

- выше представленные формулы являются универсальными, то есть, полагая  $r_i = 0$ , можно получить зависимости для сетчатых конструкций с абсолютно жёсткими узлами, полагая же  $r_i = \infty$  и  $\phi_i = 0$  – могут быть получены зависимости для шарнирно-стержневых сетчатых конструкций.

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Металлические конструкции: учебное пособие: в 3 т. / В.В. Горев [и др.]. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. школа, 2004. – Т. 2: Конструкции зданий. – 528 с.
2. Лепницкий, М.Е. Купола (расчёт и проектирование): практическое пособие / М.Е. Лепницкий, М.Е. Дьяков. – Ленинград: Стройиздат, 1973. – 129 с.
3. Беленя, Е.И. Металлические конструкции: учебное пособие / Е.И. Беленя. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1986. – 560 с.
4. Klöppel, K. Zur Berechnung von Netzkuppeln / K. Klöppel, R. Schardt // Der Stahlbau. – 1962. – № 5. – P. 129–136.
5. Журавлёв, А.А. Устойчивость пирамидальных элементов сетчатого купола / А.А. Журавлёв // Межотраслевые вопросы строительства / ЦИНИС, реферат. инф. – М., 1972. – Вып. 4. – С. 66–70.
6. Журавлёв, А.А. Местная устойчивость куполов с треугольными ячейками / А.А. Журавлёв, В.В. Мартинец // Межотраслевые вопросы строительства / ЦИНИС, реферат. инф. – М., 1971. – Вып. 8. – С. 8–10.
7. Matthees, W. Experimentelle und theoretische Untersuchung des Trag- und Stabilitätsverhaltens einschaliger räumlicher Gelenknetzwerke im elastischen Bereich / W. Matthees, P. Wegener // IVBH Kongressbericht. – Berlin, BRD: Bundesanstalt für Materialprüfung, 1972. – S. 473–478.
8. Савельев, В.А. Влияние начальных несовершенств и неравномерности загрузки на устойчивость сферического купола с жёсткими узлами / В.А. Савельев // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1971. – № 5. – С. 32–34.
9. Савельев, В.А. Теоретические основы проектирования металлических куполов: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.01 / В.А. Савельев. – М., 1995. – 39 с.
10. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1967. – 948 с.
11. Борисевич, А.А. Строительная механика / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – 2-е изд., перераб. и доп. – Мн.: БНТУ, 2009. – 756 с.
12. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебное пособие: в 2 т. / Н.С. Пискунов. – СПб.: Наука, 1985. – Т. 2. – 560 с.
13. Рашевский, П.К. Курс дифференциальной геометрии: учебное пособие / П.К. Рашевский. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 440 с.

Материал поступил в редакцию 29.12.15

#### DRAGAN V.I., GLUSHKO K.K. Research of the intense deformed condition of cores of steel mesh domes with rigid knots

Dependences between nodal loading and internal efforts in dome fragment rods in the radial plane at geometrically nonlinear process of deformation of a fragment of system – a single indent.

УДК 624.014.27

**Драган В.И., Глушко К.К.**

### ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВЫПУКЛЫХ СТЕРЖНЕВЫХ МНОГОГРАННИКОВ, ПОСТРОЕННЫХ НА СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НЕРАВНОМЕРНОЙ НАГРУЗКИ<sup>1</sup>

**Введение.** При решении задачи о местной устойчивости одно-сетчатой конструкции важно изначально определить, действует ли равная или неравная по значению нагрузка на узлы конструкции. При равной по значению узловой нагрузке проверку местной устойчивости необходимо производить по нескольким методикам [1–5].

Существуют методы расчёта на местную устойчивость при неравной по значению нагрузке [3, 6], однако они не учитывают изменение геометрии сетчатой поверхности. Таким образом, влияние нагрузки в соседнем узле на деформирование сетки в соседнем фрагменте сетки рассмотрено недостаточно. В этой работе выполнена попытка учесть по возможности каждое из рассмотренных воздействий.

Нижеизложенные зависимости справедливы для шарнирно-стержневой и для жёстко-стержневой расчётной схемы с треугольной решёткой, полученной проецированием на поверхность пологой сферической оболочки сетки из равносторонних треугольников.

На рисунке 1 изображена сетчатая конструкция с приложенной к ней неравномерной узловой нагрузкой, симметричной относительно вертикальной оси.

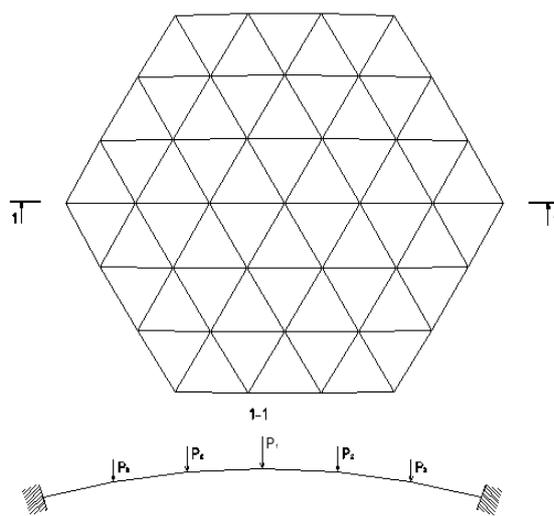


Рис. 1. Вид сверху и разрез рассматриваемой конструкции

Рассматривая процесс деформирования при неравной по величине осесимметричной нагрузке, можно отдельно учесть деформирование конструкции при равной по величине нагрузке и при неравной осесимметричной нагрузке обратного знака. Итак, вначале необходимо приложить в узлы нагрузку  $F_1$  и сложить воздействие от нагрузки  $P_i$  таким образом, чтобы соблюдалось равенство:

<sup>1</sup> Представленная работа является развитием статьи «Исследование напряжённо-деформированного состояния стержней стальных сетчатых куполов» авт. Драгана В.И., Глушко К.К.

$$P_i = P_1 - F_i, \quad (1)$$

здесь  $P_1$  – максимальная узловая нагрузка;

$F_i$  – нагрузка обратного знака, соответствующая нагрузке  $P_i$ .

