можность исследовать сходимость процедуры обучения нейронной сети [2].

СПИСОК ИПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Головко В.А. Нейроинтеллект: теория и применение. Книга 1: Организация и обучение нейронных сетей с прямыми и обратными связями. – Брест: Изд. БПИ, 1999. – 264 с.
2. Головко В.А., Махнист Л.П. Модификации алгоритмов обучения линейных нейронных сетей // Вестник Брестского государственного технического университета. – Брест: БГТУ, 2000. – № 4 (4): Машиностроение, автоматизация, ЭВМ.

УДК 513.82

Андреев А.С.

ПОСТРОЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО ЛИФТА ПОДМНОГООБРАЗИЯ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА В СТРУКТУРНУЮ ГРУППУ ЛИ И В ЕЕ АЛГЕБРУ ЛИ

Приведём основные факты теории вычислительного аппарата метода построения канонического репера [1], [2].

Рассмотрим множество Q_1 всех n-мерных подпространств, касательных к M в точке $\pi(e)$. Наряду с множеством Q_1 рассмотрим множество $Z_1 = \{ d\pi_e^{-1}(😐) | 😐 \in Q_1 \}$. Множество Q_1 является H-пространством. Множество Z_1 также является H-пространством, причем действие группы H в Z_1 индуцируется присоединенным представлением Ad. H-пространства Q_1 и Z_1 изоморфны [6]. Отсюда, в частности, следует, что

$$H_1 = \{ a \in H | Ad\, a(😐'_1) = 😐'_1 \}. \quad (1)$$

Пусть $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r\}$ – базис пространства ☺*, дуального к алгебре Ли ☺ группы Ли G, $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^t\}$ – базис пространства $😐'^{*}_1$, дуального к $😐'_1$, $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^s\}$ – базис пространства 🖗*, дуального к 🖗. При этом $t = s + n$. Тогда система Пфаффа, определяющая пространство $😐'_1$, будет иметь вид:

$$\omega^{t+1} = 0,\ \omega^{t+2} = 0, \dots,\ \omega^r = 0. \quad (2)$$

Найдем внешние дифференциалы форм системы (2):

$$d\omega^{t+1} = 0,\ d\omega^{t+2} = 0, \dots,\ d\omega^r = 0. \quad (3)$$

Введем индексы суммирования:

$i, j = 1,2,\dots,r$; $\sigma, \tau = s+1, s+2, \dots, r$;

$\varepsilon, \mu = t+1, t+2, \dots, r$;

$a, b, c = 1,2,\dots,s_1$; $\alpha, \beta, \gamma = 1,2,\dots,t$;

$p, q, l = s_1+1, s_1+2, \dots, s$; $\rho, \delta = s+1, s+2, \dots, t$.

Разложим внешние дифференциалы (3) по базису:

$$d\omega^{t+1} = \Lambda_{ij}^{t+1}\omega^i \wedge \omega^j, \dots,\ d\omega^r = \Lambda_{ij}^{r}\omega^i \wedge \omega^j. \quad (4)$$

Предположим, что подмногообразие $(🖗_0, f)$ продолжается в пространство $M_1 = G/H_1$ и $f_1 : 🖗_0 \to M_1$ – соответствующее продолжение, $😐_1 = T_{f(0)}(🖗)$, $😐'_1 = d\pi_e^{-1}(😐_1)$, $😐_2 = T_{f_1(0)}(🖗)$, $😐'_2 = d\pi_{1|e}^{-1}(😐_2)$.

Лемма 1 [1], [2]. В формулах (4) равны нулю коэффициенты

$$\Lambda_{a\alpha}^{t+1}, \dots, \Lambda_{a\alpha}^{r};\ \Lambda_{p,q}^{t+1}, \dots, \Lambda_{p,q}^{r}.$$

Следствие 1 [1], [2]. Система форм

$$\begin{cases} \omega^{t+1} = 0, \dots, \omega^r = 0; \\ d\omega^{t+1} = 0, \dots, d\omega^r = 0 \end{cases} \quad (5)$$

эквивалентна системе

$$\omega^{t+1} = 0, \dots, \omega^r = 0; \quad (а)$$

$$\omega^\rho \wedge \theta_\rho^{t+1} = 0, \dots, \omega^\rho \wedge \theta_\rho^{r} = 0. \quad (б) \quad (6)$$

Пусть $🖗_1$ – алгебра Ли группы H_1, тогда

$$🖗_1 = \{ v \in 🖗 | [v, 😐'_1] \subset 😐'_1 \} \quad (7)$$

Пусть $😐'_1 = 🖗 \oplus N$, $😐'_2 = 🖗_1 \oplus N$.

