i - z_j)^2$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться в том, что уравнения (2) имеют следующее точное частное решение:

$$\rho_j(t) = \rho_1(t) \equiv \rho(t), \qquad \varphi_j(t) = \varphi(t) + \frac{2\pi}{n}j,$$

$$z_j(t) = 0, \quad (j=\overline{1,n}) \tag{3}$$

причем функции $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ связаны соотношениями:

$$\rho(\varphi) = \frac{p}{1+e\,cos\,\varphi}, \quad \rho^2\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{fpM_n},$$

где $M_n = m_0 + \dfrac{m}{4}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{sin(\pi i/n)}$, а p и e – некоторые постоянные.

Решение (3) определяет движение частиц в координатной плоскости xOy по одинаковым траекториям, каждая из которых повернута по отношению к соседней на угол $2\pi/n$. При этом частицы находятся в вершинах правильного n-угольника, центр которого совпадает с началом координат и который в процессе движения частиц изменяет свои размеры и вращается вокруг оси Oz с переменной угловой скоростью. Форма траекторий частиц полностью определяется значениями параметров p и e. В случае $e=0$ все частицы, находясь в вершинах правильного n-угольника, движутся по одной и той же окружности радиуса p с постоянной угловой скоростью

$$\omega = \sqrt{\frac{f\,M_n}{p^3}}.$$

Чтобы исследовать устойчивость решений (3), удобно преобразовать (2) к переменным Нехвила, используя следующую подстановку [7]:

$$\rho_j(t) \to \frac{p}{1+e\,cos\,\varphi}\rho_j(\varphi),$$

$$z_j(t) \to \frac{p}{1+e\,cos\,\varphi}z_j(\varphi),$$

где полярный угол φ является новой независимой переменной. В результате уравнения движения (2) примут вид:

$$\begin{gathered}
\frac{d^2\rho_j}{d\varphi^2} - \rho_j\left(\frac{d\varphi_j}{d\varphi}\right)^2 + \frac{e\,cos\,\varphi}{1+e\,cos\,\varphi}\rho_j + \frac{m_0+m}{M_n(1+e\,cos\,\varphi)}\frac{\rho_j}{r_j^3} = \\
= \frac{m}{M_n(1+e\,cos\,\varphi)}\times \\
\times\sum_{i=1(i\neq j)}^{n}\left(\frac{cos(\varphi_i-\varphi_j)\rho_i-\rho_j}{r_{i,j}^3} - \frac{cos(\varphi_i-\varphi_j)\rho_i}{r_i^3}\right) \\
\rho_j\frac{d^2\varphi_j}{d\varphi^2} + 2\frac{d\rho_j}{d\varphi}\frac{d\varphi_j}{d\varphi} = \\
= \frac{m}{M_n(1+e\,cos\,\varphi)}\sum_{i=1(i\neq j)}^{n}\left(\frac{1}{r_{i,j}^3} - \frac{1}{r_i^3}\right)sin(\varphi_i-\varphi_j)\rho_i, \\
\frac{d^2 z_j}{d\varphi^2} + \frac{e\,cos\,\varphi}{1+e\,cos\,\varphi}z_j + \frac{m_0+m}{M_n(1+e\,cos\,\varphi)}\frac{z_j}{r_j^3} = \\
= \frac{m}{M_n(1+e\,cos\,\varphi)}\sum_{i=1(i\neq j)}^{n}\left(\frac{z_i-z_j}{r_{i,j}^3} - \frac{z_i}{r_i^3}\right) \ (j=\overline{1,n}),
\end{gathered} \tag{4}$$

Решение (3) в переменных Нехвила запишется в виде:

$$\rho_j(\varphi) = \rho \equiv 1, \qquad \varphi_j(\varphi) = \varphi + \frac{2\pi}{n}j,$$

$$z_j(\varphi) = 0, \ (j=\overline{1,n}) \tag{5}$$

Чтобы исследовать уравнения (4) в окрестности решения (5), сделаем в (4) следующую подстановку:

$$\rho_j(\varphi) \to 1 + u_j(\varphi),\ \varphi_j(\varphi) \to \varphi + \frac{2\pi}{n} j + \gamma_j(\varphi).$$