На рисунке 2 изображён разрез модели расчёта.

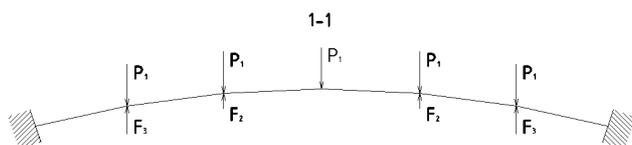


Рис. 2. Разрез модели расчёта

Поскольку рассматриваемая конструкция симметрична и симметрично нагружена, то имеются оси симметрии, между которыми удобно рассматривать процессы деформирования фрагментов сетки. На рисунке 3 показаны оси симметрии и обозначения точек для дальнейшего вывода формул.

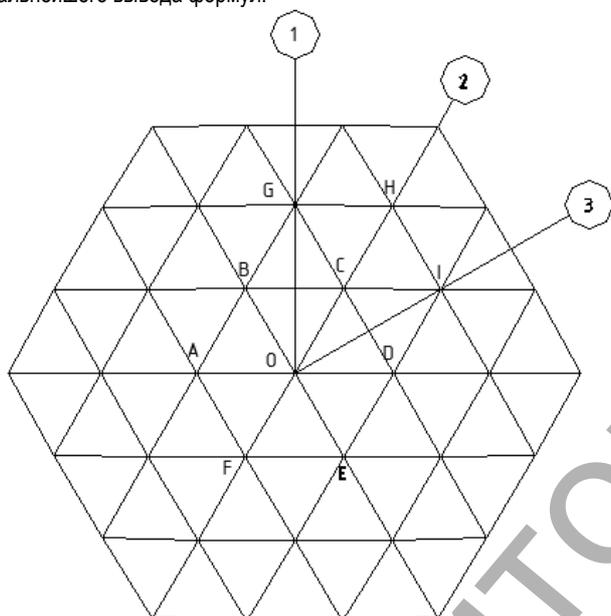


Рис. 3. Расположение осей симметрии внутри рассматриваемой сетки

Необходимо рассмотреть действие нагрузок  $F_i$  отдельно на фрагмент без учёта нагрузки  $P_1$ . Поскольку угол между плоскостями  $BOD$  и  $BCD$  невелик, то перемещение  $a$  в плоскости  $BOD$  будет практически тем же по значению и в плоскости  $BCD$ . Каждая из точек контура будет перемещаться на величину  $a$  в горизонтальной плоскости, хорды стержней будут поворачиваться на угол  $\varphi$  относительно начального в вертикальной плоскости. На рисунке 4 показан процесс деформирования пологой пирамиды  $OBGHID$ .

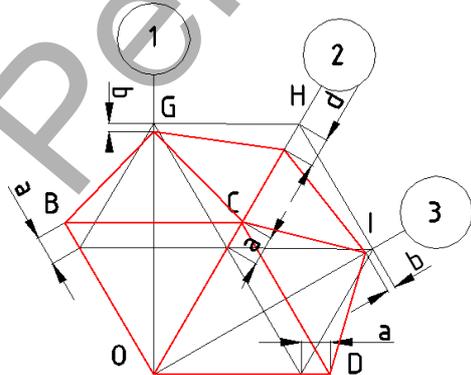


Рис. 4. Деформирование фрагмента  $OBGHID$

Для описания процесса деформирования следует установить, что точка  $O$  движется только в вертикальном направлении вниз, остальные точки будут двигаться по некоторым законам, которые будут в последующем выведены. Так, продольная деформация стержня  $CO$  рассматриваемого фрагмента может быть описана зависимостью:

$$\Delta l_{CO} = \Delta l_N + a, \quad (2)$$

где  $\Delta l_N$  изменение длины хорды стержня при изменении угла  $\varphi$  и неподвижных опорах контура;

$a$  – перемещения узлов контура из-за силовой отпорности опор.

Таким образом, всю остальную конструкцию за пределами фрагмента можно представить в виде пружины, жёсткость  $k_1$  которой не зависит от величины перемещения  $a$ . На оба элемента (стержень и пружину) действует, таким образом, одна и та же сила. Переходя к внутренним усилиям, можно записать:

$$\frac{EA}{c} \Delta l_{CO} = k_1 a, \quad (3)$$

где  $c$  – проекция длины стержня на касательную плоскость к поверхности в точке  $C$ .

Запишем выражение для определения  $\Delta l_N$ , используя [6] для случая выпучивания фрагмента:

$$\Delta l_N = c \cdot \varphi \left( \alpha + \frac{1}{2} \varphi \right), \quad (4)$$

где  $\alpha$  – угол наклона оси стержня к касательной плоскости в точке  $C$ ,  $\varphi$  – переменная величина угла при деформировании пирамиды.