Теорема 1 [1], [2]. Если выполняется условие

$$[N, N] \subset 😐'_1, \quad (8)$$

то внешние дифференциалы $d\omega^{t+1}, \dots, d\omega^r$ обращаются в нуль в пространстве $😐'_2$.

Заметим, что условие (8) всегда выполняется для одномерных подмногообразий ($n=1$), а также для подмногообразий любой размерности в случае, когда группа Ли G является полупрямым произведением группы стационарности точки пространства M и абелевой группы, в частности, для всех евклидовых и псевдоевклидовых пространств.

Используя лемму Картана, систему (6,б) на пространстве $😐'_2$ можно переписать в виде [1], [2]: $\theta_\rho^{t+1} = A_{\rho\delta}^{t+1}\omega^\delta, \dots,$ $\theta_\rho^{r} = A_{\rho\delta}^{r}\omega^\delta$,

а систему (5) в виде:

$$\omega^{t+1} = 0, \dots,\ \omega^r = 0;$$

$$\Omega_\rho^{t+1} \equiv \theta_\rho^{t+1} - A_{\rho\delta}^{t+1}\omega^\delta = 0, \dots,\ \Omega_\rho^{r} \equiv \theta_\rho^{r} - A_{\rho\delta}^{r}\omega^\delta = 0. \quad (9)$$

Теорема 2 [1], [2]. Система 1-форм

$$\omega^{t+1} = 0, \dots,\ \omega^r = 0,\ \Omega_\rho^{t+1}, \dots,\ \Omega_\rho^r \quad (10)$$

есть система форм Пфаффа, определяющая подпространство $😐'_2$.

Андреев Алексей Сергеевич. *Студент V курса математического факультета Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, 224665, г. Брест, бульвар Космонавтов, 21.

Теорема 3 [1], [2]
Система форм

$$\Omega^{t+1}_{\rho}, \ldots, \Omega^{r}_{\rho}, \ \rho = s+1, \ldots, t, \qquad (11)$$

рассматриваемая как алгебраическая система относительно форм $\omega^{s_1+1} = 0, \ldots, \omega^{s} = 0$, разрешима относительно этих форм. При этом получается выражение форм $\omega^{s_1+1} = 0, \ldots, \omega^{s} = 0$ через формы $\omega^{s+1} = 0, \ldots, \omega^{t} = 0$.

Разрешив систему (11) относительно форм $\omega^{s_1+1} = 0, \ldots, \omega^{s} = 0$, найдем:

$$\omega^{s_1+1} = \lambda^{s_1+1}_{\rho}\omega^{\rho}, \ldots, \ \omega^{s} = \lambda^{s}_{\rho}\omega^{\rho}. \qquad (12)$$

Система (12) эквивалентна системе (11). Тогда систему (10) можно переписать в виде:

$$\omega^{t+1} = 0, \ldots, \quad \omega^{r} = 0, \quad \omega^{s_1+1} - \lambda^{s_1+1}_{\rho}\omega^{\rho} = 0, \ldots, \quad \omega^{s} - \lambda^{s}_{\rho}\omega^{\rho} = 0. \qquad (13)$$

Коэффициенты $\lambda^{s_1+1}_{\rho}, \ldots, \lambda^{s}_{\rho}$, $\rho = s+1, \ldots, t$ называются *дифференциальными инвариантами подмногообразия* (☟$_0$, f), *полученными при первом продолжении*. Может быть, среди полученных дифференциальных инвариантов есть зависимость. Чтобы получить независимые инварианты первого продолжения, надо подействовать на подмногообразие (☟$_0$, f) преобразованием h_1 группы H_1. При этом, подмногообразие (☟$_0$, f) перейдет в (☟$_0$, $h_1 \circ f$), а подпространство ☹$_1$ (а следовательно и ☹$'_1$) не изменится (см. (1)), а подпространство ☹$_2$ и соответственно ☹$'_2$ изменится. При этом надо так подобрать элемент h_1, чтобы ☹$'_2$ привелось к возможно более простому виду. В соответствии с этим и система (10), определяющая ☹$'_2$, приведется к более простому виду и оставшиеся коэффициенты будут независимыми дифференциальными инвариантами первого продолжения.