Рассматривая функции $u_j(\varphi)$, $\gamma_j(\varphi)$, $z_j(\varphi)$ в качестве малых возмущений решения (5), разложим уравнения (4) по степеням u_j, γ_j, z_j с точностью до первого порядка. В результате получим следующую линеаризованную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2u_j}{d\varphi^2} - 2\frac{d\gamma_j}{d\varphi} = \frac{8+12\mu+S_1}{(1+e\cos\varphi)(4\mu+S_1)}u_j -$$
$$-\frac{1}{4(1+e\cos\varphi)(4\mu+S_1)}\times$$
$$\times\sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{n}\frac{1}{\left|\sin(\pi(i-j)/n)\right|^3}((-1+3\cos(\frac{2\pi}{n}(i-j)))u_j +$$
$$+(-3+\cos(\frac{2\pi}{n}(i-j)) - 32\cos(\frac{2\pi}{n}(i-j))\times$$
$$\times|\sin(\frac{\pi}{n}(i-j))|^3)u_i -$$
$$-(1+16|\sin(\frac{\pi}{n}(i-j))|^3)\sin(\frac{2\pi}{n}(i-j))(\gamma_i-\gamma_j)),$$
$$\frac{d^2\gamma_j}{d\varphi^2} + 2\frac{du_j}{d\varphi} = -\frac{1}{4(1+e\cos\varphi)(4\mu+S_1)}\times$$
$$\times\sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{n}\frac{1}{\left|\sin(\pi(i-j)/n)\right|^3}((1--32|\sin(\frac{\pi}{n}(i-j))|^3)\times$$
$$\times\sin(\frac{2\pi}{n}(i-j))u_i + 3\sin(\frac{2\pi}{n}(i-j))u_j +$$
$$+(3+\cos(\frac{2\pi}{n}(i-j)) + 16\cos(\frac{2\pi}{n}(i-j))|\times$$
$$\times\sin(\frac{\pi}{n}(i-j))|^3)(\gamma_i-\gamma_j)),$$
$$\frac{d^2z_j}{d\varphi^2} + \frac{4(1+\mu)+(4\mu+S_1)e\cos\varphi}{(1+e\cos\varphi)(4\mu+S_1)}z_j =$$
$$=\frac{1}{2(1+e\cos\varphi)(4\mu+S_1)}\times$$
$$\times\sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{n}\frac{1}{\left|\sin(\pi(i-j)/n)\right|^3}((1-8|\sin(\frac{2\pi}{n}(i-j))|^3)z_i - z_j) \tag{6}$$

где

$$\mu = \frac{m_0}{m},\ S_1 = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\sin(\pi j/n)}.$$

Система (6) представляет собой систему трех линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами, частным решением которой является тривиальное решение. Таким образом, исследование устойчивости решения (3) в линейном приближении сводится к анализу устойчивости тривиального решения системы (6).

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ПО ОТНОШЕНИЮ К ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

Как следует из третьего уравнения системы (6) функции z_j, определяющие возмущение траекторий частиц в перпендикулярном по отношению к плоскости xOy направлении, не зависят от u_j и γ_j. Следовательно, в линейном приближении можно исследовать устойчивость решений (5) по отношению к перпендикулярным возмущениям z_j и возмущениям u_j и γ_j, параллельным плоскости xOy, по отдельности.

Сначала исследуем линейную устойчивость решений (5) по отношению к перпендикулярным возмущениям. Для этого перепишем третье уравнение системы (6), определяющее z_j, используя векторные обозначения. Введем *n*-мерный вектор Z с компонентами $z_j(\varphi)$ и матрицы B и K размерности $n\times n$, элементы которых имеют вид:

$$B_{jk} = \frac{1}{|\sin(\pi(j-k)/n)|^3} \quad \text{для} \quad j\neq k \quad \text{и}$$
$$B_{jj} = -\sum_{k=1(\neq j)}^{n} B_{jk}\,;\ K_{jk} = 1 \qquad (j,k=\overline{1,n}).$$

В результате получим следующее векторное уравнение:

$$\frac{d^2Z}{d\varphi^2} = \frac{1}{2(1+e\cos\varphi)(4\mu+S_1)}\times$$
$$\times(B - 8K - 8\mu I - 2(4\mu+S_1)e\cos\varphi\cdot I)Z \tag{7}$$