Деформация  $\Delta l_{CO}$  в итоге может быть записана в виде следующего выражения:

$$\Delta l_{CO} = \frac{c \cdot \varphi \left( \alpha + \frac{1}{2} \varphi \right)}{1 - \frac{EA}{c} \delta_c}, \quad (5)$$

где  $\delta_c = \frac{1}{k_1}$  – силовая отпорность опоры.

Продольная сила  $N$  запишется исходя из закона Гука:

$$N = EA \frac{\varphi \left( \alpha + \frac{1}{2} \varphi \right)}{1 - \frac{EA}{c} \delta_c}, \quad (6)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$E$  – модуль упругости материала стержня.

Необходимо выразить перемещение  $a$  из формулы (2) с учётом формулы (6)

$$a = N \delta_a = EA \delta_c \frac{\varphi \left( \alpha + \frac{1}{2} \varphi \right)}{1 - \frac{EA}{c} \delta_c}. \quad (7)$$

Рассмотрим деформацию рёбер  $BC$  и  $CD$  в горизонтальной и вертикальной плоскостях. В горизонтальной плоскости удлинение  $\Delta l_{BCh}$  этих рёбер запишется формулой:

$$\Delta l_{BCh} = 2a \sin(\angle COD). \quad (8)$$

В вертикальной плоскости будет происходить поворот относительно точки  $C$ .

$$\Delta l_{BCv} = c \cdot \varphi \left( \alpha + \frac{1}{2} \varphi \right). \quad (9)$$

Здесь  $\Delta l_{BCv} = 0$ , поскольку стержень  $BC$  ( $CD$ ) перемещается в пространстве без поворота, в многоугольнике  $ABCDEF$  точки  $B$ ,  $C$ ,  $D$  получают одни и те же вертикальные перемещения.

Полное значение удлинения  $\Delta l$  в указанном многоугольнике может быть записано следующим образом:

$$\Delta l_{BC} = a. \quad (10)$$

Значение  $a$  можно взять из формулы (7) и переписать формулу (10) в следующем виде:

$$\Delta l_{CD} = EA\delta_c \frac{\varphi\left(\alpha + \frac{1}{2}\varphi\right)}{1 - \frac{EA}{c}\delta_c}. \quad (11)$$

Для определения продольных деформаций в остальных стержнях многогранника необходимо определить перемещения остальных точек, полагая стержни нерастяжимыми для решения задачи о радиальных углах искажения сетки. В первую очередь следует рассмотреть перемещение  $b$  в горизонтальной проекции  $CDI$ . В деформированной схеме требуется рассмотреть поворот треугольника  $CDI$  вокруг грани  $CD$ .

$$\phi \approx \frac{a}{c}. \quad (12)$$

Общую деформацию стержня от движения его концов в вертикальной и горизонтальной плоскостях можно выразить

$$\Delta l_{CI} = \Delta l_{CIh} + \Delta l_{CIV}. \quad (13)$$

Продольная деформация в вертикальной плоскости для этого стержня может быть записана в следующем виде, подобно выражению (4):

$$\Delta l_{CIV} = \alpha(\varphi + \phi) \left( \alpha + \frac{1}{2}(\varphi + \phi) \right) = c \left( \varphi + \frac{a}{c} \right) \left( \alpha + \frac{1}{2} \left( \varphi + \frac{a}{c} \right) \right). \quad (14)$$

Полную продольную деформацию можно записать, используя уравнение (7):

$$\Delta l_{CI} = \alpha(\varphi + \phi) \left( \alpha + \frac{1}{2}(\varphi + \phi) \right) = c \left( \varphi + \frac{a}{c} \right) \left( \alpha + \frac{1}{2} \left( \varphi + \frac{a}{c} \right) \right) + b. \quad (15)$$

Здесь  $b$  – перемещение точки  $I$ . Это перемещение можно выразить подобно формуле (3).

Поскольку стержень поворачивается на малый угол, то изменение проекции его также мало.

$$b \approx 0. \quad (16)$$

Окончательно деформацию  $\Delta l_{CI}$  можно записать в следующем виде:

$$\Delta l_{CI} = c \left( \varphi + \frac{a}{c} \right) \left( \alpha + \frac{1}{2} \left( \varphi + \frac{a}{c} \right) \right). \quad (17)$$

Теперь необходимо рассмотреть треугольник  $CHI$ , вращение которого происходит вокруг ребра  $CI$ . Здесь необходимо определить величину деформации  $d$ . Для отыскания её необходимо воспользоваться теоремой косинусов, полагая, что стержни будут стремиться сохранить первоначальную длину.

$$\left( c - \frac{1}{2}a \right)^2 + \left( c - \frac{1}{2}d \right)^2 - 2 \left( c - \frac{1}{2}a \right) \left( c - \frac{1}{2}d \right) \cos(CGH) = (c - a - d)^2. \quad (18)$$

Раскрывая скобки, приводя подобные и отбрасывая малые второго порядка, предыдущее выражение может быть преобразовано в следующее:

$$\frac{3}{2}ac + \frac{3}{2}dc = 0 \Rightarrow |a| = |d|. \quad (19)$$

Для выражения продольной деформации стержня необходимо отыскать угол искажения сетки на стержне  $CH$ , без учёта малых второго порядка.

$$\cos \lambda = \frac{c - a - d}{c} = 1 - \frac{a + d}{c}; \quad (20)$$

$$(\sin \lambda)^2 = 1 - \left( 1 - \frac{a + d}{c} \right)^2 = 4 \frac{a}{c};$$

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{a}{c}}. \quad (21)$$

Продольная деформация стержня с учётом формулы (7) может быть записана в следующем виде:

$$\Delta l_{CH} = c \left( \varphi + 2\sqrt{\frac{a}{c}} \right) \left( \alpha + \frac{1}{2} \left( \varphi + 2\sqrt{\frac{a}{c}} \right) \right) + \frac{EA}{c} \Delta l_{CH} \delta_H. \quad (22)$$

