МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

РЯДЫ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Методические рекомендации и варианты контрольной работы по дисциплине *“Высшая математика”* для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Брест 2011

УДК 517.4/.5 (076)

В настоящей методической разработке приведены вопросы программы и варианты контрольной работы по разделам «Ряды», «Теория функции комплексного переменного» и «Операционное исчисление» дисциплины «Высшая математика», изучаемых студентами технических специальностей заочной формы обучения в третьем семестре. Приведены некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения контрольной работы. В организационно-методических указаниях указаны правила оформления контрольной работы.

Составители: Гладкий И.И., доцент,
Лизунова И.В., доцент,
Тузик Т.А., доцент,
Юхимук М.М., старший преподаватель

Рецензент: Савчук В.Ф., зав. кафедрой информатики и прикладной математики УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент.

ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В контрольную работу включены 8 заданий по разделам «Ряды», «Теория функции комплексного переменного» и «Операционное исчисление» дисциплины «Высшая математика».

Нумерация задач состоит из двух чисел: первое число – номер задания, второе (после точки) – номер варианта.

Правила оформления контрольной работы:

1) контрольная работа выполняется в отдельной (тонкой) ученической тетради с отчерченными полями;
2) на обложке обязательно должен быть указан шифр (номер зачетной книжки);
3) контрольная работа выполняется студентом в соответствии со своим вариантом, который определяется по двум последним цифрам шифра;
4) каждое задание начинается на новой странице с обязательной записью его полного условия. Если задача имеет общую формулировку, то ее условие переписывают, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта;
5) решения всех заданий должны быть подробными и аккуратными, содержать достаточные пояснения, необходимые рисунки и таблицы;
6) завершает работу список используемой литературы и роспись студента;
7) после рецензии исправления в тексте работы недопустимы;
8) исправление ошибок, указанных рецензентом, выполняют в той же тетради после росписи студента.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КУРСА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

III семестр

1. Числовой ряд и его сумма. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.
2. Свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда.
3. Признаки сравнения.
4. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши.
5. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
6. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
7. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.
8. Функциональный ряд и его область сходимости.
9. Равномерная сходимость функционального ряда. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.
10. Степенной ряд. Теорема Абеля.
11. Область сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов.

12. Условия представления функции рядом Тейлора. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.
13. Приложения степенных рядов.
14. Ряд Фурье. Тригонометрический ряд Фурье для 2π- периодической функции.
15. Ряды Фурье для четных и нечетных функций.
16. Ряды Фурье для функций, заданных на отрезке $[0,\pi]$.
17. Ряд Фурье для функции, заданной на отрезке длины 2π.
18. Ряд Фурье для функций с произвольным периодом.
19. Понятие функции комплексной переменной. Геометрическая интерпретация.
20. Предел и непрерывность функции в точке. Основные элементарные функции комплексной переменной.
21. Производная функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана.
22. Аналитические функции. Правильные и особые точки аналитической функции.
23. Геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции.
24. Гармонические функции.
25. Понятие конформного отображения.
26. Интеграл от функции комплексной переменной, его свойства и вычисление.
27. Интегральная теорема Коши.
28. Интегральная формула Коши. Формулы для производных.
29. Ряд Тейлора в комплексной области.
30. Ряд Лорана.
31. Нули и изолированные особые точки аналитической функции.
32. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке.
33. Вычет в бесконечно удаленной точке.
34. Основная теорема о вычетах.
35. Применение вычетов к вычислению интегралов.
36. Оригинал и изображение. Классы оригиналов и изображений.
37. Линейность преобразования. Теоремы подобия и запаздывания.
38. Изображение свертки оригиналов.
39. Дифференцирование и интегрирования оригиналов и изображений.
40. Графическое задание оригиналов.
41. Оригиналы от рациональных функций.
42. Решение дифференциальных уравнений операционным методом.
43. Решение систем дифференциальных уравнений операционным методом.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Задание 1. Исследовать сходимость числовых рядов.

1.1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.

1.2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2+1}$.

1.3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^{n-1}}{n^2+4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

1.4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+4}{(n+1)^4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{n(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

1.5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{(2n+1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n-2}}$.

1.6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{(n+1)^2}$.

1.7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n\cdot 5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2-1}$.

1.8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^n}{(n+1)^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$.

1.9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(2n+8)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n-1}}{(n+1)^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}$.

1.10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+5)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{(n+1)(n+3)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$.

1.11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+8n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(n+1)(n+2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$.

1.12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$.

1.13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n+1)}$.

1.14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^{n-1}}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^2}$.

1.15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot 3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n-1}}$.

1.16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{n^2(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 2^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

1.17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-2}{n^2+3n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

1.18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{n(n+4)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot 6^n}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+1}}$.

1.19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^4}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{4n+5}}$.

1.20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{\sqrt{n^3+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.

1.21. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n+1}}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)^2}$.

1.22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+3}$.

1.23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{\sqrt{n^2+4n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot 5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{2n^2+1}$.

1.24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 3^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+4}$.

1.25. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+3}$.

1.26. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+4}$.

1.27. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{(n+1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^n}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5n+3}$.

1.28. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 2^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^2}$.

1.29. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+3)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n(n+1)(n+2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

1.30. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+5)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n\cdot 5^{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+6}$.

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость:
а) написать первые четыре члена ряда;
б) найти интервал сходимости ряда;
в) выявить вопрос о сходимости ряда на концах интервала сходимости.

2.01. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n}{2^n\cdot n^n}(x+1)^n$.

2.02. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n\cdot(n+1)}(x-3)^n$.

2.03. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+3)}(x-4)^n$.

2.04. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n}(x+1)^n$.

2.05. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n\cdot n^n}(x-1)^n$.

2.06. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{3^n}(x-1)^n$.

2.07. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\cdot n}(x+3)^n$.

2.08. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n\cdot(n+3)}(x+1)^n$.

2.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}(x+6)^n$.

2.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2)(x+3)^n$.

2.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{6^n}(x-6)^n$.

2.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n\cdot n^n}(x-3)^n$.

2.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x+1)^n$.

2.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}(x-1)^n$.

2.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n+2}}(x+2)^n$.

2.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^n}(2x-1)^n$.

2.09. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n}(x-2)^{n}$.

2.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^{2}}(x+8)^{n}$.

2.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)^{n}}{3^{n}\cdot n^{n}}(x-1)^{n}$.

2.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n^{2}}(x-2)^{n}$.

2.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n}}(x+2)^{n}$.

