УДК 513.8

Юдов А.А., Мороз О.К.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ЛИНИЙ НА ТОРСАХ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО

Рассматривается пространство Минковского ${}^1R_4$ - четырехмерное псевдоевклидово пространство сигнатуры 2 [4]. Пусть $R=\{O,\vec{e}_0,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ - ортонормированный репер пространства ${}^1R_4$, причем

$$\vec{e}_0^{\,2}=-1,\ \vec{e}_1^{\,2}=\vec{e}_2^{\,2}=\vec{e}_3^{\,2}=1. \qquad (1)$$

в пространстве ${}^1R_4$ изучается дифференциальная геометрия поверхностей. Исследуются поверхности, образованные всеми касательными к некоторой кривой пространства ${}^1R_4$, называемые *торсами*.

Пусть торс образован касательными к кривой $\gamma:\vec{\rho}=\vec{\rho}(u)$, которая называется *ребром возврата торса*. Уравнение торса имеет вид

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v)=\vec{\rho}(u)+v\vec{\rho}\,'_u. \qquad (2)$$

Пусть касательная к кривой γ - евклидова прямая R_1, соприкасающаяся плоскость кривой γ - евклидова плоскость R_2, а соприкасающаяся 3-плоскость – есть плоскость вида ${}^1R_3$. Соприкасающийся флаг кривой γ в этом случае имеет вид: $\{M,R_1,R_2,{}^1R_3\}$. Заметим, что касательная плоскость к торсу вдоль прямолинейное образующей совпадает с соприкасающейся плоскостью R_2 в соответствующей точке кривой γ.

Пусть u – естественный параметр кривой γ.

Перейдем на торсе к новым координатам так, чтобы координатными линиями являлись прямолинейные образующие и их ортогональные траектории. Обозначая новые координаты опять через u и v, получим уравнение торса:

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v)=\vec{\rho}(u)+(v-u)\vec{\rho}\,'(u) \qquad (3)$$

В произвольной точке N торса строится канонический репер $\{N,\vec{\varepsilon}_1^{\,*},\vec{\varepsilon}_2^{\,*},\vec{\varepsilon}_3^{\,*},\vec{\varepsilon}_4^{\,*}\}$, деривационные формулы которого примут вид:

$$\begin{cases}\vec{r}_u^{\,'}=(v-u)\vec{\rho}_u^{\,''}=(v-u)\kappa_1\vec{\varepsilon}_2^{\,*},\\ \vec{\varepsilon}_{1u}^{\,\prime *}=\kappa_1\vec{\varepsilon}_2^{\,*},\\ \vec{\varepsilon}_{2u}^{\,\prime *}=-\kappa_1\vec{\varepsilon}_1^{\,*}+\kappa_2\vec{\varepsilon}_2^{\,*},\\ \vec{\varepsilon}_{3u}^{\,\prime *}=\kappa_2\vec{\varepsilon}_2^{\,*}+\kappa_3\vec{\varepsilon}_4^{\,*},\\ \vec{\varepsilon}_{4u}^{\,\prime *}=\kappa_3\vec{\varepsilon}_3^{\,*},\end{cases} \qquad \begin{cases}\vec{r}_v^{\,\prime}=\vec{\rho}_u^{\,\prime}=\vec{\varepsilon}_1^{\,*},\\ \vec{\varepsilon}_{1v}^{\,*}=0,\\ \vec{\varepsilon}_{2v}^{\,*}=0,\\ \vec{\varepsilon}_{3v}^{\,*}=0,\\ \vec{\varepsilon}_{4v}^{\,*}=0.\end{cases} \qquad (4)$$

Обобщим определение [1, стр. 347], [3], [5].

Определение 1. Линию $\gamma:\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$ на поверхности пространства ${}^1R_4$ будем называть $(k,\,l)$ – *геодезической*, если она либо прямая, либо ее соприкасающаяся l – плоскость $\sum_l=\left[M,\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\ldots,\vec{r}^{\,(l)}\right]$ содержит нормальную k – плоскость к поверхности.

Используя построенный канонический репер торса, получим нормальную систему дифференциальных уравнений (1, 2) – геодезической линии:

$$\begin{cases}\dfrac{du}{ds}=\varpi(s),\\[2mm] \dfrac{dv}{ds}=z(s),\\[2mm] \dfrac{dz}{ds}=\kappa_1^2(v-u)\varpi^2-\dfrac{\delta}{\sigma}z,\\[2mm] \dfrac{d\varpi}{ds}=\dfrac{1}{\sigma\kappa_1(v-u)}\left(\varpi^2\kappa_1-\varpi(v-u)\dfrac{d\kappa_1}{ds}-\delta\varpi(v-u)\kappa_1-2\varpi z\kappa_1\right).\end{cases} \qquad (5)$$

Теорема 1. Через каждую точку торса в каждом направлении касательной плоскости проходит единственная (1, 2) – геодезическая линия.