Формулу (23) можно записать относительно одной переменной  $\varphi$  следующим образом:

$$\Delta l_{CH} = \frac{c \left( \varphi + 2\sqrt{\frac{a}{c}} \right) \left( \alpha + \frac{1}{2} \left( \varphi + 2\sqrt{\frac{a}{c}} \right) \right)}{1 - \frac{EA}{c} \Delta l_{CH} \delta_H}. \quad (23)$$

Относительные деформации стержней  $CO$ ,  $CD$  ( $CB$ ),  $CI$  ( $CG$ ),  $CH$  можно записать в виде следующих зависимостей, вводя обозначения

$$\xi = \frac{\varphi}{\alpha} \text{ и } D_i = 1 - \frac{EA}{c} \delta_i:$$

$$\varepsilon_{CO} = \alpha^2 \frac{\xi \left( 1 + \frac{1}{2} \xi \right)}{1 - \frac{EA}{c} \delta_C}; \quad (24)$$

$$\varepsilon_{CD} = \alpha^2 \frac{1 - D_C}{D_C} \xi \left( 1 + \frac{1}{2} \xi \right); \quad (25)$$

$$\varepsilon_{CI} = \alpha^2 \left( \xi + \frac{a}{\alpha c} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a}{\alpha c} \right) \right); \quad (26)$$

$$\varepsilon_{CH} = \frac{\alpha^2 \left( \xi + \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{a}{c}} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{a}{c}} \right) \right)}{D_H}. \quad (27)$$

Таким образом, можно отметить, что рассматривать влияние перемещений третьего ряда узлов на перемещения зенитного узла нет необходимости.

Продольные силы в стержнях можно найти, умножив значение относительной деформации на жёсткость стержня на растяжение-сжатие. Сумма проекций продольных сил стержней на нормаль к поверхности должна быть равна узловой нагрузке  $F_1$ , полагая, что в пологой сетчатой конструкции изменение угла наклона нормали от отвесной прямой мало:

$$\frac{F_1}{EA} = \varepsilon_{CO} \alpha (1 + \xi) + 2\varepsilon_{CD} \alpha (1 + \xi) + 2\varepsilon_{CI} \alpha \left( 1 + \xi + \frac{a}{\alpha c} \right) + \varepsilon_{CH} \alpha \left( 1 + \xi + \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{a}{c}} \right). \quad (28)$$

Значение узловой нагрузки от усилия  $P_1$  может быть записано для шарнирно-стержневой системы в следующем виде, используя

переменную  $\chi = \frac{\theta}{\alpha}$ :

$$P_1 = 6EA\alpha^3 \chi \left( 1 - \frac{1}{2} \chi \right) (1 - \chi) \frac{1}{2 - D_C}. \quad (29)$$

Следует отметить, что углы поворота стержней  $\alpha\chi = \theta$  и  $\alpha\xi = \varphi$  разные по величине, поэтому простое на первый взгляд суммирование величин  $F_1$  и  $P_1$  неправомерно, поскольку изменение угла  $\varphi$  пока не связано с силой  $F_1$ . Указанные угловые перемещения развиваются с разной скоростью. Теперь необходимо ввести параметры  $\eta = \frac{F_1}{P_1}$  и  $\omega = \frac{\chi}{\xi}$ . Отношение нагрузок  $F_1$  и  $P_1$  в шарнирной системе с учётом указанных параметров можно записать в виде следующего выражения:

$$\eta = \frac{F_1}{P_1}. \quad (30)$$

Из формулы (30) следует определить значение  $\omega$  для каждого значения  $\xi$ . Здесь  $\omega$  – неявно заданная функция.

В жёстко-стержневой системе параметр совместности отношения усилий и деформаций можно записать следующим образом:

$$\eta = \frac{F_{1ж}}{P_{1ж}}. \quad (31)$$

Силу  $F_{1ж}$  в жёстко-стержневой системе можно определить из следующего выражения:

$$F_{1ж} = EA\epsilon_{CO}\alpha(1+\xi) + 2EA\epsilon_{CO}\alpha(1+\xi) + 2EA\epsilon_{CI}\alpha\left(1+\xi+\frac{a}{\alpha c}\right) + EA\epsilon_{CH}\alpha\left(1+\xi+\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{a}{c}}\right) + \sum Q. \quad (32)$$

Сумма поперечных сил может быть записана в виде следующего выражения:

$$\sum Q = Q_{OC} + 2Q_{CD} + 2Q_{CI} + Q_{CH}. \quad (33)$$

Чтобы определить значения поперечных сил в стержнях пирамиды  $OBGHID$ , необходимо найти моменты на каждом из концов стержней. Сложное движение стержня можно описать суммой простых для определения моментов. На рисунке 5 показаны эпюры от отдельных перемещений стержня  $CO$ .