2.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^{n}\cdot n}(x-5)^{n}$.

2.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n}}{2n-1}(x-4)^{n}$.

2.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^{n}}{(n+1)^{n}}(x+4)^{n}$.

2.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}\cdot 4^{n}}(x+1)^{n}$.

2.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot(2+x)^{n}$.

2.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{2}\cdot 2^{n}}(x+5)^{n}$.

2.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}(x-1)^{n}$.

2.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{n(n+3)}(x-1)^{n}$.

2.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{n}}{n\cdot\sqrt{n}}(x+1)^{n}$.

Задание 3. Найти три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения $y'=f(x)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=y_0$.

3.01.	$y'=3\cos x+y^{2}$,	$y(0)=1$.
3.02.	$y'=2y+y^{2}$,	$y(0)=3$.
3.03.	$y'=4\sin x+y^{2}$,	$y(0)=1$.
3.04.	$y'=x^{2}+y^{2}$,	$y(0)=2$.
3.05.	$y'=2e^{y}+xy$,	$y(0)=0$.
3.06.	$y'=e^{x}+y^{2}$,	$y(0)=0$.
3.07.	$y'=2e^{y}-xy$,	$y(0)=0$.
3.08.	$y'=e^{x}+y$,	$y(0)=4$.
3.09.	$y'=\sin x+3y^{2}$,	$y(0)=1$.
3.10.	$y'=x+x^{2}+y^{3}$,	$y(0)=5$.
3.16.	$y'=3xy-e^{x}+4$,	$y(0)=0$.
3.17.	$y'=2\sin x-x^{2}y$,	$y(0)=1$.
3.18.	$y'=xy^{3}-2x$,	$y(0)=2$.
3.19.	$y'=3xy-\sin x$,	$y(0)=2$.
3.20.	$y'=e^{3x}+2xy^{2}$,	$y(0)=0$.
3.21.	$y'=2\sin x+xe^{y}+2$,	$y(0)=1$.
3.22.	$y'=4xy^{2}-yx^{2}$,	$y(0)=-1$.
3.23.	$y'=4xy^{2}-2x$,	$y(0)=3$.
3.24.	$y'=5xy^{2}-e^{x}+1$,	$y(0)=0$.
3.25.	$y'=4x^{3}-xy^{2}$,	$y(0)=1$.

3.11. $y' = 2x^2 + y^3$,		$y(0) = 3$.
3.12. $y' = 3x^2 - yx$,		$y(0) = 3$.
3.13. $y' = xy - e^{2x}$,		$y(0) = 0$.
3.14. $y' = 3xy^2 + y$,		$y(0) = 1$.
3.15. $y' = x^2y - 3x + 1$,		$y(0) = 0$.
3.26. $y' = e^{3x} - \sin x$,		$y(0) = 1$.
3.27. $y' = 3xy - \cos 3x$,		$y(0) = 1$.
3.28. $y' = x^2y + \sin 2x$,		$y(0) = 2$.
3.29. $y' = 3xy^2 - \sin 3x$,		$y(0) = 3$.
3.30. $y' = xy^2 + e^{3x}$,		$y(0) = 2$.

Задание 4. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке z_0 при отображении $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$.

	$u(x,y)$	$v(x,y)$	z_0
4.1.	$3x^2y - y^3$;	$3xy^2 - x^3$;	$-i + 1$.
4.2.	$e^{1+y}\cos x$;	$-e^{1+y}\sin x$;	$\frac{p}{4} + i$.
4.3.	$x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2$;	$3x^2y - y^3 + 2xy$;	$\frac{2}{3}i$.
4.4.	$2xy - 2x$;	$y^2 - 2y - x^2 + 1$;	1.
4.5.	$e^x\cos y$;	$e^x\sin y$;	$-1 + ip$.
4.6.	$x^2 + 2x - y^2$;	$2xy + 2y$;	i.
4.7.	$e^{-1-y}\cos x$;	$e^{-1-y}\sin x$;	$p - i$.
4.8.	$e^{-x}\cos y$;	$-e^{-x}\sin y$;	i.
4.9.	$x^2 - y^2$;	$2xy$;	$\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.
4.10.	$2xy$;	$y^2 - x^2$;	$-i$.
4.11.	$2x^2 - 2y^2 + y$;	$4xy - x$;	$-1 + i$.
4.12.	$e^{y^2-x^2}\cos 2xy$;	$-e^{y^2-x^2}\sin 2xy$;	i.
4.13.	$x^3 - 3xy^2 + 3x$;	$3x^2y - y^3 + 3y - 1$;	$-1 + i$.
4.14.	$x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2$;	$3x^2y - y^3 + 2xy$;	$1 - i$.

4.15.	$e^{-1+2y}\cos 2x$;	$-e^{-1+2y}\sin 2x$;	$\frac{p}{6}$.
4.16.	x^3-3xy^2+2x;	$3x^2y-y^3+2y-1$;	$2\,i$.
4.17.	$3xy^2-x^3$;	y^3-3x^2y;	$-1+i$.
4.18.	$-e^{1+y}\sin x$;	$-e^{1+y}\cos x$;	$-\frac{p}{4}-i$.
4.19.	$3x^2y-y^3+2xy$;	$-x^3+3xy^2-x^2+y^2$;	$\frac{2}{3}i$.
4.20.	x^2-y^2-x;	$2xy-y$;	$5-4i$.
4.21.	y^2-2y-x^2+1;	$2x-2xy$;	$1-2i$.
4.22.	$xy+y+2$;	$\frac{1}{2}\left(y^2-x^2\right)-x-1$;	$1+i$.
4.23.	$e^{-x}\sin y$;	$e^{-x}\cos y$;	$p\,i$.
4.24.	x^2-y^2-3x+1;	$2xy-3y$;	4 .
4.25.	$2xy-3y$;	$-x^2+y^2+3x-1$;	i .
4.26.	$4xy-x$;	$2y^2-y-2x^2$;	$1-i$.
4.27.	$3x^2y-y^3+3y-1$;	$3xy^2-x^3-3x$;	$\frac{1}{2}i$.
4.28.	$3x^2y-y^3+2xy$;	$y^2-x^3+3xy^2-x^2$;	$2+i$.
4.29.	$e^{1+2y}\sin 2x$;	$e^{1+2y}\cos 2x$;	$\frac{p}{3}$.
4.30.	$3x^2y-y^3+2x-1$;	$3xy^2-x^3+2y$;	$3+2i$.

Задание 5. Вычислить интегралы.