Замечание 1 [2]
Теорема 3 верна как при выполнении условия $\dim H - \dim H_1 = \dim Q$, так и в случае

$$\dim Q_1 > \dim H - \dim H_1. \qquad (14)$$

Рассмотрим теперь подмногообразие (☟$_0$, f_1) пространства $M_1 = G/H_1$ и применим к нему аналогичные рассуждения. Пусть f_2 : ☟$_0 \to G/H_2$ – продолжение отображения f_1 в пространство $M_2 = G/H_2$, где H_2 – группа стационарности пространства ☹$_2 = T_{f_1(0)}$(☟$_1$). Системой Пфаффа, определяющей ☹$'_2$, будет система (10). Продолжив ее и применив лемму Картана, придем, аналогично предыдущему, к системе Пфаффа, определяющей подпространство ☹$'_3$, где ☹$_3 = T_{f_2(0)}$(☟$_2$), ☹$'_3 = d\pi^{-1}_{2|e}$(☹$_3$), $\pi_2 : G \to G/H_2 : a \mapsto aH_2$ – каноническая проекция.

При этом получим новые дифференциальные инварианты. Выберем, как и выше, среди дифференциальных инвариантов независимые. При этом будем действовать преобразованиями группы H_2.

Предположим, что повторив операцию продолжения $p+1$ раз, мы приведем группу стационарности пространства ☹$_{p+1}$ к единице: $H_{p+1} = e$. При этом получится система Пфаффа, определяющая пространство ☹$'_{p+2}$:

$$\omega^{1} = \lambda^{1}_{\rho}\omega^{\rho}, \ldots, \ \omega^{s} = \lambda^{s}_{\rho}\omega^{\rho}, \ \omega^{t+1} = 0, \ldots, \ \omega^{r} = 0, \qquad (15)$$

в которой все формы выражены через базисные формы $\omega^{s+1} = 0, \ldots, \omega^{t} = 0$.

Определение
Коэффициенты $\lambda^{1}_{\rho}, \ldots, \lambda^{s}_{\rho}$ называются *дифференциальными инвариантами подмногообразия* (☟$_0$, f) в точке $f(0)$.

При построении канонического репера в произвольной точке подмногообразия (☟$_0$, f), получим дифференциальные инварианты $\lambda^{1}_{\rho}(x_0), \ldots, \lambda^{s}_{\rho}(x_0)$, $x_0 \in$ ☟$_0$, являющиеся функциями. Эти функции определяют подмногообразие (☟$_0$, f) с точностью до преобразования группы G [2], и потому образуют полную систему дифференциальных инвариантов подмногообразия (☟$_0$, f).

Чтобы получить канонический репер и дифференциальные инварианты подмногообразия (☟$_0$, f) в произвольной точке $x \in$ ☟ $= f$(☟$_0$), нужно перейти от подмногообразия (☟$_0$, f) к подмногообразию (☟$_0$, $a \circ f$), причем a выбрать так, чтобы $a \circ x = \pi(e)$. Возможен и второй путь, при котором по аналогии с вышеописанным непосредственно используются подпространства ☹$'_{1|x}, \ldots,$ ☹$'_{p+1|x}$.

Таким образом, строить канонический репер и находить дифференциальные инварианты можно сразу для всех точек подмногообразия (☟$_0$, f).

Определение
Систему (15) будем называть *характеризующей системой* подмногообразия (☟$_0$, f).

Рассмотрим проблему эквивалентности подмногообразий однородного пространства $M = G/H$.

Пусть заданы два подмногообразия (☟$_0$, f) и (☟$_0$, g) пространства M.

Определение
Два подмногообразия (☟$_0$, f) и (☟$_0$, g) однородного G-пространства M называются *эквивалентными* (или *G-эквивалентными*), если существует элемент $a \in G$, что

$$g(x_0) = T_a(f(x_0)) \ \forall x_0 \in \text{☟}_0. \qquad (16)$$

Определение
Подмногообразия (☟$_0$, f) и (☟$_0$, g) однородного пространства M будем называть *эквивалентными по образу*, если существует элемент $a \in G$, такой, что g(☟$_0$) $= T_a(f$(☟$_0$)).

Очевидно, что эквивалентные подмногообразия являются эквивалентными по образу.

В [8] подмногообразию $(\text{☟}_0, f)$, для которого возможно построение канонического репера, была сопоставлена цепочка подгрупп $H \supset H_1 \supset \ldots \supset H_{p+1} = e$, названная типовой цепочкой или типом подмногообразия $(\text{☟}_0, f)$. Нетрудно видеть, что каждая подгруппа этой цепочки определена с точностью до сопряженности в группе G.

Определение Подмногообразия, имеющие одинаковые (с точностью до сопряженности) типовые цепочки, будем называть *однотипными*.

Теорема 1 [1] Подмногообразия, эквивалентные по образу, однотипны.

С другой стороны, существуют однотипные подмногообразия, не эквивалентные по образу. Например, эллипс и гипербола на евклидовой плоскости. Таким образом, классификация подмногообразий по типам более широкая, чем по эквивалентности.