где I – единичная матрица размерности $n\times n$. Легко убедиться в том, что матрица *B* имеет собственные векторы E_r вида

$$E_{k,r} = \frac{1}{\sqrt{n}}e^{i\cdot\frac{2\pi\cdot r}{n}k}\ (k,r=\overline{1,n}), \tag{8}$$

где индекс k соответствует номеру компоненты вектора E_r, а $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица. Векторам (8) соответствуют собственные значения $(-\lambda_r)$, где

$$\lambda_r = 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin^2(\pi rk/n)}{\sin^3(\pi k/n)}.$$

Векторы (8) являются, также, собственными векторами и матрицы K, которая имеет два собственных значения: 0 и n. Действительно,

$$K\cdot E_r = 0 \text{ при } r=\overline{1,n-1} \text{ и } K\cdot E_n = nE_n.$$

Поэтому, определяя матрицу Q, столбцами которой являются векторы E_r, т.е. $Q_{k,r}=E_{k,r}$, с помощью преобразования вида $B\to Q^+BQ$, $K\to Q^+KQ$ можно легко привести матрицы B и K к диагональному виду. В результате уравнение (7) примет вид:

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2} = -\frac{a + e\cos\varphi}{1 + e\cos\varphi} z, \tag{9}$$

где

$$a = \frac{\lambda_r + 8\mu + 8n\delta_{r,n}}{2(4\mu + S_1)}.$$

Уравнение (9) является дифференциальным уравнением второго порядка, которое иногда называют уравнением Хилла. В случае $e = 0$ оно сводится к дифференциальному уравнению гармонических колебаний частоты $\sqrt{a}$. Поскольку $\lambda_r \geq 0$, то $a > 0$ для любого $r = \overline{1,n}$. Следовательно, в случае $e = 0$ решение (5) является устойчивым в линейном приближении для любых возмущений, перпендикулярных к плоскости xOy, в которой расположены орбиты частиц.

Уравнение (9) эквивалентно системе двух дифференциальных уравнений первого порядка с периодической матрицей. Согласно общей теории устойчивости [8, 9] в зависимости от значений параметров a и e ее тривиальное решение может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Границы между областями устойчивости и неустойчивости на координатной плоскости параметров a и e представляют собой некоторые кривые $a = a(e)$, которые определяются из условия существования периодических решений периодов 2π и 4π. Из формы уравнения (9) видно, что если функция $z = z(\varphi)$ является его решением, то функции $z = z(-\varphi)$ и $z = -z(\varphi)$ также будут решениями этого уравнения. Из этого следует, что среди периодических решений уравнения (9) имеются четные и нечетные решения. Четные периодические решения периода 2π будем искать в виде следующего ряда Фурье:

$$z = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\varphi), \tag{10}$$

а нечетные периодические решения того же периода – в виде

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(k\varphi). \tag{11}$$

Периодические решения периода 4π представим аналогичными рядами:

$$z = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(\frac{k}{2}\varphi), \quad z = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(\frac{k}{2}\varphi). \tag{12}$$

Подставляя последовательно решения (10)-(12) в (9) и приравнивая в полученных уравнениях коэффициенты при $\cos(k\varphi)$, $\sin(k\varphi)$, $\cos(\frac{k}{2}\varphi)$, $\sin(\frac{k}{2}\varphi)$ к нулю, получим следующие четыре бесконечные последовательности уравнений для коэффициентов соответствующих рядов Фурье:

