Пример 3. Рассмотрим разностное уравнение третьего порядка

$$x(n+3)+ax(n)x(n+2)=0. \quad (10)$$

Если $c_1(n)$, $c_2(n)$ и $c_3(n)$ – линейно-независимые решения уравнения (10), то решение имеет вид $x(n)=c_1(n)x_1(n)+c_2(n)x_2(n)+c_3(n)x_3(n)$, где $\Delta x_i(n)$ ($i=\overline{1,3}$) находятся из системы уравнений

$$\Delta x_1(n)=\frac{W_1}{W}H(n), \qquad \Delta x_2(n)=\frac{W_2}{W}H(n),$$

$$\Delta x_3(n)=\frac{W_3}{W}H(n),$$

где

$$H(n)=-a\big(c_1(n)x_1(n)+c_2(n)x_2(n)+c_3(n)x_3(n)\big)\times$$
$$\times\big(c_1(n+2)x_1(n)+c_2(n+2)x_2(n)+c_3(n+2)x_3(n)\big)+$$
$$+ax_1(n)c_1(n)c_1(n+2)+ax_2(n)c_2(n)c_2(n+2)+$$
$$+ax_3(n)c_3(n)c_3(n+2).$$

УДК 539.3

Веремейчик А.И.

МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ НЕСВЯЗАННЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Система дифференциальных уравнений (ДУ) несвязанных нестационарных краевых и начально-краевых задач классической термоупругости для изотропных материалов при отсутствии источников тепла имеет следующий вид [1]:

$$\mu u_{i,kk}+(\lambda+\mu)u_{k,ki}=\rho\ddot{u}_i+(3\lambda+2\mu)\alpha_T T_{,i}-X_i, \quad (1)$$

$$T_{,kk}-\frac{1}{a}\dot{T}=0. \quad (2)$$

Для полной постановки задачи необходимо сформулировать краевые условия. Граничные и начальные условия задаются отдельно для уравнений движения (1) и уравнения теплопроводности (2). Для ДУ (1) на границе задаются перемещения или нагрузки, для уравнения теплопроводности - распределение температуры или теплового потока. Возможно также задание смешанных граничных условий. Начальные условия характеризуют соответственно движение тела или распределение температуры в некоторый начальный момент времени. В уравнениях (1) и (2): λ и μ - коэффициенты Ламе, α_T - коэффициент линейного теплового расширения, a - коэффициент температуропроводности [2], $X_i(x,t)$ - массовые нагрузки, c_ε - теплоемкость при постоянной деформации.

В постановке (1) и (2) рассматривается динамическая задача термоупругости. Однако обычно в реальных условиях температурное поле медленно изменяется со временем, поэтому можно принять упрощение, основанное на пренебрежении инерционными членами в уравнениях движения (1). В результате получаем задачу несвязанной термоупругости в квазистатической постановке; при этом ДУ (1) принимает вид:

$$\mu u_{i,kk}+(\lambda+\mu)u_{k,ki}=(3\lambda+2\mu)\alpha_T T_{,i}-X_i. \quad (3)$$

Решение краевых и начально-краевых задач термоупругости для любых конструктивных элементов и граничных условий возможно только численным путем. Наиболее оптимальным методом является метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) [3] теории потенциала. Метод ГИУ характеризуется как один из наиболее перспективных методов анализа показателей напряженно-деформированного состояния применительно к широкому классу практических задач строительной механики, теории упругости и термоупругости. Сущность методов ГИУ – в преобразовании дифференциальных уравнений в эквивалентную систему интегральных уравнений. Это позволяет получить систему уравнений, включающую только значения переменных на границе области. С помощью соответствующих формул представления определяются значения неизвестных величин во внутренних точках области через их граничные значения и значения их первых производных. Кроме того, такой подход уменьшает размерность исходной задачи на единицу.