Имеет место следующий критерий эквивалентности подмногообразий.

Теорема 2 [2] Два подмногообразия $(\text{☟}_0, f)$ и $(\text{☟}_0, g)$ однородного G-пространства $M = G/H$ эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\hat{f}^*(\omega^i) = \hat{g}^*(\omega^i), \tag{17}$$

$i = 1,2,\ldots,r$, где ω^i – базисные левоинвариантные формы на группе Ли G (т.е. базис в ☺^*), а $\hat{f}$ и $\hat{g}$ – канонические лифты подмногообразий $(\text{☟}_0, f)$ и $(\text{☟}_0, g)$.

Следствие 1 [2] Подмногообразия $(\text{☟}_0, f)$ и $(\text{☟}_0, g)$ однородного G-пространства M эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны (в группе G) их канонические лифты.

Результат действия на канонический лифт подмногообразия внутренних автоморфизмов описывается следующей теоремой.

Теорема 3 [2] Если канонический лифт подмногообразия $(\text{☟}_0, f)$ по системе подпространств $\text{☹}_1, \text{☹}_2, \ldots, \text{☹}_{p+1}$ подвергнуть преобразованию $\text{☺}(h): G \to G : a \mapsto hah^{-1}$, то получим канонический лифт подмногообразия $(\text{☟}_0, T_h \circ f)$, построенный по системе подпространств

$$h \circ \text{☹}_1, h \circ \text{☹}_2, \ldots, h \circ \text{☹}_{p+1}. \tag{18}$$

Выше каждому подмногообразию $(\text{☟}_0, f)$, для которого возможно построение канонического репера, была отнесена совокупность функций $\lambda^1_\rho(x_0), \ldots, \lambda^s_\rho(x_0)$, $x_0 \in \text{☟}_0$, которые называются дифференциальными инвариантами подмногообразия $(\text{☟}_0, f)$. Справедлива теорема о том, что два подмногообразия однородного пространства одинаковой размерности эквивалентны в том и только том случае, если в соответствующих точках их дифференциальные инварианты совпадают. Будем считать, что соответствие между точками подмногообразий задается с помощью прообразов. Что же означает "одинаковые дифференциальные инварианты"?

Система (15), задающая дифференциальные инварианты подмногообразия $(\text{☟}_0, f)$, дает выражение левоинвариантных форм группы через некоторые базисные: $\omega^{s+1} = 0, \ldots, \omega^t = 0$. Базисные формы выбираются произвольно с тем условием, что они, будучи ограниченными на $T(\text{✋}\hat{\text{❡}})$, образуют там базис.

Вид функций, являющихся дифференциальными инвариантами, зависит от выбора базиса на $T(\text{✋}\hat{\text{❡}})$. Выберем базис $V = \{V_1, \ldots, V_n\}$ векторных полей на ☟_0. Условимся в качестве базисных форм подмногообразия $(\text{☟}_0, f)$ в точке $x_0 \in \text{☟}_0$ брать формы $\widetilde{d\hat{f}(V_i)^*}$, где знак * означает форму, дуальную соответствующему вектору, а знак ~ означает ее левоинвариантное распространение на группу Ли G. При этом понятие "дифференциальные инварианты" приобретает конкретность для подмногообразия $(\text{☟}_0, f)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4 [2] Для того, чтобы подмногообразия $(\text{☟}_0, f)$ и $(\text{☟}_0, g)$ были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы существовал базис векторных полей $V = \{V_1, \ldots, V_n\}$ на ☟_0, такой, что $\widetilde{d\hat{f}(V_i)^*} = \widetilde{d\hat{g}(V_i)^*}$ и для любых соответствующих точек этих подмногообразий дифференциальные инварианты, найденные соответственно в базисах $d\hat{f}(V_i)^*$ и $d\hat{g}(V_i)^*$ совпадают.

Рассмотрим теперь введенное в [8] формулой (13) каноническое вложение $\check{f}$ подмногообразия $(\text{☟}_0, f)$ в алгебру Ли ☺ структурной группы Ли G:

$$\check{f} : \text{☟}_0 \to \text{☺}: x_0 \mapsto exp^{-1}\left(\hat{f}(x_0)\right). \tag{19}$$

Справедлива формула [7, с. 136]:

$$exp\, Ad(\sigma)X = J(\sigma)(exp\, X). \tag{20}$$

Рассмотрим $\check{f} = exp^{-1} \circ \hat{f}$. Отсюда: $\hat{f} = exp \circ \check{f}$. В силу (20) имеем:

$$J(h)\left(exp\, \check{f}(x_0)\right) = exp\, Ad\, h\left(\check{f}(x_0)\right) = J(h)\left(\hat{f}(x_0)\right),$$

$$x_0 \in \text{☟}_0. \tag{21}$$

Отсюда следует, что $Ad(h)\check{f}$ есть образ при отображении exp^{-1} канонического лифта подмногообразия $(\text{☟}_0, T_h \circ f)$ по совокупности подпространств (18).