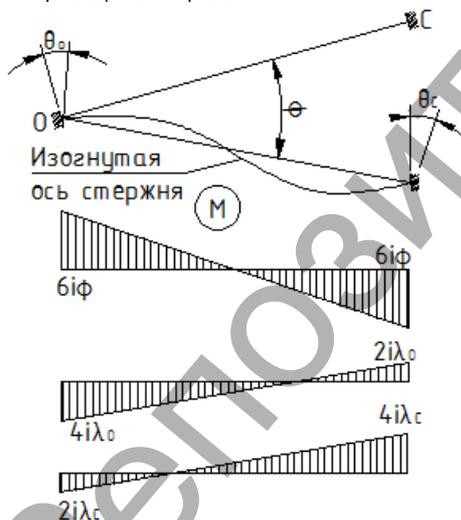


Рис. 5. Эпюры от смещения концов упруго закреплённого стержня

Для примера вывода зависимостей подробно следует рассмотреть движение стержня  $CO$  от силы  $F_1$ . Необходимо найти моменты на каждом из концов стержня. Для этого следует ввести следующие обозначения:

- $r_C^{CO}$  – отпорность моментной опоры  $C$  стержня  $CO$ ;
- $r_O^{CO}$  – отпорность моментной опоры  $O$  стержня  $CO$ ;
- $i$  – погонная жёсткость стержней;
- $N^{CO}$  – продольная сила в стержне  $CO$ ;

$M_O^{CO}$  – момент в точке  $C$  стержня  $CO$ .

Подобным образом будут обозначаться моментные отпорности и продольные силы на других стержнях.

Углы поворота торцов стержня и моментные отпорности торцов связаны зависимостями  $M_O^{CO} r_O^{CO} = \lambda_O^{CO}$ ,  $M_C^{CO} r_C^{CO} = \lambda_C^{CO}$ .

Необходимо просуммировать моменты от отдельных перемещений в каждой из концевых точек стержня.

$$\begin{cases} M_O^{CO} = 6i\varphi - 4iM_O^{CO} r_O^{CO} - 2iM_C^{CO} r_C^{CO} + N^{CO} \alpha(\varphi - M_O^{CO} r_O^{CO}) \\ M_C^{CO} = 6i\varphi - 4iM_C^{CO} r_C^{CO} - 2iM_O^{CO} r_O^{CO} + N^{CO} \alpha(\varphi - M_C^{CO} r_C^{CO}) \end{cases} \quad (34)$$

Здесь  $N^{CO} \alpha(\varphi - M_O^{CO} r_O^{CO})$  и  $N^{CO} \alpha(\varphi - M_C^{CO} r_C^{CO})$  – доли момента от распора при искривлении оси стержня. Решая систему уравнений (34), можно получить следующие выражения для моментов на торцах стержня:

$$\begin{cases} M_O^{CO} = \frac{\alpha\xi(6i + N^{CO}c)(1 + 2ir_C^{CO} + N^{CO}cr_C^{CO})}{(1 + 4ir_C^{CO} + N^{CO}cr_C^{CO})(1 + 4ir_O^{CO} + N^{CO}cr_O^{CO}) - 4i^2r_C^{CO}r_O^{CO}} \\ M_C^{CO} = \frac{\alpha\xi(6i + N^{CO}c)(1 + 2ir_O^{CO} + N^{CO}cr_O^{CO})}{(1 + 4ir_C^{CO} + N^{CO}cr_C^{CO})(1 + 4ir_O^{CO} + N^{CO}cr_O^{CO}) - 4i^2r_C^{CO}r_O^{CO}} \end{cases} \quad (35)$$

Также необходимо определить продольную силу  $N^{CO}$ :

$$N^{CO} = EA\alpha^2 \frac{\xi \left(1 + \frac{1}{2}\xi\right)}{D_C}. \quad (36)$$

Выражение (36) определяет продольную силу в стержне от нагрузки  $F_1$ . Следует заметить, что это выражение и все последующие выражения для продольных сил стержней пирамиды  $OBGHID$  будут определять случай растяжения стержней  $CO$ ,  $CD$  ( $CB$ ),  $CI$  ( $CG$ ),  $CH$ .

Поперечную силу в стержне можно вычислить следующим образом [7], принимая во внимание, что моменты в стержне от распора незначительно искривляют эпюру моментов:

$$Q_{OC} = \frac{M_O^{CO} - M_C^{CO}}{c}. \quad (37)$$

Учитывая решение системы (35) – абсолютные величины моментов на концах стержня и что эпюра моментов двузначная, выражение (36) запишется следующим образом:

$$Q_{OC} = \frac{|M_O^{CO}| + |M_C^{CO}|}{c}. \quad (38)$$

Таким образом можно вычислить поперечную силу  $Q_{OC}$ :

$$Q_{OC} = \frac{\alpha\xi \left(\frac{6i}{c} + N^{CO}\right) (2 + 2i(r_C^{CO} + r_O^{CO}) + N^{CO} \alpha(r_C^{CO} + r_O^{CO}))}{(1 + 4ir_C^{CO} + N^{CO}cr_C^{CO})(1 + 4ir_O^{CO} + N^{CO}cr_O^{CO}) - 4i^2r_C^{CO}r_O^{CO}}. \quad (39)$$

Точно таким же образом можно вычислить моменты и поперечную силу в стержне  $CH$ , учитывая искажение угла выпучивания на величину  $\lambda = 2\sqrt{\frac{a}{c}}$ . Угол поворота торца  $C$  в плоскости стержня

будет так же равняться  $M_C^{CO} r_C^{CO}$ .

$$\begin{cases} M_C^{CH} = 6i \left( \varphi + 2\sqrt{\frac{a}{c}} \right) + 4iM_C^{CO} r_C^{CO} - 2iM_H^{CH} r_H^{CH} + \\ + N^{CH} c \left( \varphi + 2\sqrt{\frac{a}{c}} + M_C^{CO} r_C^{CO} \right); \\ M_H^{CH} = 6i \left( \varphi + 2\sqrt{\frac{a}{c}} \right) - 4iM_H^{CH} r_H^{CH} + 2iM_C^{CO} r_C^{CO} + \\ + N^{CH} c \left( \varphi + 2\sqrt{\frac{a}{c}} + M_H^{CH} r_H^{CH} \right). \end{cases} \quad (40)$$