5.01. а) $\int\limits_L \bar{z}\cdot \mathrm{Re}\left(z^2\right)dz$, где L – дуга параболы $y=x^2$ от $z_1=0$ до $z_2=1+i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z}{(z+3)(z-3i)}dz$, где $C:\left|z+3\right|=1$.

5.02. а) $\int\limits_L \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re}\left(z^2\right) dz$, где L – отрезок прямой $y = 2 + x$ от $z_1 = -1 + i$ до $z_2 = 1 + 3i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{z+1}{(z+2+3i)(z+3i)} dz$, где $C: \left| z + 2 + 3i \right| = 1$.

5.03. а) $\int\limits_L \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re}\left(z^2\right) dz$, где L – дуга параболы $y = 1 - x^2$ от $z_1 = -1$ до $z_2 = i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{z-3}{(z+2-4i)(z+2-2i)} dz$, где $C: \left| z + 2 - 4i \right| = 1$.

5.04. а) $\int\limits_L z \cdot \operatorname{Re}\left(z^2\right) dz$, где L – дуга параболы $y = -x^2$ от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 - i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{z-2}{(z+2+i)(z+4+i)} dz$, где $C: \left| z + 2 + i \right| = 1$.

5.05. а) $\int\limits_L \operatorname{Re}\left(z^2\right) \cdot \operatorname{Im}(z + 2 - 3i) dz$, где L – отрезок прямой $y = 3 - x$ от $z_1 = 3i$ до $z_2 = 3$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{z-i}{(z+2-i)(z+2-3i)} dz$, где $C: \left| z + 2 - i \right| = 1$.

5.06. а) $\int\limits_L (\bar{z})^3 dz$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{z+2}{(z+1-4i)(z+5-4i)} dz$, где $C: \left| z + 1 - 4i \right| = 2$.

5.07. а) $\int\limits_L (\bar{z})^2 \cdot \operatorname{Im} z \, dz$, где L – отрезок прямой $y = 2 + x$ от $z_1 = -1 + i$ до $z_2 = 1 + 3i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{z+i}{(z+1+4i)(z+1+8i)} dz$, где $C: \left| z + 1 + 4i \right| = 2$.

5.08. а) $\int\limits_L (\bar{z})^2 \cdot \operatorname{Re} z\, dz$, где L – дуга параболы $y = 1 - x^2$ от $z_1 = -1$ до $z_2 = i$

б) $\oint\limits_C \dfrac{z + 2i}{(z + 1 - 2i)(z - 3 - 2i)} dz$, где $C: |z + 1 - 2i| = 2$.

5.09. а) $\int\limits_L z \cdot (\bar{z})^2\, dz$, где L – дуга параболы $y = -x^2$ от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 - i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{2z + 1}{(z + 1 - i)(z + 1 - 7i)} dz$, где $C: |z + 1 - i| = 3$.

5.10. а) $\int\limits_L (\bar{z})^2 \cdot \operatorname{Im}(z + 2 - 3i)\, dz$, где L – отрезок прямой $y = 3 - x$ от $z_1 = 3i$ до $z_2 = 3$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{z + 4}{(z + 1 + i)(z - 5 + i)} dz$, где $C: |z + 1 + i| = 3$.

5.11. а) $\int\limits_L \bar{z} \cdot \operatorname{Im}(z^2)\, dz$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{z - i}{(z - 1 - 4i)(z - 1 + 2i)} dz$, где $C: |z - 1 - 4i| = 3$.

5.12. а) $\int\limits_L \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im}(z^2)\, dz$, где L – отрезок прямой $y = 2 + x$ от $z_1 = -1 + i$ до $z_2 = 1 + 3i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{z + 3i}{(z - 1 + 3i)(z - 7 + 3i)} dz$, где $C: |z - 1 + 3i| = 3$.

5.13. а) $\int\limits_L \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im}(z^2)\, dz$, где L – дуга параболы $y = 1 - x^2$ от $z_1 = -1$ до $z_2 = i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{2z + 1}{(z - 1 - 2i)(z - 1 - 10i)} dz$, где $C: |z - 1 - 2i| = 4$.

5.14. а) $\int\limits_L z\cdot \operatorname{Im}\left(z^2\right)dz$, где L – дуга параболы $y=-x^2$ от $z_1=0$ до $z_2=1-i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z-1}{(z-1-i)(z+7-i)}dz$, где $C:\left|z-1-i\right|=4$.

5.15. а) $\int\limits_L \operatorname{Im}\left(z^2\right)\cdot \operatorname{Im}\left(z+2-3i\right)dz$, где L – отрезок прямой $y=3-x$ от $z_1=3i$ до $z_2=3$.

б) $\oint\limits_C \frac{z+i}{(z-1+i)(z-1+9i)}dz$, где $C:\left|z-1+i\right|=4$.

5.16. а) $\int\limits_L z\cdot\left(\overline{z+1-i}\right)dz$, где L – дуга параболы $y=x^2$ от $z_1=0$ до $z_2=1+i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z-4}{(z-3-4i)(z-11-4i)}dz$, где $C:\left|z-3-4i\right|=4$.

5.17. а) $\int\limits_L \left(\overline{z+1-i}\right)\cdot \operatorname{Im} z\,dz$, где L – дуга параболы $y=2+x$ от $z_1=-1+i$ до $z_2=1+3i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z+3i}{(z-3+3i)(z-3-4i)}dz$, где $C:\left|z-3+3i\right|=5$.

5.18. а) $\int\limits_L \left(\overline{z+1-i}\right)\cdot \operatorname{Re} z\,dz$, где L – дуга параболы $y=1-x^2$ от $z_1=-1$ до $z_2=i$.

б) $\oint\limits_C \frac{2z-i}{(z-2-2i)(z-12-2i)}dz$, где $C:\left|z-2-2i\right|=5$.

5.19. а) $\int\limits_L z\cdot\left(\overline{z+1-i}\right)dz$, где L – дуга параболы $y=-x^2$ от $z_1=0$ до $z_2=1-i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z+2}{(z-3-i)(z-3+9i)}dz$, где $C:\left|z-3-i\right|=5$.

5.20. а) $\int\limits_L \left(\overline{z+1-i}\right)\cdot \operatorname{Im}\left(z+2-3i\right)dz$, где L – отрезок прямой $y=3-x$ от $z_1=3i$ до $z_2=3$.

б) $\oint\limits_C \frac{i-z}{(z-2+i)(z+8+i)}dz$, где $C:\left|\,z-2+i\,\right|=5$.