Доказательство следует из теоремы Пикара.

Аналогично получаем теорему относительно (2, 3) – геодезических линий.

Теорема 2. Через каждую точку торса в каждом направлении касательной плоскости проходит единственная (2, 3) – геодезическая линия.

Исследуя полученные системы дифференциальных уравнений для (2, 3) и (1, 2) – геодезических линий получаем следующие теоремы.

Теорема 3. Любая линия на торсе с касательной плоскостью действительного типа является (1, 3) – геодезической.

Теорема 4. На торсе с касательной действительной плоскостью (2, 2) - геодезических линий не существует.

Пусть $\tau:\vec{r}=\vec{r}(u(s),v(s))$ - произвольная кривая на торсе. В точке N кривой построим канонический репер $\{N,\vec{\varepsilon}_1^{\,*},\vec{\varepsilon}_2^{\,*},\vec{\varepsilon}_3^{\,*},\vec{\varepsilon}_4^{\,*}\}$. Попытаемся по аналогии с евклидовым трехмерным пространством определить нормальную кривизну k_n кривой. *Нормальная кривизна* кривой τ в точке N – это проекция вектора кривизны $\overrightarrow{NL}=\ddot{\vec{r}}$ на нормаль к поверхности. В пространстве ${}^1R_4$ к поверхности в данной точке существует целая плоскость нормалей, поэтому необходимо определить нормаль, на которую будет проектироваться вектор кривизны. Координаты вектора $\overrightarrow{NL}=\ddot{\vec{r}}$ в репере $\{N,\vec{\varepsilon}_1^{\,*},\vec{\varepsilon}_2^{\,*},\vec{\varepsilon}_3^{\,*},\vec{\varepsilon}_4^{\,*}\}$ согласно формулам (4) равны

$$((v-u)\kappa_1^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\frac{d^2v}{ds^2},$$

Юдов Александр Андреевич. *К. ф.-.м. н., доцент Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина.*
Мороз Оксана Константиновна. *Студентка Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина.*
Беларусь, БрГУ, 224665, г. Брест, бульвар Космонавтов, 21.

$$(\upsilon-u)\kappa_1\frac{d^2u}{ds^2}+2\frac{du}{ds}\frac{d\upsilon}{ds}\kappa_1,$$

$$-\kappa_1\left(\frac{du}{ds}\right)^2+(\upsilon-u)\frac{d\kappa_1}{ds}\frac{du}{ds},$$

$$((\upsilon-u)\kappa_1\kappa_2\left(\frac{du}{ds}\right)^2,0)=(A,B,C,0).$$

Нормальную кривизну кривой τ определим как длину отрезка NL_1, где L_1 – точка пересечения плоскости $\sum_n\left[N,\vec{\varepsilon}_3^*,\vec{\varepsilon}_4^*\right]$. Определим координаты точки $L_1: \sum_n: x_1=0,\quad x_2=0$; $\sum_\tau: x_3=0$, $x_4=0 \Rightarrow \sum_\tau': x_3=C$, $x_4=0$. Таким образом, $L_1=\sum_n\cap\sum_\tau': x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=C,\ x_4=0$.

Отсюда следует, что $k_n=\sqrt{-C^2}=iC$, т.е. нормальная кривизна кривой τ на торсе пространства ${}^1R_4$, с касательной плоскостью действительного типа, является мнимой величиной. Теперь определим геодезическую кривизну кривой τ k_g, как длину отрезка NL_2, где L_2 – точка пересеченная плоскости $\sum_n`\parallel\sum_n$ и проходящей через точку L, с касательной плоскостью $\sum_\tau$. Определим координаты точки L_2: $\sum_\tau: x_3=0$, $x_4=0$, $\sum_n': x_1=A$, $x_2=B$. Следовательно, координаты точки $L_2=\sum_n'\cap\sum_\tau: x_1=A$, $x_2=B$, $x_3=0$, $x_4=0$. Итак, определив $\left|NL_2\right|=k_g=\sqrt{A^2+B^2}$, по аналогии с евклидовым трехмерным пространством получим, что кривизна τ на торсе пространства ${}^1R_4$ с касательной плоскостью действительного типа находится по формуле $k^2=k_n^2+k_g^2$, откуда при подстановке значений будем иметь: $k^2=\left|\ddot{\vec{r}}\right|^2=A^2+B^2-C^2$. Этот факт позволяет сделать вывод о том, что кривизна кривой τ на рассматриваемой поверхности может быть как действительной, так мнимой и нулевой величиной.