Из второго уравнения системы (40) можно определить момент  $M_H^{CH}$  и подставить в первое уравнение, считая, что момент  $M_C^{CO}$  уже определён.

$$\begin{cases} M_C^{CH} = (6i + N^{CH}c) \left( \phi + 2\sqrt{\frac{a}{c}} \right) \left( 1 - \frac{2ir_H^{CH}}{1 + 4ir_H^{CH} + N^{CH}cr_H^{CH}} \right) + \\ + M_C^{CO}r_C^{CO} \left( 4i + N^{CH}c - \frac{4i^2r_H^{CH}}{1 + 4ir_H^{CH} + N^{CH}cr_H^{CH}} \right); \\ M_H^{CH} = \frac{(6i + N^{CH}c) \left( \phi + 2\sqrt{\frac{a}{c}} \right) + 2iM_C^{CO}r_C^{CO}}{1 + 4ir_H^{CH} + N^{CH}cr_H^{CH}}. \end{cases} \quad (41)$$

Поперечную силу  $Q_{CH}$  можно получить точно так же, как и по формуле (38), меняя индексы-обозначения точек и стержней.

$$\begin{aligned} Q_{OC} = & \alpha \left( \frac{6i}{c} + N^{CH} \right) \left( \xi + \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{a}{c}} \right) \left( 1 - \frac{2ir_H^{CH} - 1}{1 + 4ir_H^{CH} + N^{CH}cr_H^{CH}} \right) + \\ & + \frac{M_C^{CO}r_C^{CO}}{c} \left( 4i + N^{CH}c - \frac{4i^2r_H^{CH} - 2i}{1 + 4ir_H^{CH} + N^{CH}cr_H^{CH}} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Продольная сила  $N^{CH}$  запишется следующим образом:

$$N^{CH} = EA \frac{\alpha^2 \left( \xi + \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{a}{c}} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{a}{c}} \right) \right)}{D_H}. \quad (43)$$

Поперечная сила в стержне  $Cl$  может быть выражена так, как и в стержне  $CO$  с учётом искажения решётки на угол  $\frac{a}{c}$ , также необходимо принять, что угол поворота опоры  $C$  в радиальной плоскости в этом стержне можно определить в виде следующей зависимости:

$$M_C^{Cl}r_C^{Cl} = M_C^{CO}r_C^{CO} \cos \gamma = \frac{1}{2} M_C^{CO}r_C^{CO}, \quad (44)$$

где  $\cos \gamma = \frac{1}{2}$  – косинус угла между стержнями на проекционной плоскости.

$$\begin{cases} M_C^{Cl} = 6i \left( \phi + \frac{a}{c} \right) + 4iM_C^{Cl}r_C^{Cl} - 2iM_i^{Cl}r_i^{Cl} + \\ + N^{Cl}c \left( \phi + \frac{a}{c} + M_C^{Cl}r_C^{Cl} \right); \\ M_i^{Cl} = 6i \left( \phi + \frac{a}{c} \right) - 4iM_i^{Cl}r_i^{Cl} + 2iM_C^{Cl}r_C^{Cl} + \\ + N^{Cl}c \left( \phi + \frac{a}{c} + M_i^{Cl}r_i^{Cl} \right). \end{cases} \quad (45)$$

С учётом выражения (41), из системы уравнений (42) можно сразу выразить  $M_i^{Cl}$  и подставить его в первое уравнение и тем самым определить  $M_C^{Cl}$ . Решение представленной системы уравнений запишется следующим образом:

$$\begin{cases} M_C^{Cl} = \alpha \left( \xi + \frac{a}{\alpha c} \right) (6i + N^{Cl}c) \left( 1 - \frac{2ir_i^{Cl}}{1 + 4ir_i^{Cl} + N^{Cl}cr_i^{Cl}} \right) + \\ + M_C^{CO}r_C^{CO} \left( \frac{1}{2} N^{Cl}c + 2i - \frac{2i^2r_i^{Cl}}{1 + 4ir_i^{Cl} + N^{Cl}cr_i^{Cl}} \right); \\ M_i^{Cl} = \frac{\alpha \left( \xi + \frac{a}{\alpha c} \right) (6i + N^{Cl}c) + iM_C^{CO}r_C^{CO}}{1 + 4ir_i^{Cl} + N^{Cl}cr_i^{Cl}}. \end{cases} \quad (46)$$

Поперечную силу можно выразить по формуле (41).

$$\begin{aligned} Q_{Cl} = & \alpha \left( \frac{6i}{c} + N^{Cl} \right) \left( \xi + \frac{a}{\alpha c} \right) \left( 1 - \frac{2ir_i^{Cl} - 1}{1 + 4ir_i^{Cl} + N^{Cl}cr_i^{Cl}} \right) + \\ & + \frac{M_C^{CO}r_C^{CO}}{c} \left( 2i + \frac{1}{2} N^{Cl}c - \frac{2i^2r_i^{Cl} - i}{1 + 4ir_i^{Cl} + N^{Cl}cr_i^{Cl}} \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Продольная сила  $N^{Cl}$  может быть записана в следующем виде:

$$N^{Cl} = EA \alpha^2 \left( \xi + \frac{a}{\alpha c} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a}{\alpha c} \right) \right). \quad (48)$$

Теперь необходимо рассмотреть стержень  $CD$  ( $CB$ ), торцы которого расположены на осях симметрии 1–2 (2–3). На рисунке 6 показаны эпюры от поворота опор стержня. Как уже писалось выше, хорды этих стержней поворотов не получают.