Частное решение уравнения (3) представляем в виде, предложенном Гудьером, вводя потенциал термоупругого перемещения Φ [5]:

$$u_i=\Phi_{,i}. \quad (4)$$

Подставляя формулы (4) в (3) в случае отсутствия массовых сил, получим:

$$\Phi_{,ii}=mT, \quad (5)$$

где $m=\dfrac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\alpha_T$.

Рассмотрим задачу определения температуры и перемещений в пространстве E^2, вызванных действием единичного источника тепла, помещенного в начале координат. В силу центральной симметрии поля перемещений и деформаций, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\Delta\Phi'=mT'_*,$$
$$\Delta T'_*-\frac{1}{a}T'_*=-\frac{\delta(R)}{a}\delta(t), \quad (6)$$
$$\Delta=\frac{d^2}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{d}{dR}.$$

Применяя к уравнениям (6) преобразование Лапласа [6], получаем:

$$\Delta\overline{\Phi}'=m\overline{T}''_*,$$
$$\Delta\overline{T}'_*-\frac{p}{a}\overline{T}'_*=-\frac{\delta(R)}{a}, \quad (7)$$

Веремейчик Андрей Иванович. *Аспирант кафедры сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

где p - параметр преобразования, $\overline{T}'_*$ и $\overline{\Phi}'$ - трансформанты Лапласа функций T'_* и Φ' соответственно.

Исключая из этой системы $\overline{T}'_*$, приходим к соотношению:

$$A_1 A_2 \overline{\Phi}' = -\frac{m}{a}\delta(R), \tag{8}$$

где $A_1 = \Delta,\ A_2 = \Delta - \alpha^2$, $\alpha = \frac{P}{a}$.

Решая уравнение (8) относительно функции $\overline{\Phi}'$, имеем:

$$\overline{\Phi}' = \frac{1}{\alpha^2}(\overline{M}_1 - \overline{M}_2), \tag{9}$$

причем $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$ являются решением следующих уравнений соответственно:

$$A_1\overline{M}_1 = -\frac{m}{a}\delta(R),$$
$$A_2\overline{M}_2 = -\frac{m}{a}\delta(R). \tag{10}$$

Легко определить, что

$$\overline{M}_1 = -\frac{m}{2\pi a}\ln\frac{1}{R}, \tag{11}$$

$$\overline{M}_2 = -\frac{m}{2\pi a}K_0\left(R\sqrt{\frac{p}{a}}\right), \tag{12}$$

где K_0 - модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка.

Тогда потенциал термоупругого перемещения и температура в пространстве преобразований по Лапласу вычисляются нижеследующими равенствами:

$$\overline{\Phi}'(R,p) = -\frac{m}{2\pi p}\left[\ln\left(\frac{1}{R}\right) - K_0\left(R\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right], \quad 13)$$

$$\overline{T}'_*(R,p) = \frac{1}{2\pi a}K_0\left(R\sqrt{\frac{p}{a}}\right). \tag{14}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к формулам (13) и (14) и принимая во внимание соотношение (4), получаем в истинном времени следующие фундаментальные решения двухмерных задач несвязанной нестационарной термоупругости:

$$T'_*(x,y,t) = \frac{1}{4\pi a t}\exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right), \tag{15}$$

$$u'_i(x,y,t) = -\frac{H(t)R_{,i}}{2\pi R}\left[1 - \exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right)\right], \tag{16}$$

где: $H(t)$ - функция Хевисайда; $R_{,i} = \frac{\partial R}{\partial x_i}$.

