УДК 517.983

Савчук В.Ф., Петрукович Д.А.

СХОДИМОСТЬ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ НЕЯВНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

ВВЕДЕНИЕ

Решение многих математических и прикладных задач приводит к решению уравнений первого рода, которые не удовлетворяют условиям корректности по Адамару, включающим в себя существование решения, его единственность, а также непрерывную зависимость от входных данных. Наибольшую трудность представляют неустойчивые задачи. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений. Если исходные данные известны приближенно, то упомянутая неустойчивость приводит к практической неединственности решения в рамках заданной точности и к большим трудностям в выяснении смысла получаемого приближенного решения. В силу этих особенностей долгое время считалось, что некорректные задачи не могут иметь практического значения. Однако потребности практики привели к необходимости решения таких задач.

Основы теории некорректно поставленных задач были заложены в работах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова. Некорректным задачам посвящены монографии таких видных ученых, как В.А. Морозова, В.В. Васина, В.П. Таnaны, О.А. Лисковца, Г.М. Вайникко, В.Н. Страхова и др. Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы.

В статье строится регуляризатор в виде неявного метода итераций решения уравнений 1-го рода.

Для решения уравнения

$$Ax = y \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве H с положительным ограниченным самосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением, предлагается неявный метод

$$(E+\alpha A)x_n = (E-\alpha A)x_{n-1} + 2\alpha y,\ x_0 = 0. \tag{2}$$

В случае приближенной правой части y_δ, метод (2) примет вид

$$(E+\alpha A)x_{n,\delta} = (E-\alpha A)x_{n-1,\delta} + 2\alpha y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

В работе [1] показано, что метод (3) сходится при условии $\alpha > 0$, если число итераций n выбрать в зависимости от уровня погрешности δ так, что $n\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$. В предположении истокопредставимости точного решения $x = A^s z$, $s > 0$ для метода (3) получена оценка погрешности

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le S^S (2n\alpha e)^{-S}\|z\| + 2n\alpha\delta. \tag{4}$$

Ее оптимальная оценка по n имеет вид

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{опт} \le (1+S)e^{-\frac{S}{S+1}}\delta^{\frac{S}{S+1}}\|z\|^{\frac{1}{S+1}} \tag{5}$$

и получается при

$$n_{опт} = S\alpha^{-1}2^{-1}e^{-\frac{S}{S+1}}\delta^{-\frac{1}{S+1}}\|z\|^{\frac{1}{S+1}}. \tag{6}$$

Оценка (4) получена в предположении, что точное решение x уравнения (1) истокопредставимо. Однако на практике не всегда имеются сведения о степени истокопредставимости S и элементе z. Тем не менее метод (3) можно сделать эффективным, если воспользоваться правилом останова по невязке.

Задаётся уровень останова ε и момент останова m определяется условиями

$$\left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon,\ (n < m),$$

$$\left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| \le \varepsilon,\ \varepsilon = b\delta,\ b > 1. \tag{7}$$

В работе [2] обоснована возможность применения правила останова (7) к методу (3). Получены оценка погрешности метода (3) и оценка для момента останова. Доказана теорема

ТЕОРЕМА1. Пусть $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (3) выбирается по правилу (7), тогда $m(\delta)\delta \to 0$, $x_{m,\delta} \to x$, $\delta \to 0$. Если при этом $x = A^S z, s > 0$, то справедливы оценки

$$m \le 1 + \frac{S+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{S+1}},$$

$$\left\|x_{m,\delta} - x\right\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{S}{S+1}}\|z\|^{\frac{1}{S+1}} + 2\alpha\delta\left(1 + \frac{S+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{S+1}}\right)$$

Сравнение метода (3) с явным методом итераций [4] показывает, что для явного метода оценка погрешности лучше по константе. Кроме того, явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычислений значения оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод итераций (см. [4]) предпочтительнее неявного метода (3).

Но неявный метод (3) обладает следующим важным достоинством. В явных методах на шаг по антиградиенту накладываются ограничения сверху, что может привести к необходимости большого объема итераций. (Например, для явного метода итераций из [4] $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$.) В неявном методе никаких ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет брать его возможно большим (независимо от нормы $\|A\|$), в связи с чем правило останова по невязке (7), естественно, будет давать для момента останова m небольшие значения. Следовательно, оптимальная оценка погрешности может быть достигнута уже на первых шагах итераций.

Покажем, что метод (2) пригоден и тогда, когда $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A (случай неединственного решения уравнения (1)).

Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$ - ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ -

Савчук Вячеслав Федорович. *К. ф.-.м. н., зав. кафедрой алгебры и геометрии Брестского государственного университета.*
Петрукович Дмитрий Алексеевич. *Ассистент кафедры высшей математики Брестского государственного университета.*
Беларусь, БрГУ, 224665, г. Брест, бульвар Космонавтов, 21.

проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ - проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A \geq 0$, $y \in H$, $\alpha > 0$, тогда для итеративного метода (2) верны следующие утверждения:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to J(A,y) = \inf\limits_{x \in H}\|Ax - y\|$;

б) (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. В последнем случае $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, где x^* - минимальное решение.

Доказательство

Применим оператор A к (2), получим

$A(E + \alpha A)x_n = A(E - \alpha A)x_{n-1} + 2\alpha Ay$, где

$y = P(A)y + \Pi(A)y$.