$$\begin{aligned} &ac_0 = 0, \quad ec_0 + (a-1)c_1 - \frac{3}{2}ec_2 = 0, \\ &\vdots \\ &-\frac{k(k-2)}{2}ec_{k-1} + (a-k^2)c_k - \frac{k(k+2)}{2}ec_{k+1} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &(a-1)d_1 - \frac{3}{2}ed_2 = 0, \\ &\vdots \\ &-\frac{k(k-2)}{2}ed_{k-1} + (a-k^2)d_k - \frac{k(k+2)}{2}ed_{k+1} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &(a - \frac{1}{4} + \frac{3}{8}e)c_1 - \frac{5}{8}ec_2 = 0, \\ &\vdots \\ &-\frac{(2k-5)(2k-1)}{8}ec_{k-1} + (a-(k-\frac{1}{2})^2)\times \\ &\times c_k - \frac{(2k-1)(2k+3)}{8}ec_{k+1} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &(a - \frac{1}{4} - \frac{3}{8}e)d_1 - \frac{5}{8}ed_2 = 0, \\ &\vdots \\ &-\frac{(2k-5)(2k-1)}{8}ed_{k-1} + (a-(k-\frac{1}{2})^2)\times \\ &\times d_k - \frac{(2k-1)(2k+3)}{8}ed_{k+1} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Это линейные однородные уравнения относительно коэффициентов $c_0, c_1, ..., c_k$ и $d_1, ..., d_k$, которые должны иметь решения, отличные от нуля. Поэтому определитель каждой из систем (13)-(16), содержащий бесконечное число строк и столбцов, должен равняться нулю. В результате получим четыре алгебраические уравнения, решения которых определяют зависимости $a = a(e)$, при которых существуют периодические решения уравнения (9). В явном виде эти зависимости можно установить следующим образом. Рассмотрим, например, первые k уравнений системы (13) и выпишем ее определитель D_k:

$$D_k = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ e & a-1 & -\frac{3}{2}e & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a-4 & -4e & ... & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2}e & a-9 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k(k-2)}{2}e & a-k^2 \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Приравнивая D_k к нулю, из полученного уравнения найдем приближенное решение $a_k = a_k(e)$. Точное решение получается при $k \to \infty$. Легко видеть, что для определителя (17) справедлива следующая рекурентная формула:

$$D_k = (a-k^2)D_{k-1} - \frac{e^2}{2}(k-2)(k-1)k(k+1)D_{k-2}$$

$$(k = 3,4,...) \tag{18}$$

причем

$D_1 = a$, $D_2 = a(a-1)$.

Из (18) следует, что кривые $a = a(e)$ пересекают ось $e = 0$ в точках $a = k^2$ $(k = 0,1,2, \ldots)$. Поэтому при $e \ll 1$ соответствующие зависимости $a = a(e)$ можно представить в виде рядов по e. При этом для вычисления $a = a(e)$ вблизи точки $a = k^2$ с точностью до e^{2p} можно ограничиться решением уравнения $D_{k+p} = 0$. Из соотношения (18) следует, что вычисления с помощью определителей более высокого порядка приведут только к появлению более высоких поправок по e. В результате получаем следующие выражения для $a = a(e)$ с точностью до e^4:

$$a = 0, \quad a = 1, \quad a = 4 - \frac{6}{5}e^2 - \frac{39}{125}e^4, \ \ldots \qquad (19)$$

Аналогичный алгоритм может быть реализован для систем (14)-(16). Например, определитель системы (14) получается из (17) путем вычеркивания первого столбца и первой строки и также удовлетворяет рекурентной формуле (18), но при других начальных условиях:

$$D_1 = a - 1, \ D_2 = (a-1)(a-4).$$

Поэтому зависимости $a = a(e)$, получаемые из системы (14), совпадают с выражениями (19), за исключением случая $a = 0$. Для определителей систем (15), (16) при $k \geq 3$ имеет место следующая рекурентная формула:

$$D_k = \left(a - \frac{(2k-1)^2}{4}\right)D_{k-1} - \\ - \frac{e^2}{64}(2k-5)(2k-3)(2k-1)(2k+1)D_{k-2}, \qquad (20)$$

с начальными условиями

$$D_1 = a - \frac{1}{4} \pm \frac{3e}{8}, \ D_2 = \left(a - \frac{1}{4} \pm \frac{3e}{8}\right)\left(a - \frac{9}{4}\right) + \frac{15e^2}{64}.$$

Как видим из (20), в случае $e = 0$ определители систем (15), (16) будут равны нулю при $a = \frac{(2k-1)^2}{4}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Представляя вблизи этих значений зависимость $a = a(e)$ в виде ряда по e, с точностью до e^4 получаем:

$$a = \frac{1}{4} \mp \frac{3}{8}e + \frac{15}{128}e^2 \mp \frac{45}{2048}e^3 + \frac{885}{32768}e^4,$$
$$a = \frac{9}{4} - \frac{135}{256}e^2 \mp \frac{45}{2048}e^3 - \frac{34695}{262144}e^4, \ \ldots \qquad (21)$$