Если источник тепла перенести из начала координат в точку $y(y_1,y_2)$, то функции $\Phi'(R,t)$ и $T'_*(R,t)$ будут вычисляться по формулам (15) и (16) лишь с тем отличием, что величина R определяется в этом случае по равенству:

$$R(x,t) = \sqrt{(x_i - y_i)(x_i - y_i)},\ i = 1{,}2. \tag{17}$$

При этом для определения перемещений в бесконечной области можно получить следующую формулу:

$$u'_i = \frac{m}{2\pi}\left(\frac{(x_i - y_i)}{R^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^t \frac{\exp\left(-\frac{R^2}{4a\tau}\right)}{t}dt\right). \tag{18}$$

Температуры и перемещения в бесконечной области E^2, вызванные действием единичной нагрузки, приложенной в точку y, можно определить из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\mu u'_{ij,kk} + (\lambda + \mu)u'_{kj,ki} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T'_{j,i} =$$
$$= -\delta_{ij}\delta(x - y), \tag{19}$$

$$aT'_{j,kk} - \dot{T}'_j = 0,\quad k,i,j = 1{,}2. \tag{20}$$

Очевидно, что $T'_j = 0$, а компоненты $u'_{ij}(x,y)$ являются компонентами фундаментального решения изотермической эластостатики и определяются по формуле [4]:

$$u'(x,y) = \frac{1}{8\pi(1-v)}\left[(3-4v)\ln\frac{1}{R}\delta_{ij} + R_{,i}R_{,j}\right]. \tag{21}$$

На основе представленных формул построены двухмерные сингулярные решения от действия единичной сосредоточенной нагрузки и от источника тепла единичной интенсивности:

$$T'_{ij}(x,y) = \frac{1-2v}{4\pi(1-v)R}\times$$
$$\times\left[R_{,j}n_i(x) - R_{,i}n_j(x) - \left(\delta_{ij} + \frac{2}{1-2v}R_{,i}R_{,j}\right)R_{,k}n_k(x)\right],$$

$$D'_{ijk}(x,y) = \frac{1-2v}{4\pi(1-v)R}\times$$
$$\times\left[(1-2v)\left(\delta_{ik}R_{,j} + \delta_{ik}R_{,i} - \delta_{ik}R_{,k}\right) + 2R_{,i}R_{,j}R_{,k}\right],$$

$$S'_{ijk}(x,y) = \frac{\mu}{2\pi(1-v)R^2}\times$$
$$\times\{2[(1-2v)\delta_{ij}R_{,k} + v(\delta_{ik}R_{,j} + \delta_{jk}R_{,i}) - 4R_{,k}R_{,k}R_{,i}]\times$$
$$\times R_{,p}n_p(x) + 2vR_{,k}[R_{,i}n_j(x) + R_{,j}n_i(x)] +$$
$$+ (1-2v)[2R_{,i}R_{,j}n_k(x) + \delta_{ik}n_j(x) +$$
$$+ \delta_{jk}n_i(x)] - (1-4v)\delta_{ij}n_k(x)\},$$

$$Q'_*(x,y,t) = \frac{\lambda_0 d}{8\pi a^2 t^2}\exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right),$$

$$Q'_i(x,y,t) = \frac{\lambda_0 m}{\pi}\left\{\frac{1}{R^2}\left[n_m R_{,m}R_{,i} - \frac{n_i}{2}\right]\left[1 - \exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right)\right] -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{4at}n_m R_{,m}R_{,i}\exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right)\right\},$$

$$P'_*(x,y,t) = \frac{\lambda_0^2}{8\pi\chi^2 t^2}\frac{\partial}{\partial n(x)}\left[d\exp\left(-\frac{R^2}{4\chi t}\right)\right],$$

$$V_{ij}^{\prime *}(x,y,t)=\frac{\mu m}{\pi}\left\{\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}+R_{,i}R_{,j}\right]\frac{1}{2at}exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{R^2}\left[\delta_{ij}-2R_{,i}R_{,j}\right]\left[1-exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right)\right]\right\},$$

$$S_{ij}^{\prime *}(x,y,t)=\frac{\lambda_0\mu m}{\pi}\left\{-\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}+R_{,i}R_{,j}\right)\frac{R\,R_{,i}n_i(x)}{(2at)^2}exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{R}\left[R_{,i}n_i(x)+R_{,i}n_j(x)+\left(\delta_{ij}-4R_{,i}R_{,j}\right)R_{,k}n_k(x)\right]\times$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{2at}exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right)-\frac{2}{R^2}\left(1-exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right)\right)\right]\right\}+\frac{\lambda_0\mu}{4\pi(1-\nu)aR}$$

$$\left\{\left[2R_{,i}R_{,j}-(1-2\nu)\delta_{ij}\right]R_{,k}n_k(x)+(1-2\nu)\left[R_{,i}n_j(x)+R_{,j}n_i(x)\right]\right\}.$$