Так как $AP(A)y = 0$, то получим

$$(E + \alpha A)(Ax_n - \Pi(A)y) = (E - \alpha A)(Ax_{n-1} - \Pi(A)y).$$

Обозначим $Ax_n - \Pi(A)y = v_n$, $v_n \in M(A)$, тогда

$(E + \alpha A)v_n = (E - \alpha A)v_{n-1}$. Отсюда

$v_n = (E + \alpha A)^{-1}(E - \alpha A)v_{n-1}$, следовательно,

$v_n = (E + \alpha A)^{-n}(E - \alpha A)^n v_0$.

Имеем $A \geq 0$ и A –положителен в $M(A)$, т.е. $(Ax, x) > 0$ $\forall x \in M(A)$.

Так как $\alpha > 0$, то $\left\|(E + \alpha A)^{-1}(E - \alpha A)\right\| < 1$. Поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \left\|(E + \alpha A)^{-n}(E - \alpha A)^n v_0\right\| = \left\|\int\limits_0^{\|A\|}\frac{(1 - \alpha\lambda)^n}{(1 + \alpha\lambda)^n}dE_\lambda v_0\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\int\limits_0^{\varepsilon_0}\frac{(1 - \alpha\lambda)^n}{(1 + \alpha\lambda)^n}dE_\lambda v_0\right\| + \left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{\|A\|}\frac{(1 - \alpha\lambda)^n}{(1 + \alpha\lambda)^n}dE_\lambda v_0\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\int\limits_0^{\varepsilon_0}dE_\lambda v_0\right\| + q^n(\varepsilon_0)\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{\|A\|}dE_\lambda v_0\right\| = \left\|E_{\varepsilon_0}v_0\right\| + q^n(\varepsilon_0)\left\|v_0 - E_{\varepsilon_0}v_0\right\| < \varepsilon$$

при $\varepsilon \to 0$, $n \to \infty$.

Здесь $\left|\dfrac{(1 - \alpha\lambda)}{(1 + \alpha\lambda)}\right| \leq q(\varepsilon_0) < 1$, при $\lambda \in [\varepsilon_0, \|A\|]$.

Следовательно, $v_n \to 0$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$.

$\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = J(A,y)$ (см. [3]).

Итак утверждение а) доказано. Докажем б).

Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* - минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2) примет вид

$$\begin{aligned}(E + \alpha A)x_n &= (E - \alpha A)x_{n-1} + 2\alpha A\Pi(A)y = \\ &= (E - \alpha A)x_{n-1} + 2\alpha Ax^* = \\ &= (E + \alpha A)x_{n-1} - 2\alpha Ax_{n-1} + 2\alpha Ax^* = \\ &= (E + \alpha A)x_{n-1} + 2\alpha A(x^* - x_{n-1}).\end{aligned}$$

Отсюда

$$x_n = x_{n-1} + 2\alpha A(E + \alpha A)^{-1}(x^* - x_{n-1}).$$

Последнее равенство разобьем на два

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + 2\alpha(E + \alpha A)^{-1}AP(A) \times \times (x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0.$$

$$\begin{aligned}\Pi(A)x_n &= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha A(E + \alpha A)^{-1}\Pi(A)(x^* - x_{n-1}) = \\ &= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha A(E + \alpha A)^{-1}(\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1}) = \\ &= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha A(E + \alpha A)^{-1}(x^* - \Pi(A)x_{n-1}),\end{aligned}$$

так как $x^* \in M(A)$. Обозначим $w_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда из равенства

$$\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* + 2\alpha A(E + \alpha A)^{-1} \times (x^* - \Pi(A)x_{n-1})$$

получим $w_n = w_{n-1} - 2\alpha A(E + \alpha A)^{-1}w_{n-1}$. Следовательно, $w_n = (E - \alpha A)(E + \alpha A)^{-1}w_{n-1}$ и аналогично v_n можно показать, что $w_n \to 0$, $n \to \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда

$x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$, ч.т.д.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как у нас $x_0 = 0$, то $x_n \to x^*$, т.е. процесс (2) сходится к нормальному решению, т.е. к решению с минимальной нормой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод может быть успешно применен для решения некорректных задач: задачи спектроскопии, обратной задачи теории потенциала, интегральных уравнений Фредгольма первого рода, задачи определения формы радиоимпульса, излученного источником, задачи автоматического регулирования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лисковец О.А., Савчук В.Ф. Об одном итеративном методе решения уравнений 1-го рода//Вопросы прикладной математики: Сб. статей / АН СССР, Сиб. отделение. – Иркутск, 1975.-С.158-166.
2. Лисковец О.А., Савчук В.Ф. Правило останова итераций в неявных итеративных методах для уравнений 1-го рода//Изв.АН БССР, сер физ.-мат. наук, 1991, №2. -С.3-8.
3. Bialy H. Iterative Behandlung linearer Funktionsgleichungen//Arch. Ration. Mech. and Anal., 1959. –v.4, №2. –P.166-176.
4. Константинова Я.В., Лисковец О.А. Оценки погрешностей в методе итераций для уравнений 1-го рода//Вестник Белорус. ун-та. Серия 1. -1973. -№1. –С. 9-15.