5.21. а) $\int\limits_L \operatorname{Im} z\cdot \operatorname{Re}\left(z^2\right)dz$, где L – отрезок прямой $y=2+x$ от $z_1=-1+i$ до $z_2=1+3i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z+2i}{(z-2-4i)(z-2-16i)}dz$, где $C:\left|\,z-2-4i\,\right|=3$.

5.22. а) $\int\limits_L \bar{z}\cdot z^2\,dz$, где L – дуга параболы $y=x^2-1$ от $z_1=1$ до $z_2=-i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z+2i}{(z-3+i)(z-8-3i)}dz$, где $C:\left|\,z-3+i\,\right|=4$.

5.23. а) $\int\limits_L z\cdot(\bar{z})^2\,dz$, где L – дуга параболы $y=-x^2$ от $z_1=0$ до $z_2=1-i$.

б) $\oint\limits_C \frac{3-z}{(z-3-2i)(z-3+10i)}dz$, где $C:\left|\,z-3-2i\,\right|=6$.

5.24. а) $\int\limits_L \operatorname{Im}\left(z^2\right)\cdot \operatorname{Im}\left(z+2-3i\right)dz$, где L – отрезок прямой $y=3-x$ от $z_1=3i$ до $z_2=3$.

б) $\oint\limits_C \frac{i-2z}{(z-2-i)(z+10-i)}dz$, где $C:\left|\,z-2-i\,\right|=6$.

5.25. а) $\int\limits_L \left(\overline{z+1-i}\right)\cdot \operatorname{Im} z\,dz$, где L – дуга параболы $y=x^2$ от $z_1=0$ до $z_2=1+i$.

б) $\oint\limits_C \frac{z+1-i}{(z-3+i)(z-3-4i)}dz$, где $C:\left|\,z-3+i\,\right|=1$.

5.26. а) $\int\limits_L \left(\overline{z-1+2i}\right)\cdot \operatorname{Re}\left(z-i\right)dz$, где L – дуга параболы $y=-x^2$ от $z_1=0$ до $z_2=1-i$.

б) $\oint\limits_C \frac{2z-3+4i}{(z+3-i)(z+3-3i)}dz$, где $C:\left|\,z+3-i\,\right|=1$.

5.27. а) $\int\limits_L \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im}\left(z^2\right) dz$, где L – отрезок прямой $y = 2 + x$ от $z_1 = -1 + i$ до $z_2 = 1 + 3i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{2i - z}{(z+1+i)(z-5+i)} dz$, где $C : \left| z + 1 + i \right| = 3$.

5.28. а) $\int\limits_L \bar{z} \cdot \operatorname{Im}\left(z^2\right) dz$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{1 + i - z}{(z+1-i)(z+1-7i)} dz$, где $C : \left| z + 1 - i \right| = 3$.

5.29. а) $\int\limits_L (\bar{z})^3 \cdot \operatorname{Re}(z - 1 + i) dz$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$.

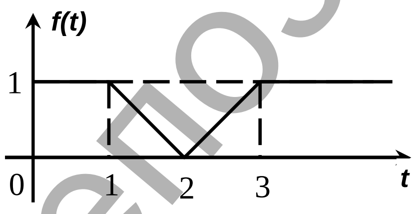
б) $\oint\limits_C \dfrac{z + 3 - 2i}{(z+2-i)(z+2-3i)} dz$, где $C : \left| z + 2 - i \right| = 1$.

5.30. а) $\int\limits_L (\bar{z})^2 \cdot \operatorname{Re}(z + 2 - 3i) dz$, где L – отрезок прямой $y = 3 - x$ от $z_1 = 3i$ до $z_2 = 3$.

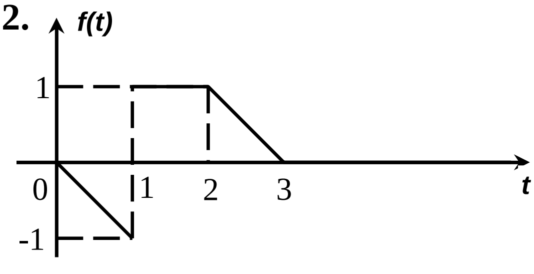
б) $\oint\limits_C \dfrac{2z - i + 5}{(z+1+4i)(z+1+8i)} dz$, где $C : \left| z + 1 + 4i \right| = 2$.

Задание 6. По данному графику оригинала $f(t)$ найти изображение

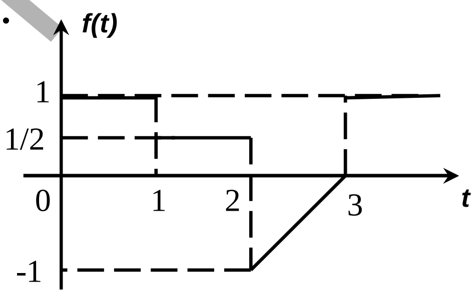
1.



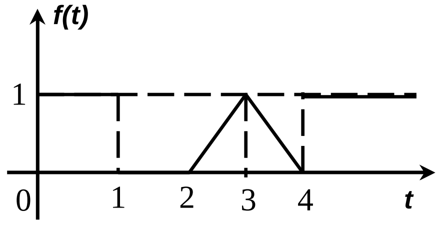
2.



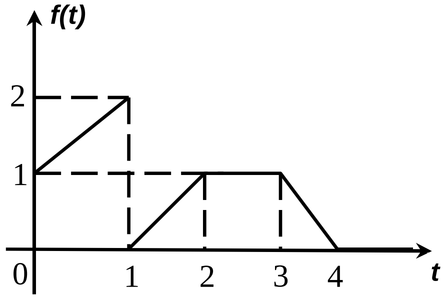
3.



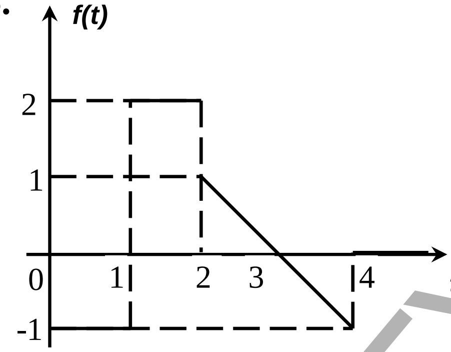
4.



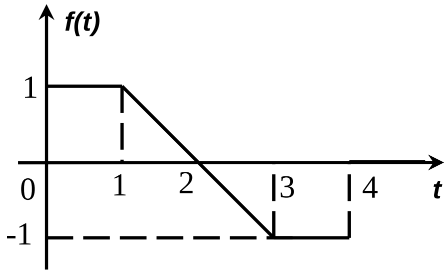
5.