Построение ГИУ двухмерных задач термоупругости в истинном времени осуществляется путем использования полученных в трехмерном пространстве времени фундаментальных и сингулярных решений. Решение задачи проводится как в рамках прямой, так и непрямой формулировок.

Рассмотрим построение граничных интегральных уравнений для первой нестационарной начально-краевой задачи термоупругости. В качестве граничных условий задаются перемещения и температура, причем ГУ для перемещений представляем в следующем виде:

$$\bar{u}(x,t)=\bar{f}(x,t),\ x\in S. \tag{23}$$

В качестве начальных данных принимаются значения температуры и деформации в нулевой момент времени. Учитывая (22) в граничном равенстве

$$\frac{1}{2}\bar{u}(x,t)=\int_0^t\int_S\bar{u}(y,x,t-\tau)\,\bar{p}(y,\tau)dS_yd\tau-$$

$$-\int_0^t\int_S\bar{T}(y,x,t-\tau)\bar{u}(y,\tau)dS_yd\tau+\bar{\Omega}_V(x,t;\bar{X})+ \tag{24}$$

$$+\bar{\Omega}_V^0(x,t;T^0),\ x\in S,$$

получаем в прямой формулировке для первой краевой задачи несвязанной термоупругости ГИУ Фредгольма первого рода в виде:

$$\int_0^t\int_S\bar{u}(y,x,t-\tau)\,\bar{p}(y,\tau)dS_yd\tau=\frac{1}{2}\bar{f}(x,t)+$$

$$+\int_0^t\int_S\bar{T}(y,x,t-\tau)\bar{f}(y,\tau)dS_yd\tau+\bar{\Omega}_V(x,t;\bar{X})- \tag{25}$$

$$-\bar{\Omega}_V^0(x,t;T^0),\ x\in S,$$

где $\bar{\Omega}_V(x,t;\bar{X})=\int_0^t\int_S\bar{u}(y,x,t-\tau)\,\bar{X}(y,\tau)\,dS_y\,d\tau$ - потенциал массовых сил;

$\bar{\Omega}_V^0(x,t;T^0)=\int_S C_\varepsilon\bar{T}^*(y,x,t)\,T^0(y)\,dS_y$ - потенциал начальных температур.

При использовании потенциала простого слоя в непрямой формулировке получаем ГИУ:

$$\int_0^t\int_S\bar{u}(x,y,t-\tau)\,\bar{\varphi}(y,\tau)dS_yd\tau=\bar{f}(x,t)- \tag{26}$$

$$-\bar{\Omega}_V(x,t;\bar{X})-\bar{\Omega}_V^0(x,t;T^0),\ x\in S.$$

Уравнение (25) также является ГИУ Фредгольма первого рода.

При применении потенциала двойного слоя для первой задачи получаем сингулярное ГИУ в виде:

$$\frac{1}{2}\bar{\psi}(x,t)-\int_0^t\int_S\bar{T}(y,x,t-\tau)\,\bar{\psi}(y,\tau)dS_yd\tau= \tag{27}$$

$$=\bar{f}(x,t)-\bar{\Omega}_V(x,t;\bar{X})-\bar{\Omega}_V^0(x,t;T^0),\ x\in S.$$