Графики зависимостей (19), (21) показаны на рисунке 1. Следует отметить, что области нестабильности существуют только между кривыми (21), пересекающими ось $e = 0$ в точках $a = \frac{(2k-1)^2}{4}$ $(k = 1,2,\ldots)$, причем эти области достаточно узкие. Поскольку кривые $a = a(e)$, определяемые из условия равенства нулю определителей систем (13), (14) совпадают, в каждой точке кривых (19) существуют два линейно независимых решения (10), (11) уравнения (9). Следовательно, в этих точках тривиальное решение уравнения (9) устойчиво. Таким образом, если при заданных значениях a и e соответствующая точка оказывается в области нестабильности между кривыми (21), то соответствующее решение уравнения (9) будет неустойчивым.

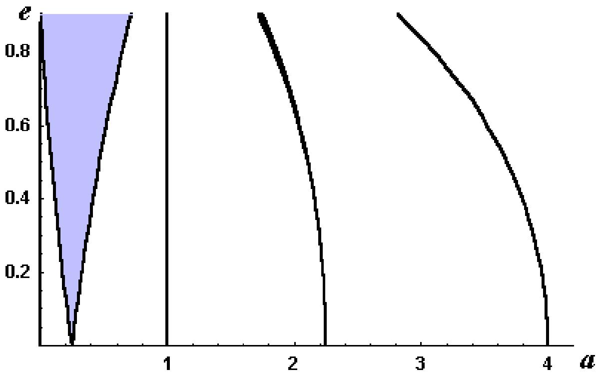

Рис. 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе анализируется линейная устойчивость точных частных решений плоской ньютоновой задачи многих тел, найденных в [3, 4], причем основное внимание уделяется исследованию устойчивости решений при перпендикулярных по отношению к плоскости траекторий частиц возмущениям. Показано, что поведение возмущения $z_j(\varphi)$ определяется значениями эксцентриситета траекторий частиц e и параметра a, который зависит от числа частиц n и соотношения между массами частиц $\mu = m_0 / m$. Найдены уравнения кривых, ограничивающих области нестабильности возмущений $z_j(\varphi)$ на координатной плоскости параметров a и e. Все вычисления и визуализация результатов производятся с помощью системы компьютерной алгебра *Mathematica*.

Автор выражает глубокую признательность проф. Е.А. Гребеникову за полезное и интересное обсуждение рассматриваемой проблемы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. А.Н.Прокопеня, А.В.Чичурин. Применение системы *Mathematica* к решению обыкновенных дифференциальных уравнений: Учеб. пособие. – Мн.: БГУ, 1999. – 265 С.
2. B.Elmabsout. Sur l'existence de certaines configurations d'equilibre relatif dans le probleme des N corps / Celestial Mechanics. – V. 41. – 1988. – 131-151.
3. Е.А.Гребеников. Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел / Математическое моделирование. – Т. 10, № 8. – 1998. – 74-80.
4. E.A.Grebenikov. New exact solutions in the planar symmetrical (n+1)-body problem / Romanian Astronomical Journal. – V. 7, No. 2. – 1997. – 151-156.
5. B.Elmabsout. Stability of Some Degenerate Positions of Relative Equilibrium in the n-Body Problem / Dynamics and Stability of Systems. – V. 9, No. 4. – 1994. – 305-319.
6. B.Elmabsout. Nonlinear Instability of Some Relative Equilibrium Configurations in the (n+1)-Body Problem / Romanian Astronomical Journal. – V. 6, No. 1. – 1996. – 61-71.
7. Г.Н.Дубошин. Небесная механика. Основные задачи и методы. – 3-е изд. – М.: Наука, 1975.– 800 С.
8. R.Grimshaw. Nonlinear Ordinary Differential Equations, CRC Press, 2000, 328 pp.
9. Д.Р.Меркин. Введение в теорию устойчивости движения: Учеб. пособие для вузов. – 3-е изд.– М.: Наука, 1987. – 304 С.

УДК 536.413

Кушнер Т.Л. *Ст. преподаватель каф. физики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.