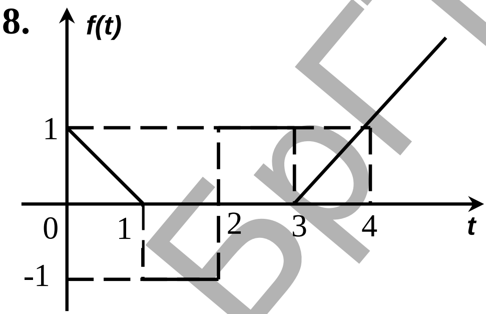
6.



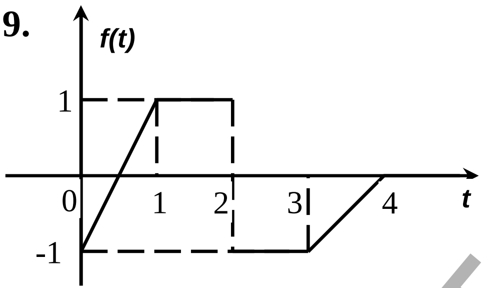
7.



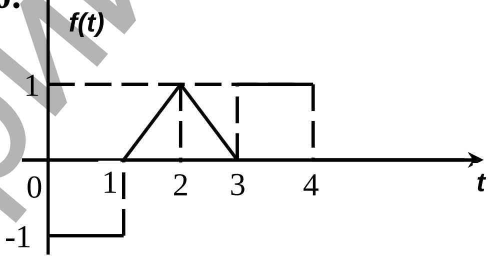
8.



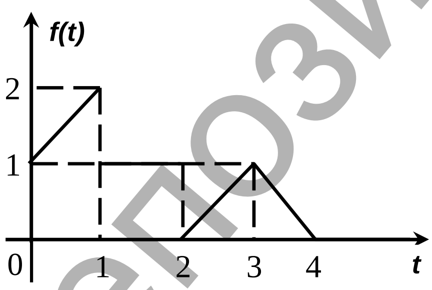
9.



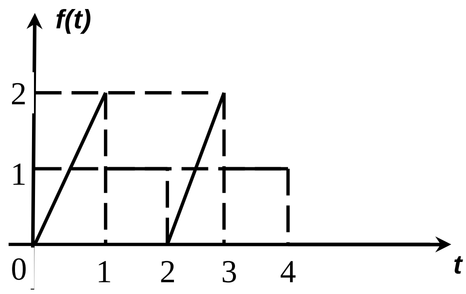
10.



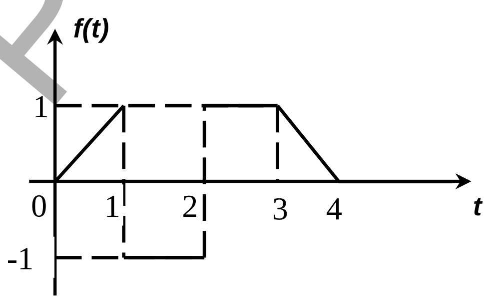
11.



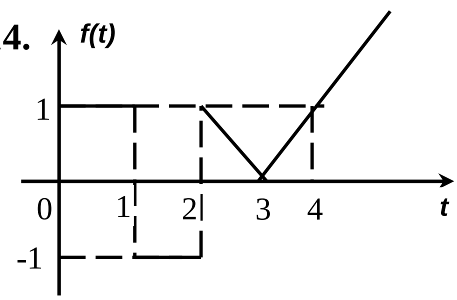
12.



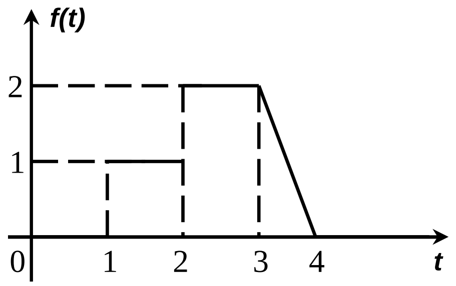
13



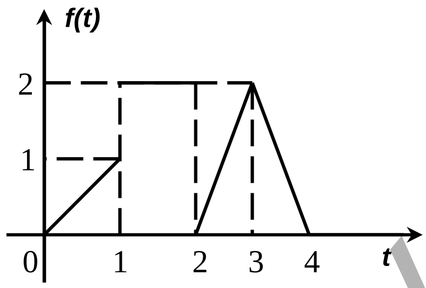
14.



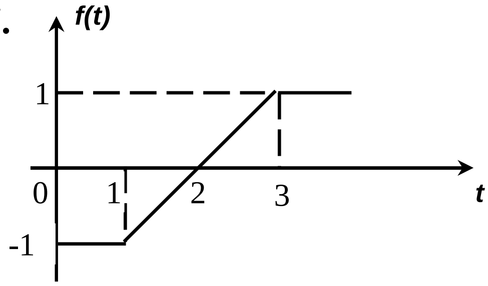
15.



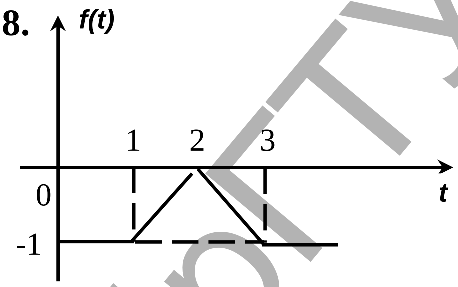
16.



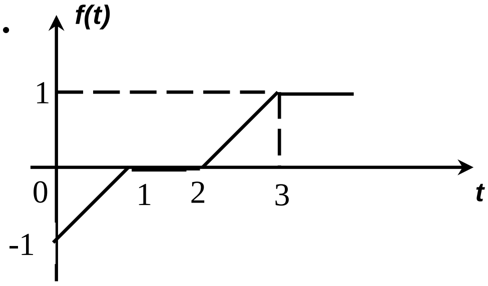
17.



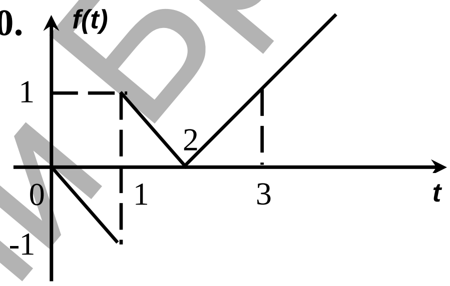
18.



