УДК 517.983.53

Тузик А.И.

ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ С ПОЧТИ СТАБИЛИЗИРУЮЩИМИСЯ МНОЖИТЕЛЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В НОРМАЛЬНОМ И ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЯХ

Продолжается начатое в [1] исследование уравнения, которое с помощью оператора sgn записывается в виде

$$\lambda_0 x_n+\lambda_2 x_{-n}+(-1)^n(\lambda_1 x_n+\lambda_3 x_{-n})+$$
$$+\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\overset{0}{a}_{n-k}+\overset{2}{a}_{n+k}+(-1)^k(\overset{1}{a}_{n-k}+\overset{3}{a}_{n+k})]x_k+$$
$$+sgn(n+0{,}5)[\mu_0 x_n+\mu_2 x_{-n}+(-1)^n(\mu_1 x_n+\mu_3 x_{-n})]+$$
$$+\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\overset{0}{b}_{n-k}+\overset{2}{b}_{n+k}+(-1)^k(\overset{1}{b}_{n-k}+\overset{3}{b}_{n+k})]\,sgn(k+0{,}5)x_k=f_n,$$
$$\lambda_k,\ \mu_k-const,\ k=\overline{0,3};\ n\in Z. \qquad (1)$$

Предполагается, что $\{\overset{i}{a}_n\},\{\overset{i}{b}_n\}\in l_1,\ i=\overline{0,3};\ \{f_n\}\in l_2$. Решение уравнения (1) будем искать в классе $\{x_n\}\in l_2$. Частные случаи уравнения (1) с постоянными коэффициентами, когда все множители при $(-1)^k$, $k\in Z$, равны нулю, рассматривались многими авторами [2–4] в различных пространствах последовательностей.

Отметим, что наличие почти стабилизирующихся [4, с.127] множителей $(-1)^k$, $k\in Z$, изменяющих знак аргумента у преобразования Лорана [5,6], позволяет рассматривать новые [5–10] дискретные уравнения типа свертки с переменными коэффициентами (ср. [4, 11–14]). В силу многочисленных и разнообразных приложений дискретных уравнений типа свертки [2, 13, 15] исследование не изученных ранее более общих уравнений такого типа является актуальным как для теории, так и для приложений.

Применяя к равенству (1) преобразование Лорана [2, с.222] и учитывая его свойства [2–12], получим равносильное сингулярное интегральное уравнение с конечной коммутативной [16] группой $G_4=\{\alpha_0^+,\ \alpha_1^+,\ \alpha_2^-,\ \alpha_3^-=\alpha_1^+(\alpha_2^-)\}$ прямых и обратных сдвигов Карлемана, где $\alpha_0^+=t$, $\alpha_1^+=-t$, $\alpha_2^-=t^{-1}$, $\alpha_3^-=-t^{-1}$, $|t|=1$

$$(KX)(t)\equiv\sum_{k=0}^{3}\{[\lambda_k+A_k(t)]X[\alpha_k(t)]+$$
$$+[\mu_k+B_k(t)]S(X[\alpha_k(t)])\}=F(t),\ |t|=1, \qquad (2)$$

где S – оператор сингулярного интегрирования

$$S(X[\alpha_k(t)])=\frac{1}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{X[\alpha_k(\tau)]}{\tau-t}d\tau.$$

Большими буквами обозначены преобразования Лорана бесконечномерных векторов, обозначенных соответствующими малыми буквами. В силу однозначной обратимости преобразования Лорана уравнение (2) равносильно уравнению (1) в том смысле, что они одновременно разрешимы или неразрешимы и в случае разрешимости имеют одинаковое число линейно независимых решений.

Выполняя в (2) необходимые замены переменной [16–18], придем [1] к соответствующей системе четырех сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши относительно неизвестной вектор–функции $\Phi(t)=\{X(t),\ X(-t),\ X(t^{-1}),\ X(-t^{-1})\}$, матричная запись которой имеет вид

$$(M\Phi)(t)\equiv A(t)\Phi(t)+\frac{B(t)}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\Phi(\tau)}{\tau-t}d\tau+$$
$$+\int_{|\tau|=1}M(t,\tau)\Phi(\tau)d\tau=F_1(t),\ |t|=1, \qquad (3)$$