Рассмотрим модуль нормальной кривизны: $\left|k_n\right|=C=\left(\upsilon-u\right)k_1k_2\left(\frac{du}{ds}\right)^2$. Так как мы рассматриваем торсы с касательной евклидовой плоскостью, то справедлива формула первой квадратичной формы поверхности:

$$d\vec{r}^2=d\vec{s}^2=Edu^2+2Fdud\upsilon+Gd\upsilon^2,$$

таким образом,

$$\left|k_n\right|=\left|k_n\left(du,d\upsilon\right)\right|=\frac{\left(u-\upsilon\right)\kappa_1\kappa_2du^2}{Edu^2+2Fdud\upsilon+Gd\upsilon^2}. \quad (6)$$

Формулы (6) показывает, что модуль нормальной кривизной кривой τ в точке N зависит только от $\frac{d\upsilon}{du}$, т.е. от направления в касательной плоскости.

Определение 2. [1, стр. 340]. Линия на поверхности называется *асимптотический*, если в каждой ее точке нормальная кривизна равна нулю.

Если $k_n=0$, то из (6) следует, что $u=const$, значит, на торсе с касательной действительной плоскостью асимптотические линии – есть прямолинейные образующие торса.

Разделим числитель и знаменатель выражения (6) на du^2 и, учитывая, что $\left(\vec{r}_u,\vec{r}_\upsilon\right)=0$, т.е. $F=0$, получим $\left|k_n\right|=\frac{\left(u-\upsilon\right)\kappa_1\kappa_2}{E+G\left(\frac{d\upsilon}{du}\right)^2}$. Обозначим $\frac{d\upsilon}{du}=t$, тогда $\left|k_n\right|`_t=-\frac{2G\left(u-\upsilon\right)\kappa_1\kappa_2t}{\left(E+Gt^2\right)^2}$. Таким образом, из уравнения $\left|k_n\right|`_t=0$ следует $d\upsilon=0$, $\upsilon=const$.

Найдем вторую производную функции:

$$\left|k_n\right|''_t=-\frac{2G\left(u-\upsilon\right)\kappa_1\kappa_2\left(E^2-2EGt^2-3G^2t^4\right)}{\left(E+Gt^2\right)^4}.$$

Решая уравнение $\left|k_n\right|''_t=0$, получим $t_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{E}{3G}}$, из чего следует, что $d\upsilon=0$ - экстремум функции, равной $\left|k_n\right|$.

Аналогично, при делении (6) а $d\upsilon^2$, имеем $\left|k_n\right|=\frac{\left(u-\upsilon\right)\kappa_1\kappa_2t^2}{Et^2+G}$, где $t=\frac{du}{d\upsilon}$, отсюда $\left|k_n\right|'_t=-\frac{2G\left(u-\upsilon\right)\kappa_1\kappa_2t}{\left(Et^2+G\right)^2}$. Решая уравнение $\left|k_n\right|'_t=0$, получим $du=0$, $u=const$. Так как $\left|k_n\right|''_t=-\frac{2G\left(u-\upsilon\right)\kappa_1\kappa_2\left(E^2-2EGt^2-3G^2t^4\right)}{\left(G+Et^2\right)^4}$, то, решая уравнение $\left|k_n\right|''_t=0$, получим $t_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{G}{3E}}$, значит, $d\upsilon=0$ - экстремум функции, равной $\left|k_n\right|$.

Определение 3. Направление в некоторой точке поверхности торса с касательной действительной плоскостью называется *главным направлением*, если оно является точкой экстремума функции $\left|k_n\left(du,d\upsilon\right)\right|$.

Таким образом, $du=0$, $d\upsilon=0$ - есть главные направления на исследуемой нам поверхности.

Определение 4. Линия δ на поверхности называется *линией кривизны*, если в каждой точке $N\in\delta$ направление в касательной плоскости является главным.

Приходим к выводу, что на торсе с касательной плоскостью E_2 u-линии и υ-линии являются линиями кривизны.

Аналогичные исследования можно проводить на торсах других псевдоевклидовых пространств.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия. Т. II. М.: Просвещение, 1975.
2. Бакельман И.Я. Введение в дифференциальную геометрию "в целом". М.: Наука, 1973.
3. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Просвещение, 1968.
4. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.
5. Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф. Дифференциалы помогают геометрии. М.: Просвещение, 1982.
6. Энциклопедия элементарной математика. Кн. V. М.: Наука, 1966.