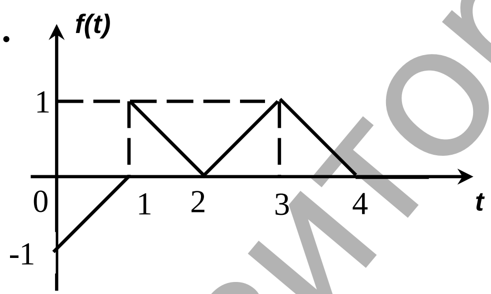
19.



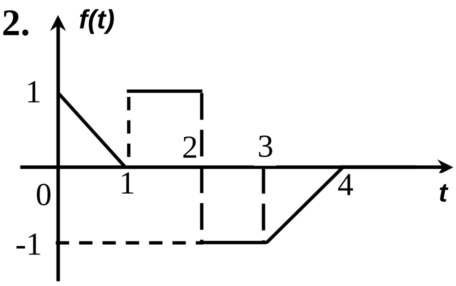
20.



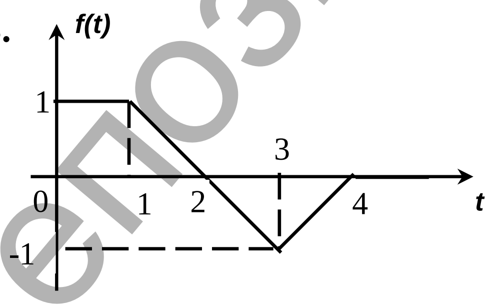
21.



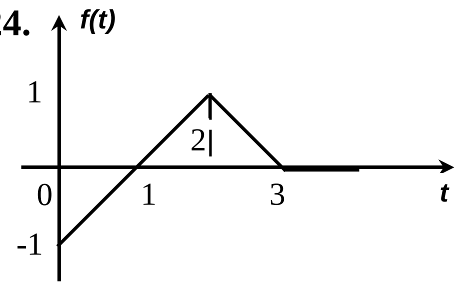
22.



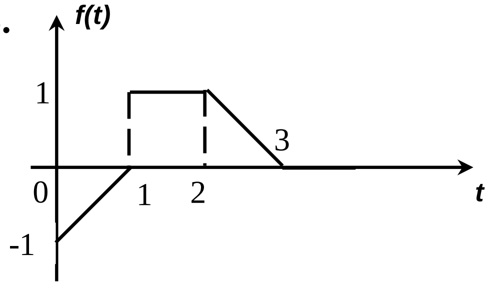
23.



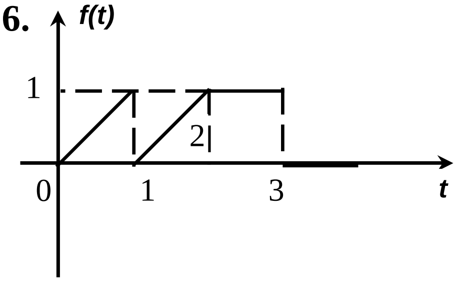
24.



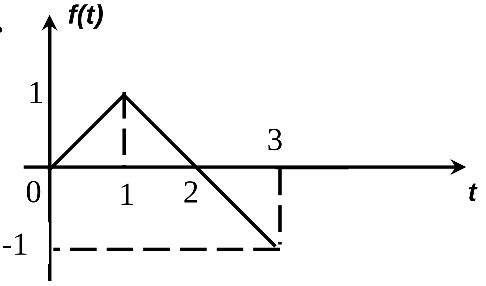
25.



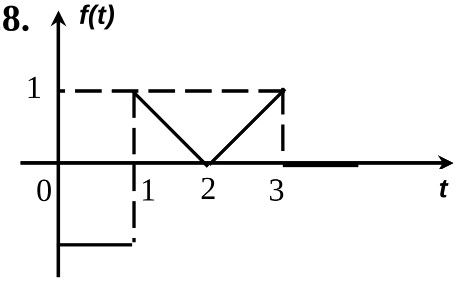
26.



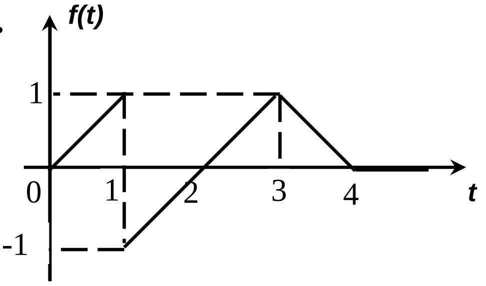
27.



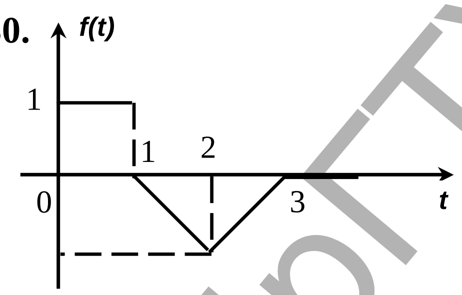
28.



29.



30.



Задание 7. Операционным методом решить задачу Коши.

7.1. $y'' + y' + y = 7e^{2t}$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 4$.

7.2. $y'' + y' - 2y = -2(t+1)$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 1$.

7.3. $y'' + 4y' + 29y = e^{-2t}$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1$.

7.4. $2y'' + 5y' = 29\cos t$, $\quad y(0) = -1$, $\quad y'(0) = 0$.

7.5. $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t}\cos 3t$, $\quad y(0) = 5$, $\quad y'(0) = 1$.

7.6. $y'' + y' - 2y = e^{-t}$, $\quad y(0) = -1$, $\quad y'(0) = 0$.

7.7. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{t}\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 0$.

7.8. $y'' + y' + y = t^2 + t$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = -3$.

7.9. $y'' + 4y = \sin 2t$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1$.

7.10. $y'' - 9y = \sin t - \cos t$, $\quad y(0) = -3$, $\quad y'(0) = 2$.

7.11. $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$, $\quad y(0) = 2$, $\quad y'(0) = 6$.

7.12. $y'' + 3y' - 10y = 47\cos 3t - \sin 3t$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

7.13. $y'' - 2y' = e^t\left(t^2 + t - 3\right)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

7.14. $y'' + 4y = 8\sin 2t$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

7.15. $y'' + y = \operatorname{sh} t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

7.16. $y'' + y' - 2y = e^t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

7.17. $y'' + y = 6e^{-t}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.

7.18. $y'' - y' = t^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

7.19. $y'' + y' = t^2 + 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

7.20. $y'' - y' = \cos 3t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

7.21. $y'' + 2y' = 2 + e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

7.22. $y'' + y' = \cos 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

7.23. $y'' + 2y' = \sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 4$.