где:

$$A(t)=\left(\begin{array}{cc|cc}
\lambda_0+A_0(t) & \lambda_1+A_1(t) & \lambda_2+A_2(t) & \lambda_3+A_3(t)\\
\lambda_1+A_1(-t) & \lambda_0+A_0(-t) & \lambda_3+A_3(-t) & \lambda_2+A_2(-t)\\ \hline
\lambda_2+A_2(t^{-1}) & \lambda_3+A_3(t^{-1}) & \lambda_0+A_0(t^{-1}) & \lambda_1+A_1(t^{-1})\\
\lambda_3+A_3(-t^{-1}) & \lambda_2+A_2(-t^{-1}) & \lambda_1+A_1(-t^{-1}) & \lambda_0+A_0(-t^{-1})
\end{array}\right),$$

$$B(t)=\left(\begin{array}{cc|cc}
\mu_0+B_0(t) & \mu_1+B_1(t) & \mu_2+B_2(t) & \mu_3+B_3(t)\\
\mu_1+B_1(-t) & \mu_0+B_0(-t) & \mu_3+B_3(-t) & \mu_2+B_2(-t)\\ \hline
-\mu_2-B_2(t^{-1}) & -\mu_3-B_3(t^{-1}) & -\mu_0-B_0(t^{-1}) & -\mu_1-B_1(t^{-1})\\
-\mu_3-B_3(-t^{-1}) & -\mu_2-B_2(-t^{-1}) & -\mu_1-B_1(-t^{-1}) & -\mu_0-B_0(-t^{-1})
\end{array}\right),$$

$$M(t,\tau)=\frac{\tau^{-1}}{\pi i}\left(\begin{array}{cc|cc}
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\ \hline
\mu_2+B_2(t^{-1}) & \mu_3+B_3(t^{-1}) & \mu_0+B_0(t^{-1}) & \mu_1+B_1(t^{-1})\\
\mu_3+B_3(-t^{-1}) & \mu_2+B_2(-t^{-1}) & \mu_1+B_1(-t^{-1}) & \mu_0+B_0(-t^{-1})
\end{array}\right),$$

$$F_1(t)=\{F(t),\ F(-t),\ F(t^{-1}),\ F(-t^{-1})\}.$$

***Тузик Альфред Иванович**. К.ф.–м.н., профессор каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Пусть $R(t)=A(t)-B(t),\ S(t)=A(t)+B(t)$. Справедливы [19, 20] следующие тождества

$$\det R(t)\equiv\det R(-t)\equiv\det S(t^{-1})\equiv\det S(-t^{-1}),\quad(4)$$

которые *в нормальном случае*

$$\det R(t)\neq 0,\ \det S(t)\neq 0,\ |\,t\,|=1\quad(5)$$

позволяют упростить [19–21] формулу индекса системы сингулярных интегральных уравнений (3), приведенную в [1].

Из результатов [1, 19–21] следует

Теорема. *При выполнении условий нетеровости (5) индекс сингулярного интегрального уравнения (2) с конечной коммутативной группой прямых и обратных сдвигов Карлемана вычисляется по формуле*

$$Ind\ K=\frac{1}{4}Ind\ M=\frac{1}{8\pi}\left\{arg\frac{\det R(t)}{\det S(t)}\right\}_{|t|=1}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\{arg\det R(t)\}_{|t|=1}=-\frac{1}{4\pi}\{arg\det S(t)\}_{|t|=1}.\quad(6)$$

Исключительный случай системы (3) рассмотрим, предполагая, с учетом выполнения соотношений (4), что

$$\begin{aligned}\det R(t)&=\prod_{k=1}^{m}(t^2-t_k^2)^{n_k}r(t^2),\\ \det S(t)&=\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{t^2}-t_k^2\right)^{n_k}r\left(\frac{1}{t^2}\right),\end{aligned}\quad(7)$$

где $|t_k|=1$, $k=\overline{1,m}$; n_k – целые неотрицательные числа; $r(t)\neq 0$, $|\,t\,|=1$.

Отметим, что в силу соотношений (4) общие нули у $\det R(t)$ и $\det S(t)$ на $|t|=1$ могут быть только в точках $t_k=\pm 1,\ \pm i$, т.е. в неподвижных точках обратных сдвигов, $\alpha_2^-(t)=t^{-1}$ и $\alpha_3^-(t)=-t^{-1}$.

Система (3) при выполнении условий (7) может быть нормализована, т.е. сведена [3, 22] к равносильной системе сингулярных интегральных уравнений нормального типа, к которой затем применяются известные [23, 24] результаты по ее разрешимости.