Используя граничное условие для второй задачи

$$\bar{p}(x,t)=\bar{R}_{n(x)}\,\bar{u}(x,t)=\bar{h}(x,t), \tag{28}$$

в прямой формулировке получаем ГИУ Фредгольма второго рода относительно $\bar{u}(x,t)$:

$$\frac{1}{2}\bar{u}(x,t)+\int_0^t\int_S\bar{T}(y,x,t-\tau)\,\bar{u}(y,\tau)dS_yd\tau= \tag{29}$$

$$=\bar{\Omega}(x,t;\bar{h})+\bar{\Omega}_V(x,t;\bar{X})-\bar{\Omega}_V^0(x,t;T^0),\ x\in S.$$

В непрямой формулировке аналогичное уравнение получается с использованием потенциала простого слоя:

$$\frac{1}{2}\bar{\varphi}(x,t)+\int_0^t\int_S\bar{R}_{n(x)}\,\bar{u}(y,x,t-\tau)\,\bar{\varphi}(y,\tau)dS_yd\tau=$$

$$=\bar{h}(x,t)-\bar{R}_{n(x)}\,\bar{\Omega}_V(x,t;\bar{X})- \tag{30}$$

$$-\bar{R}_{n(x)}\,\bar{\Omega}_V^0(x,t;T^0),\ x\in S.$$

Формулы интегральных представлений для перемещений и температуры в случае двухмерной несвязанной задачи термоупругости являются формулами типа Сомильяна и позволяют определять значения смещений и температуры во внутренних точках через их граничные значения и значения их первых производных:

$$\Delta(x)u_m(x,t)=V_m(x,t)+V_m^0(x,t)-$$

$$-\int_0^t\int_S\left[Q_m^*(y,x,t-\tau)T(y,\tau)-T_m^*(y,x,t-\tau)Q(y,\tau)\right]dS_yd\tau+$$

$$+\int_S\left[u_{im}(y,x)P_i(y,t)-T_{im}(y,x)u_i(y,t)\right]dS_y, \tag{31}$$

$$\Delta(x)T_{im}(x,t)=V(x,t)+V^0(x,t)-$$

$$-\int_0^t\int_S\left[Q_*(y,x,t-\tau)T(y,\tau)-T_*(y,x,t-\tau)\times\right. \tag{32}$$

$$\left.\times Q(y,\tau)\right]dS_yd\tau,$$

где:

$$V_m(x,t)=\int_S u_{im}(y,x)X_i(y,t)dS_y+$$

$$+\int_0^t\int_S T_m^*(y,x,t-\tau)G(y,\tau)dS_y\,d\tau\ ,$$

$$V_m^0(x,t)=\int_S C_\varepsilon T_m^*(y,x,t)T^0(y)dS_y,$$

$$V(x,t)=\int_0^t\int_S T_*(y,x,t-\tau)G(y,\tau)dS_y\,d\tau,$$

$$V^0(x,t)=\int_S C_\varepsilon T_*(y,x,t)T^0(y)dS_y,$$

$$Q_m^*(y,x,t)=\frac{\partial}{\partial n^+(y)}T_m^*(y,x,t),$$

$$Q_*(y,x,t)=\frac{\partial}{\partial n^+(y)}T_*(y,x,t).$$

В выражении (5) нетрудно заметить наличие несвязанности полей перемещений и температурных полей, что проявляется в отсутствии компонент смещения в выражении (32). $T_*(y,x,t)$ является фундаментальным решением параболического уравнения теплопроводности и определяется по формуле (15) с учетом того, что $T_*(y,x,t)=T_*'(x,y,t)$. Компоненты фундаментального решения $u_{ij}(y,x)$ совпадают с соответствующими решениями фундаментального решения изотермической эластостатики [4].