Таким образом, справедлива теорема:

Теорема 5 [2] Если на каноническое вложение $\check{f}$ подмногообразия (👎$_0$, f) подействовать преобразованием $Ad\,h$ присоединенной группы $Ad\,H$, то оно преобразуется в каноническое вложение подмногообразия (👎$_0$, $T_h \circ f$) по совокупности подпространств (18).

Применив к равенству (21) каноническую проекцию π, получим:

$$\pi \circ J(h) \circ exp\,\check{f}(x_0) = \pi \circ exp\,Ad\,h\left(\check{f}(x_0)\right) = \pi \circ J(h)\left(\hat{f}(x_0)\right) \tag{22}$$

Учитывая, что $\pi \circ J(h) = T_h \circ \pi$, $\pi \circ \hat{f} = f$. Отсюда получим:

$$T_h \circ f(x_0) = \pi \circ J(h)\left(\hat{f}(x_0)\right) \tag{23}$$

и

$$T_h \circ f(x_0) = \pi \circ exp \circ Ad\,h\left(\check{f}(x_0)\right). \tag{24}$$

Равенства (37) и (38) вместе с теоремами 3 и 5 доказывают, что имеет место следующая теорема:

Теорема 6 [2] Эквивалентность относительно внутренних автоморфизмов группы H на множестве всех канонических лифтов n-мерных подмногообразий однородного пространства G/H индуцирует H-эквивалентность соответствующих подмногообразий однородного пространства G/H. Эквивалентность относительно присоединенной группы $Ad\,H$ на множестве всех канонических вложений n-мерных подмногообразий однородного пространства G/H индуцирует H-эквивалентность соответствующих подмногообразий однородного пространства G/H.

Поскольку в однородном пространстве G/H проблема G-эквивалентности подмногообразий сводится к проблеме H-эквивалентности, то теоремы 5,6 сводят проблему G-эквивалентности подмногообразий в однородном пространстве $M = G/H$ к проблеме H-эквивалентности подмногообразий в алгебре Ли ☺ структурной группы Ли G.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Юдов А.А. Описание и обоснование метода Картана построения канонического репера подмногообразия. // Известия АН БССР, деп. ВИНИТИ, 1982 г., №359582
2. Юдов А.А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства G в структурную группу Ли и ее алгебру Ли. Проблема эквивалентности подмногообразий пространства ${}^2R_4$. // Известия АН БССР, деп. ВИНИТИ, 1989 г., №1498-В89
3. Юдов А.А. Основное уравнение подмногообразия однородного пространства. Тезисы докладов. Математическая конференция “Еругинские чтения-III”, 1996 г.
4. Кожух И.Г., Юдов А.А. О геометрических приложениях одного матричного дифференциального уравнения. Тезисы докладов. Математическая конференция “Еругинские чтения-IV”, 1997 г.
5. Кожух И.Г., Юдов А.А. Некоторые геометрические приложения одного дифференциального уравнения. Тезисы докладов. Математическая конференция “Еругинские чтения-V”, 1998 г.
6. Кожух И.Г., Юдов А.А. Об одном классе подмногообразия однородного пространства. Тезисы докладов. Математическая конференция “Еругинские чтения-VI”, 1999 г.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1967 г.
8. Андреев А.С, Юдов А.А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и в ее алгебру Ли. // Вестник Брестского государственного технического университета, №5 – 2000. С. 28–31.

УДК 517.949

Брызгалова Н.А., Самодуров А.А., Санюкевич А.В.

ОДИН ИЗ СПОСОБОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ p-го ПОРЯДКА

Рассмотрим разностное уравнение p-го порядка

$$x(n+p) = f\left(n, x(n+1), x(n+2), \ldots, x(n+p-1)\right). \tag{1}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$x(n) = \sum_{j=1}^{p} c_j(n) \cdot x_j(n), \tag{2}$$

Брызгалова Наталья Александровна. *Аспирант каф. общей математики и информатики Белорусского государственного университета.*

Самодуров Александр Александрович. *Доцент каф. общей математики и информатики Белорусского государственного университета.*

Санюкевич Александр Викторович. *Доцент каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.