Находя решение уравнения (2) или, что равносильно, системы (3), определим решение исходного уравнения (1) по формуле

$$x_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{X(t)}{t^{n+1}}dt,\ n\in Z.$$

Результаты настоящей статьи доложены автором 17.02.2001г. на международной конференции "АМАДЕ – 2001" [25].

Замечание. Аналогично, с учетом [19–21], может быть упрощена формула индекса и изучены исключительные случаи *парного* дискретного уравнения типа свертки с почти стабилизирующимися множителями специального вида, первоначально рассмотренного в [9].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тузик А.И. О нетеровости одного дискретного уравнения типа свертки с почти стабилизирующимися множителями // Дифференц. уравнения. 1993. Т.29, № 10. С. 1829 – 1831.
2. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
3. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 493 с.
4. Карапетянц Н.К., Самко С.Г. Уравнения с инволютивными операторами и их приложения. – Ростов–на–Дону: РГУ, 1988. – 192 с.
5. Тузик А.И. Дискретные уравнения типа свертки, сводящиеся к четырехэлементным краевым задачам со сдвигом Карлемана // Докл. АН БССР. 1988. Т.32, № 12. С. 1065–1068.
6. Тузик А.И. О разрешимости одного дискретного уравнения типа свертки с переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1989. Т.25, № 8. С.1462–1464.
7. Тузик А.И. О разрешимости одного класса дискретных уравнений типа свертки с сопряжением // Докл. АН БССР. 1989. Т.33, № 7. С.595–598.
8. Тузик А.И. О нетеровости одного парного дискретного уравнения типа свертки с почти стабилизирующимися множителями // Докл. АН Беларуси. 1993. Т.37, № 2. С. 118 – 120.
9. Тузик А.И. Парное дискретное уравнение типа свертки с почти стабилизирующимися множителями специального вида // Весці АН Беларусі. Сер.фіз.–мат. навук 1994. № 4. С. 107 – 109.
10. Шилин А.П. К решению в замкнутой форме дискретных уравнений типа свертки с почти стабилизирующимися множителями // Вестник БГУ. Сер.1. 1994, № 2. С. 44–46.
11. Тузик А.И. Дискретные уравнения типа свертки с коэффициентами степенного роста // Докл. АН БССР. 1979. Т.23, № 12. С. 1061 – 1064.
12. Тузик А.И. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений с коэффициентами степенного роста // Весці АН Беларусі. Сер.фіз.–мат. навук 1979. № 6. С. 5 – 9.
13. Козицкий В.А. Бесконечные алгебраические системы с переменными коэффициентами и обобщенными свертками: Дисс. … канд.физ.–мат. наук. – Мн.: БГУ, 1987. – 105 с.
14. Шилин А.П. Бесконечные алгебраические системы со степенными множителями // Весці НАН Беларусі. Сер.фіз.–мат. навук 1999. № 2. С.50–53.
15. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.:Наука, 1977. – 640 с.
16. Башкарев П.Г., Карлович Ю.Н., Нечаев А.П. К теории сингулярных интегральных операторов с конечной группой сдвигов // Докл. АН СССР. 1974. Т.219, № 2. С. 272–274.
17. Сосунов А.С. Формула индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений с двумя сдвигами Карлемана // Материалы всесоюзн. конф. по краевым задачам. – Казань: КГУ, 1970. С.249 – 253.
18. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
19. Тузик А.И. Об индексе сингулярного интегрального уравнения с конечной коммутативной группой прямых и обратных сдвигов Карлемана // Тезисы докл. VII Белорусск. матем. конф. Ч.2. – Мн.: ИМ АНБ, 1996. С. 27 – 28.
20. Тузик А.И. Об индексе сингулярного интегрального уравнения с конечной коммутативной группой прямых и обратных сдвигов Карлемана // Весці НАН Беларусі. Сер.фіз.–мат. навук 1998. № 3. С. 18 – 20.
21. Тузик А.И. Упрощение формулы индекса сингулярного интегрального уравнения с конечной коммутативной группой прямых и обратных сдвигов Карлемана // Тезисы докл. междунар. конф. "Аналитические методы анализа и дифференц. уравн." – Мн.: БГУ, 1999. С. 221 – 222.
22. Тузик А.И. Особые интегральные уравнения с ядром Коши в исключительном случае. Некоторые приложения: Дисс. … канд.физ.–мат. наук. – Мн.: БГУ, 1973. – 96 с.
23. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
24. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 380 с.

25. Тузик А.И. Дискретные уравнения типа свертки с почти стабилизирующимися множителями специального вида // Тезисы докл. междунар. конф. "Аналитические методы анализа и дифференц. уравн." – Мн.: БГУ, 2001. С. 162 – 163.