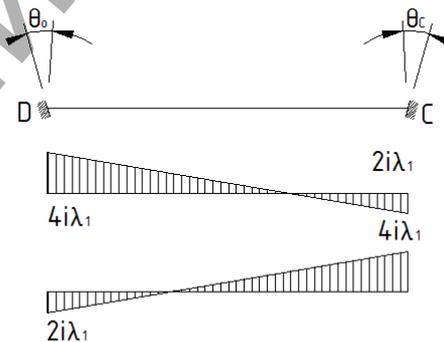


Рис. 6. Эпюры моментов от поворота каждого торца стержня  $CD$

Угол поворота опор равен  $\lambda_1 = M_C^{CO}r_C^{CO} \cos \gamma = \frac{1}{2} M_C^{CO}r_C^{CO}$ .

Нетрудно заметить, что в результате суммирования эпюр результирующая эпюра моментов будет прямоугольной. Поскольку поперечная сила в сечении – первая производная момента в этом сечении, можно сделать вывод, что поперечной силы в этом стержне возникать не будет, так как производная константы равна нулю.

$$Q_{CD} = 0. \quad (49)$$

Так, выражение (33), можно переписать следующим образом:

$$\sum Q = Q_{OC} + 2Q_{Cl} + Q_{CH}. \quad (50)$$

В системе с жёсткими узлами, функция узловой критической постоянной по величине  $P_{1ж}$  для фрагмента  $ABCDEF$  запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_{1ж} = & \frac{6EA\alpha^3}{2 - D_c} \chi \left( 1 - \frac{1}{2} \chi \right) (1 - \chi) + \\ & \frac{6\alpha\chi \left( \frac{6i}{c} + N^{CO} \right) (2 + 2i(r_C^{CO} + r_O^{CO}) + N^{CO}c(r_C^{CO} + r_O^{CO}))}{(1 + 4ir_C^{CO} + N^{CO}cr_C^{CO})(1 + 4ir_O^{CO} + N^{CO}cr_O^{CO}) - 4i^2r_C^{CO}r_O^{CO}}. \end{aligned} \quad (51)$$

Продольную силу в стержнях пирамиды можно выразить в виде функции:

$$N^{CO} = EA\alpha^2\chi \left(1 - \frac{1}{2}\chi\right) \frac{1}{2 - D_C}. \quad (52)$$

В выражении (31) сравниваются значения узловых нагрузок в пирамидах  $OBGHID$  и  $ABCDEF$ . Точки приложения этих нагрузок хотя и разные, но в левой части выражения (31) стоит заданная заранее величина, а в правой части происходит сравнение углов поворота хорд стержней, отнесённых к параметру  $\xi$ . Поэтому точка приложения нагрузки на параметр  $\omega$  не повлияет, поскольку параметр  $\xi$  также определён.

Формулы (30) и (31) связывают параметры нагружения и параметры деформирования фрагмента шарнирной и жёсткой системы. Так, если величина  $\eta$  задана изначально по результатам сбора нагрузок, то величину  $\omega$  необходимо определять подбором, чтобы равенства (30) или (31) были справедливы для каждого значения  $\xi$ .

Теперь можно записать величину смещения  $a_1$  (формула (7)) узлов  $B, C, D$ , переходя от параметров деформирования фрагмента от нагрузки  $F_1$  к параметрам деформирования от нагрузки  $P_1$ .

$$a_1 = \frac{D_C - 1}{2 - D_C} \alpha^2 \chi \left(1 - \frac{1}{2}\chi\right). \quad (53)$$

Для вычисления критической нагрузки при неравномерном нагружении купола осесимметричной неравномерной узловой нагрузкой величину  $a$  следует суммировать с величиной  $a_1$  от нагрузки  $P_1$ .

$$\bar{a} = a_1 + a = \alpha^2 \chi \frac{1 - D_C}{\omega D_C (2 - D_C)} \times \left( D_C (\omega - 1) + 2 - \frac{1}{2} \chi \frac{D_C (\omega^2 + 1) - 2}{\omega} \right). \quad (54)$$

Продольная сила в стержне  $CO$  запишется в виде суммы продольных сил, определённых по формулам (39) и (55), учитывая, что продольная сила по формуле (38) вызывает растяжение стержня  $CO$ , а сила, определённая по формуле (52), – сжатие:

$$N = \frac{EA\alpha^2\chi}{\omega D_C (2 - D_C)} \left( D_C (\omega + 1) + 2 - \frac{1}{2} \chi \frac{D_C (\omega^2 - 1) + 2}{\omega} \right). \quad (55)$$

С учётом значения  $\bar{a}$  и значения продольной силы  $N$  формулу для определения критической нагрузки можно переписать в следующем виде:

$$P = \frac{6EA\alpha^3\chi}{\omega D_C (2 - D_C)} \left( D_C (\omega + 1) + 2 - \frac{1}{2} \chi \frac{D_C (\omega^2 - 1) + 2}{\omega} \right) \left( 1 - \left( \chi + \frac{\chi}{\omega} \right) \right) + \frac{\alpha \left( \chi + \frac{\chi}{\omega} \right) \left( \frac{6i}{c} + N^{CO} \right) (2 + 2i(r_C^{CO} + r_O^{CO}) + N^{CO} \alpha (r_C^{CO} + r_O^{CO}))}{(1 + 4ir_C^{CO} + N^{CO} \alpha c)(1 + 4ir_O^{CO} + N^{CO} \alpha c) - 4i^2 r_C^{CO} r_O^{CO}} > P_{y3}, \quad (56)$$

где  $P_{y3}$  – узловая внешняя нагрузка.