Формулы интегральных представлений для напряжений и теплового потока для рассматриваемого типа термоупругих задач получаются из интегральных формул для перемещения и температур путем воздействия на обе части этих равенств дифференциальными операторами:

$$\Delta(x)\sigma_{mr}(x,t)=W_{mr}(x,t)+V_{mr}^0(x,t)-$$
$$-\int_0^t\int_S\left[S_{mr}^*(y,x,t-\tau)T(y,\tau)-V_{mr}^*(y,x,t-\tau)Q(y,\tau)\right]dS_y d\tau+$$
$$+\int_S\left[D_{mri}(y,x)P_i(y,t)-S_{mri}(y,x)u_i(y,t)\right]dS_y-T(x,t)\beta_{mr},\tag{33}$$

$$\Delta(x)Q(x,t)=W(x,t)+W^0(x,t)-$$
$$-\int_0^t\int_S\left[P_*(y,x,t-\tau)T(y,\tau)-Q_{*x}(y,x,t-\tau)Q(y,\tau)\right]dS_y d\tau,\tag{34}$$

где:

$$W_{mr}(x,t)=\int_S D_{mri}(y,x)X_i(y,t)dS_y+$$
$$+\int_0^t\int_S V_{mr}^*(y,x,t-\tau)G(y,\tau)dS_y\,d\tau,$$

$$W_{mr}^0(x,t)=\int_S C_\varepsilon V_{mr}^*(y,x,t)T^0(y)dS_y,$$

$$W(x,t)=\int_0^t\int_S Q_{*x}(y,x,t-\tau)G(y,\tau)dS_y\,d\tau,$$

$$W^0(x,t)=\int_S C_\varepsilon Q_{*x}(y,x,t)T^0(y)dS_y,$$

$$P_*(y,x,t)=\frac{\partial}{\partial n^+(x)}Q_*(y,x,t),$$

$$D_{mri}(y,x)=C_{mrlk}\frac{\partial}{\partial x_k}u_{il}(y,x),$$

$$S_{mri}(y,x)=C_{mrlk}\frac{\partial}{\partial x_k}T_{il}(y,x),$$

$$V_{mr}^*(y,x,t)=C_{mrlk}\frac{\partial}{\partial x_k}T_l^*(y,x,t),$$

$$S_{mr}^*(y,x,t)=C_{mrlk}\frac{\partial}{\partial x_k}Q_l^*(y,x,t),$$

$$Q_{*x}(y,x,t)=\frac{\partial}{\partial n^+(x)}T_*(y,x,t).$$

Для численного решения построенных интегральных уравнений необходимо подходящим образом аппроксимировать как геометрию рассматриваемой области, так и входящие в них краевые функции. Дискретные представления границы тела осуществляется с использованием одномерных конечных элементов различной формы, задаваемых на отрезке по локальным координатам с помощью функции формы. Аппроксимация по времени граничных функций осуществляется с помощью интерполяции относительно временных узлов по элементам t_F на заданном интервале времени. При этом можно применять кусочно-постоянную или кусочно-переменную аппроксимацию по времени на равномерной системе узлов и кусочно-постоянную, кусочно-переменную или кусочно-квадратичную (изопараметрическую) аппроксимацию по граничному элементу. В ходе шагового продвижения по времени находятся либо неизвестные граничные перемещения и температуры (в случае решения второй задачи), либо напряжения и тепловой поток (в случае решения первой задачи). Перемещения и температура, напряжения и тепловой поток во внутренних точках могут быть определены по заданным напряжениям и тепловым потокам и найденным напряжениям и температурам в случае второй задачи, или по заданным граничным перемещениям и температурам и найденным поверхностным нагрузкам и тепловым потокам в случае первой задачи с помощью интегрирования по границе и по времени с использованием формул (31) – (34).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. - Киев: Наукова думка, 1970. - 239 с.
2. Карслоу Б., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. - М.: Наука, 1964. - 487 с.
3. Риццо Ф. Метод граничных интегральных уравнений - современный вычислительный метод прикладной механики. // Метод граничных интегральных уравнений. - М.: Мир, 1978. - С.11-17.
4. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962 - 364 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. - 256 с.
6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967 г. - 599 с.