УДК 681.324

Гладкий И.И., Головко В.А., Махнист Л.П.

ОБУЧЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим нейронную сеть, состоящую из $\boldsymbol{n}$ нейронных элементов распределительного слоя и $\boldsymbol{m}$ - выходного слоя (рисунок 1).

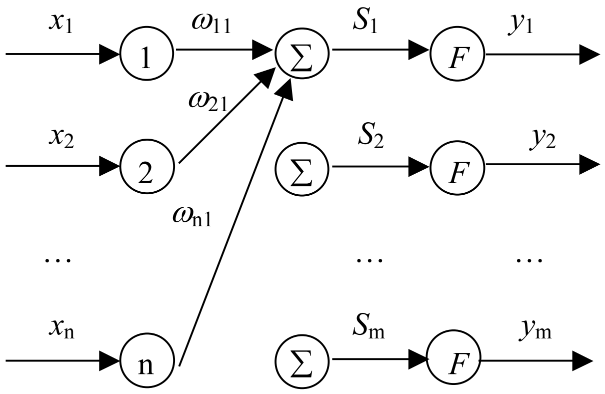

Рисунок 1 – Схема функционирования нейронной сети.

Для данной сети каждый нейрон распределительного слоя имеет синаптические связи со всеми нейронами обрабатывающего слоя. В качестве нейронов выходного слоя используются элементы с некоторой функцией активации $\boldsymbol{F}$.

Рассмотрим наиболее распространенные дифференцируемые на всей числовой прямой функции активации, их производные первого и второго порядка:

1). Линейная функция: $F(S)=cS$, $F(0)=0$,
$F'(S)=c$, $F'(0)=c$,
$F''(S)=0$, $F''(0)=0$.

2). Сигмоидная функция с областью значений $E(F)=(0;1)$: $F(S)=\dfrac{1}{1+e^{-cS}}$, $F(0)=\dfrac{1}{2}$,

$$F'(S)=\frac{ce^{-cS}}{\left(1+e^{-cS}\right)^2}=\frac{c}{1+e^{-cS}}\cdot\left(1-\frac{1}{1+e^{-cS}}\right)=$$
$$=cF(S)(1-F(S)),$$
$$F'(0)=\frac{c}{4},$$

$$F''(S)=cF'(S)-2cF(S)F'(S)=cF'(S)(1-2F(S))=$$
$$=c^2F(S)(1-F(S))(1-2F(S)),$$
$$F''(0)=0.$$

3). Биполярная сигмоидная функция с областью значений $E(F)=(-1;1)$:

$$F(S)=\frac{2}{1+e^{-cS}}-1,\ F(0)=0,$$

$$F'(S)=\frac{2c\cdot e^{-cS}}{\left(1+e^{-cS}\right)^2}=\frac{c}{2}\cdot\left(1+\left(\frac{2}{1+e^{-cS}}-1\right)\right)\times$$
$$\times\left(1-\left(\frac{2}{1+e^{-cS}}-1\right)\right)=\frac{c}{2}\left(1-F^2(S)\right),$$

$$F'(0)=\frac{c}{2},$$

$$F''(S)=-cF(S)F'(S)=-\frac{c^2}{2}F(S)\left(1-F^2(S)\right),$$

$$F''(0)=0.$$

4). Функция распределения Коши с областью значений $E(F)=(0;1)$:

$$F(S)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg(cS),\ F(0)=\frac{1}{2},$$

$$F'(S)=\frac{c}{\pi\left(1+(cS)^2\right)}=\frac{c}{\pi\left(1+tg^2\left(\pi F(S)-\frac{\pi}{2}\right)\right)},$$

$$F'(0)=\frac{c}{\pi}.$$

$$F''(S)=-\frac{2c^3S}{\pi\left(1+(cS)^2\right)^2}=-\frac{2c^2tg\left(\pi F(S)-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi\left(1+tg^2\left(\pi F(S)-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2},$$

$$F''(0)=0.$$

5). Обратная тригонометрическая функция арктангенс с областью значений $E(F)=(-1;1)$:

Гладкий Иван Иванович. *Ассистент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Головко Владимир Адамович. *Докторант ИТК НАНБ, к.т.н., доцент, профессор каф. ЭВМиС Брестского государственного технического университета.*
Махнист Леонид Петрович. *К.т.н., доцент каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 22017, г. Брест, ул. Московская, 267.