УДК 514.112.3

Пархимович И.В.

НАХОЖДЕНИЕ ОТНОШЕНИЙ ВЗАИМНОГО ДЕЛЕНИЯ МЕДИАН, БИССЕКТРИС, ВЫСОТ ТРЕУГОЛЬНИКА

Известна теорема Менелая (I век н.э.): пусть точки A_1 и B_1 лежат соответственно на сторонах BC и CA, а точка C_1 – на продолжении стороны BA треугольника ABC. Для того чтобы точки A_1, B_1, C_1 лежали на одной прямой необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1 .$$

Используя теорему Менелая, доказывается <u>**Теорема 1**</u>. В треугольнике известны отношения длин его сторон. Тогда точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника делит каждую биссектрису, считая от вершины, в отношении, равном отношению суммы длин сторон, образующих угол, к длине противоположной стороны.

<u>**Доказательство.**</u>

В ΔABC (рисунок 1) AD, BE, CF – биссектрисы и $AB:BC:AC = m:n:p$. Тогда длины сторон треугольников (подобных), удовлетворяющих этим отношениям, можно представить в виде:

$$AB = am,\quad BC = an,\quad AC = ap , \qquad (1)$$

где a – соответствующий коэффициент отношений (с возможно определенной размерностью).

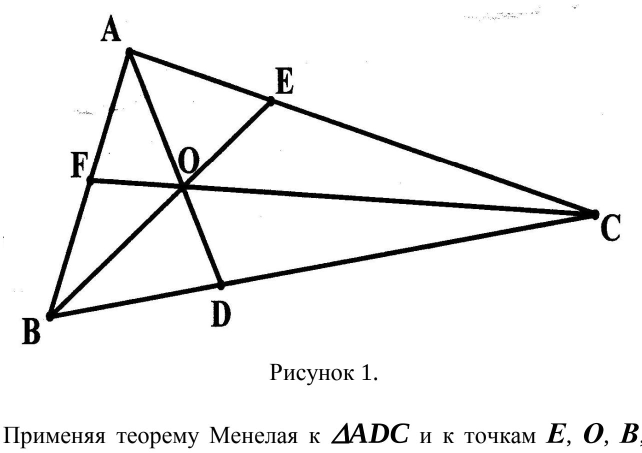

Рисунок 1.

Применяя теорему Менелая к ΔADC и к точкам E, O, B, находящихся на одной прямой и на сторонах и на продолжении стороны ΔADC, - будем иметь:

$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AO}{OD}\cdot\frac{DB}{BC}=1 . \qquad (2)$$

Так как биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам угла, то в силу соотношений (1) получаем:

$$\frac{CE}{EA}=\frac{BC}{AB}=\frac{an}{am}=\frac{n}{m} \qquad (3)$$

$$\frac{DB}{BC}=\frac{DB}{DB+DC}=\frac{1}{\frac{DB+DC}{DB}}=\frac{1}{1+\frac{DC}{DB}}= \\ =\frac{1}{1+\frac{AC}{AB}}=\frac{1}{1+\frac{ap}{am}}=\frac{1}{1+\frac{p}{m}} \qquad (4)$$

Тогда соотношение (2) с учетом равенств (3) и (4) примет вид

$$\frac{n}{m}\cdot\frac{AO}{OD}\cdot\frac{1}{1+\frac{p}{m}}=1$$

откуда

$$\frac{AO}{OD}=\frac{m}{n}\left(1+\frac{p}{m}\right)=\frac{m}{n}\cdot\frac{m+p}{m}=\frac{m+p}{n}=\frac{a(m+p)}{na}= \\ =\frac{ma+pa}{na}=\frac{AB+AC}{BC}$$

ч.т.д.

По такой же схеме доказываются следующие теоремы.

<u>**Теорема 2.**</u> В треугольнике известны отношения длин его сторон. Биссектриса внутреннего угла треугольника делится, считая от вершины, медианой в отношении, равном отношению суммы длин сторон, заключающих биссектрису к длине стороны, к которой не проведена ни биссектриса, ни медиана.

<u>**Теорема 3.**</u> Медиана треугольника, отношения сторон которых известны, делится (считая от вершины) биссектрисой внутреннего угла треугольника в отношении, равном отношению удвоенной длины стороны, к которой не проведена ни медиана, ни биссектриса, к длине стороны, к которой проведена медиана.

Пархимович Игорь Владимирович. *К. ф.-м. н., профессор каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.