Необходимо заметить особенность полученных формул (29) и (56). Полагая  $\omega = \infty$  (развивается только угол  $\omega\xi = \chi$ , вызванный нагрузкой  $P_1$ ), коэффициент  $\eta = 0$ , что свидетельствует о том, что  $F_1 = 0$ . То есть купол загружен одинаковой по величине узловой нагрузкой. Таким образом, из формулы (56) можно вывести формулу (54), полученную ранее (54), несколько преобразованную для наглядности:

$$P_1 = 6EA\alpha^3\chi \left( \left( 1 - \frac{1}{2}\chi \right) - \frac{a}{\alpha^2 c} \right) (1 - \chi) + 6\alpha\chi \left( \frac{6i}{c} + N^{CO} \right) (2 + 2i(r_C^{CO} + r_O^{CO}) + N^{CO} \alpha (r_C^{CO} + r_O^{CO})) \quad (57)$$

$$+ \frac{(1 + 4ir_C^{CO} + N^{CO} \alpha c)(1 + 4ir_O^{CO} + N^{CO} \alpha c) - 4i^2 r_C^{CO} r_O^{CO}}{(1 + 4ir_C^{CO} + N^{CO} \alpha c)(1 + 4ir_O^{CO} + N^{CO} \alpha c) - 4i^2 r_C^{CO} r_O^{CO}}$$

Сравнивая выражения (54) и (55), можно заметить, что значения, вычисленные по формуле (54), будут всегда отличаться от тех, что вычислены по формуле (54), при одних и тех же значениях  $\chi$ .

Для сетчатой конструкции с жёсткими узлами моменты и поперечные силы можно записать как и в (33), если законы изменения продольных сил в стержнях определены при найденном значении  $\omega$ :

$$\left\{ \begin{aligned} M_O^{CO} &= \frac{\alpha \left( \chi + \frac{\chi}{\omega} \right) (6i + N^{CO} c) (1 + 2ir_C^{CO} + N^{CO} \alpha c)}{(1 + 4ir_C^{CO} + N^{CO} \alpha c)(1 + 4ir_O^{CO} + N^{CO} \alpha c) - 4i^2 r_C^{CO} r_O^{CO}}; \\ M_C^{CO} &= \frac{\alpha \left( \chi + \frac{\chi}{\omega} \right) (6i + N^{CO} c) (1 + 2ir_O^{CO} + N^{CO} \alpha c)}{(1 + 4ir_C^{CO} + N^{CO} \alpha c)(1 + 4ir_O^{CO} + N^{CO} \alpha c) - 4i^2 r_C^{CO} r_O^{CO}}. \end{aligned} \right. \quad (58)$$

### Заключение

1. Получена формула для определения критической нагрузки на узел, вызывающей потерю местной устойчивости сетки, для сферических сетчатых куполов с шарнирными и жёсткими узлами, нагруженных одинаковой по значению нагрузкой в радиальной плоскости, но симметрично относительно вертикальной оси.
2. Значение критической узловой нагрузки при нагружении неравной по величине узловой нагрузкой однослойной сетки всегда отличается от того, что вычислено при нагружении нагрузкой одной величины, поскольку учитываются перемещения соседних узлов.
3. Полученную формулу для определения критической узловой нагрузки следует применять для пологих сетчатых куполов, сетка которых построена методом проецирования, при этом проекционная плоскость должна быть разбита на сеть равносторонних треугольников.

### СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Савельев, В.А. Теоретические основы проектирования металлических куполов: автореф. дис д-ра техн. наук: 05.23.01 / В.А. Савельев. – М., 1995. – 39 с.
2. Савельев, В.А. Влияние начальных несовершенств и неравномерности загрузки на устойчивость сферического купола с жёсткими узлами / В.А. Савельев // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1971. – № 5. – С. 32–34.
3. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1967. – 948 с.
4. Журавлёв, А.А. Устойчивость пирамидальных элементов сетчатого купола / А.А. Журавлёв // Межотраслевые вопросы строительства / ЦИНИС, реферат. инф. – М., 1972. – Вып. 4. – С. 66–70.
5. Журавлёв, А. А. Местная устойчивость куполов с треугольными ячейками / А. А. Журавлёв, В. В. Мартинец // Межотраслевые вопросы строительства / ЦИНИС, реферат. инф. – М., 1971. – Вып. 8. – С. 8–10.
6. Савельев, В.А. Влияние начальных несовершенств и неравномерности загрузки на устойчивость сферического купола с жёсткими узлами / В.А. Савельев // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1971. – № 5. – С. 32–34.
7. Борисевич, А.А. Строительная механика / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – 2-е изд., перераб. и доп. – Мн.: БНТУ, 2009. – 756 с.

Материал поступил в редакцию 31.01.16

### DRAGAN V.I., GLUSHKO K.K. Research of the intense deformed condition of the convex rod polyhedrons constructed on a spherical surface at action of axisymmetric uneven loading

Determining the relationship between the load nodes and internal forces in the rods fragment of the dome in a radial plane at the geometrically non-linear deformation process when fragments of unequal value of the nodal load.