7.24. $y'' - 3y' + 2y = e^t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

7.25. $y'' + 3y' + y = 3e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

7.26. $y'' - 2y' - 3y = 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

7.27. $y'' - y' - 6y = 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

7.28. $y'' + 4y = 4e^{2t} + 4t^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

7.29. $y'' + 4y' + 4y = t^3e^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

7.30. $y'' + 4y = 3\sin t + 10\cos 3t$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 3$.

Задание 8. Операционным методом решить систему линейных дифференциальных уравнений.

8.01. $\begin{cases}\dot x = -x+3y+1,\\ \dot y = x+y,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=1,\\ y(0)=2.\end{cases}$

8.02. $\begin{cases}\dot x = x+2y+1,\\ \dot y = 4x-y,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=0,\\ y(0)=1.\end{cases}$

8.03. $\begin{cases}\dot x = x+3y+2,\\ \dot y = x-y+1,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=-1,\\ y(0)=2.\end{cases}$

8.04. $\begin{cases}\dot x = x+4y,\\ \dot y = 2x-y+9,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=1,\\ y(0)=0.\end{cases}$

8.05. $\begin{cases}\dot x = 2x+5y,\\ \dot y = x-2y+2,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=1,\\ y(0)=1.\end{cases}$

8.06. $\begin{cases}\dot x = -2x+5y+1,\\ \dot y = x+2y+1,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=0,\\ y(0)=2.\end{cases}$

8.07. $\begin{cases}\dot x = 3x+y,\\ \dot y = -5x-3y+2,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=2,\\ y(0)=0.\end{cases}$

8.08. $\begin{cases}\dot x = -3x-4y+1,\\ \dot y = 2x+3y,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=0,\\ y(0)=2.\end{cases}$

8.09. $\begin{cases}\dot x = -2x+6y+1,\\ \dot y = 2x+2,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=0,\\ y(0)=1.\end{cases}$

8.10. $\begin{cases}\dot x = 2x+3y+1,\\ \dot y = 4x-2y,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=-1,\\ y(0)=0.\end{cases}$

8.11. $\begin{cases}\dot x = x+2y,\\ \dot y = 2x+y+1,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=0,\\ y(0)=5.\end{cases}$

8.12. $\begin{cases}\dot x = 2x-2y,\\ \dot y = -4x,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=3,\\ y(0)=1.\end{cases}$

8.13. $\begin{cases}\dot x = -x-2y+1,\\ \dot y = -\dfrac{3}{2}x+y,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=1,\\ y(0)=0.\end{cases}$

8.14. $\begin{cases}\dot x = 3x+5y+2,\\ \dot y = 3x+y+1,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=0,\\ y(0)=2.\end{cases}$

8.15. $\begin{cases}\dot x = 3x+2y,\\ \dot y = \dfrac{5}{2}x-y+2,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=0,\\ y(0)=1.\end{cases}$

8.16. $\begin{cases}\dot x = 2y+1,\\ \dot y = 2x+3,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=-1,\\ y(0)=0.\end{cases}$

8.17. $\begin{cases}\dot x = 2x+8y+1,\\ \dot y = 3x+4y,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=2,\\ y(0)=1.\end{cases}$

8.18. $\begin{cases}\dot x = 2x+2y+2,\\ \dot y = 4y+1,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=0,\\ y(0)=1.\end{cases}$

8.19. $\begin{cases}\dot x = x+y,\\ \dot y = 4x+y+1,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=1,\\ y(0)=0.\end{cases}$

8.20. $\begin{cases}\dot x = x-2y+1,\\ \dot y = -3x,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=0,\\ y(0)=1.\end{cases}$

8.21. $\begin{cases}\dot x = 3y+2,\\ \dot y = x+2y,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=-1,\\ y(0)=1.\end{cases}$

8.22. $\begin{cases}\dot x = 2x+3y,\\ \dot y = x+4y+1,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=1,\\ y(0)=0.\end{cases}$

8.23. $\begin{cases}\dot x = 2y,\\ \dot y = 2x+3y+1,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=2,\\ y(0)=1.\end{cases}$

8.24. $\begin{cases}\dot x = -2x+y+2,\\ \dot y = 3x,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=1,\\ y(0)=0.\end{cases}$

8.25. $\begin{cases}\dot x = 4x+3,\\ \dot y = x+2y,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=-1,\\ y(0)=0.\end{cases}$

8.26. $\begin{cases}\dot x = y+3,\\ \dot y = x+2,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=1,\\ y(0)=0.\end{cases}$

8.27. $\begin{cases}\dot x = x+3y+3,\\ \dot y = x-y+1,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=0,\\ y(0)=1.\end{cases}$

8.28. $\begin{cases}\dot x = -x+3y+2,\\ \dot y = x+y+1,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=0,\\ y(0)=1.\end{cases}$

8.29. $\begin{cases}\dot x = 3y,\\ \dot y = 3x+1,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=2,\\ y(0)=0.\end{cases}$

8.30. $\begin{cases}\dot x = x+3y,\\ \dot y = x-y,\end{cases}$ $\begin{cases}x(0)=1,\\ y(0)=0.\end{cases}$

РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Исследовать сходимость числовых рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(n+1)^2}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+3)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+2}$.

Решение

а) Для исследования числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^5}}$ на сходимость используем признак сравнения. Сравним его со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ $\left(a=\frac{3}{2}>1\right)$.

Составляем предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, где $a_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ и $b_n=\frac{n+1}{\sqrt{n^5}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}:\frac{n+1}{\sqrt{n^5}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{n^5}}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

Так как предел конечен и не равен нулю, то оба ряда ведут себя одинаково. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^5}}$ сходится.

б) Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(n+1)^2}{2^n}$ по признаку Д'Аламбера.

Запишем a_n и a_{n+1} члены ряда

$$a_n=\frac{n\cdot(n+1)^2}{2^n} \text{ и } a_{n+1}=\frac{(n+1)\cdot(n+2)^2}{2^{n+1}}.$$

Составляем предел $k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$k=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)^2}{2^{n+1}}:\frac{n\cdot(n+1)^2}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n\cdot(n+1)^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}{2^n\cdot 2}\cdot\frac{2^n}{n^3\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}{2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=$$

$$=\frac{(1+0)\cdot(1+0)^2}{2\cdot(1+0)^2}=\frac{1}{2}.$$

Так как $k=\frac{1}{2}<1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(n+1)^2}{2^n}$ сходится.

в) Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+3)}$ на абсолютную сходимость.

Составим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+3)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}.$$

Исследуем знакоположительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$ на сходимость используя признак сравнения. Сравним его со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $(\alpha=2>1)$.

Составляем предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, где $a_n=\frac{1}{n(n+3)}$ и $b_n=\frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(n+3)}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(n+3)}\cdot\frac{n^2}{1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{n}}=1.$$

Так как предел конечен и не равен нулю, то оба ряда ведут себя одинаково. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$ сходится.

Так как ряд, составленный из абсолютных величин, сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+3)}$ сходится абсолютно.

г) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+2}$ является знакочередующимся. Он может сходиться условно и абсолютно.

Исследуем его на условную сходимость по признаку Лейбница.

Для знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$$

проверяют условия:

1) $a_n \geq a_{n+1}$, $n \in N$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Для исходного ряда, получим

$a_1 = \frac{1}{1^2+2} = \frac{1}{3} \approx 0,3333$; $a_2 = \frac{2}{2^2+2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,3333$;

$a_3 = \frac{3}{3^2+2} = \frac{3}{11} \approx 0,2727$; $a_4 = \frac{4}{4^2+2} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9} \approx 0,2222$;

$a_5 = \frac{5}{5^2+2} = \frac{5}{27} \approx 0,1852$; $a_6 = \frac{6}{6^2+2} = \frac{6}{38} = \frac{3}{19} \approx 0,1579$.

Очевидно, что

$$a_1 = a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > ...,$$

т.е. последовательность $\frac{n}{n^2+2}$ убывающая при $n \geq 2$.

Проверим второе условие

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = 0.$$

Оба условия признака Лейбница выполнены. Значит, исходный ряд сходится условно.

Проверим исходный ряд на абсолютную сходимость.

Составим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2} = \sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

Сравним полученный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}b_n$, который расходится.

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=1.$$

Так как предел конечен и не равен нулю, то оба ряда ведут себя одинаково. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+2}$ расходится. Следовательно, исходный ряд абсолютно не сходится, т.е. сходится условно.

Ответ. а) ряд сходится; б) ряд сходится; в) ряд сходится абсолютно; г) ряд сходится условно.

Задание 2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n\cdot\sqrt{n+2}}(x+1)^n$ на сходимость:

а) написать первые четыре члена ряда;
б) найти интервал сходимости ряда;
в) выявить вопрос о сходимости ряда на концах интервала сходимости.

Решение

а) Запишем первые четыре члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n\cdot\sqrt{n+2}}(x+1)^n$, придавая последовательно числу n значения 1, 2, 3, 4.

$$\frac{3^1}{1\cdot\sqrt{1+2}}(x+1)^1+\frac{3^2}{2\cdot\sqrt{2+2}}(x+1)^2+\frac{3^3}{3\cdot\sqrt{3+2}}(x+1)^3+\frac{3^4}{4\cdot\sqrt{4+2}}(x+1)^4+...=$$

$$=\sqrt{3}(x+1)+\frac{9}{4}(x+1)^2+\frac{9}{\sqrt{5}}(x+1)^3+\frac{81}{4\cdot\sqrt{6}}(x+1)^4+....$$

б) Найдём интервал сходимости ряда, используя признак Д'Аламбера:

Запишем $u_n(x)$ и $u_{n+1}(x)$ члены ряда

$$u_n(x)=\frac{3^n}{n\cdot\sqrt{n+2}}(x+1)^n \text{ и } u_{n+1}(x)=\frac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot\sqrt{n+3}}(x+1)^{n+1}.$$

Составляем предел $k = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$:

$$k = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot\sqrt{n+3}}(x+1)^{n+1} : \frac{3^n}{n\cdot\sqrt{n+2}}(x+1)^n\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n\cdot 3\cdot(x+1)^n(x+1)}{(n+1)\cdot\sqrt{n+3}}\cdot\frac{n\cdot\sqrt{n+2}}{3^n(x+1)^n}\right| = 3\cdot|x+1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt{n+2}}{(n+1)\cdot\sqrt{n+3}} =$$

$$= 3\cdot|x+1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}}{n\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdot n\cdot\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}} = 3\cdot|x+1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}} =$$

$$= 3\cdot|x+1|\cdot\frac{\sqrt{1+0}}{(1+0)\sqrt{1+0}} = 3\cdot|x+1|.$$

Для того чтобы ряд сходился, должно выполняться условие $k<1$, поэтому

$$3\cdot|x+1|<1,\quad |x+1|<\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{3}<x+1<\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{3}-1<x<\frac{1}{3}-1,$$

$$-\frac{4}{3}<x<-\frac{2}{3}.$$

Значит, на интервале $\left(-\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$ исходный ряд сходится абсолютно.

в) Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

Пусть $x=-\dfrac{2}{3}$, тогда получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot\sqrt{n+2}}\left(-\frac{2}{3}+1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot\sqrt{n+2}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt{n+2}}.$$

Для исследования числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\sqrt{n+2}}$ на сходимость используем признак сравнения. Сравним его со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$.

Составляем предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$, где $a_n=\dfrac{1}{n^{3/2}}$ и $b_n=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt{n+2}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{3/2}}:\frac{1}{n\cdot\sqrt{n+2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt{n+2}}{n^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{n^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n}}=1.$$

Так как предел конечен и не равен нулю, то оба ряда ведут себя одинаково. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt{n+2}}$ сходится.

Пусть $x=-\frac{4}{3}$, тогда получим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot\sqrt{n+2}}\left(-\frac{4}{3}+1\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot\sqrt{n+2}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt{n+2}}.$$

Исследуем его на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt{n+2}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n .$$

Сравним полученный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, который сходится.

Найдем $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+2}}:\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=1.$$

Так как предел конечен и не равен нулю, то оба ряда ведут себя одинаково. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt{n+2}}$ сходится.

Значит, знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Следовательно, область сходимости степенного ряда $\left[-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right]$.

Ответ. $\left[-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right]$.

Задание 3. Найти три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = 4xy^2 - x^3$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 2$.

Решение

Решение дифференциального уравнения будем искать в виде ряда Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!} \cdot x^4 + \dots .$$

По условию задачи $y' = 4xy^2 - x^3$. Подставляя $x = 0$ и $y = 2$ в уравнение, вычислим значение $y'(0)$:

$$y'(0) = 4 \cdot 0 \cdot 2^2 - 0^3 = 0.$$

Найдем $y''(x)$:

$$y''(x) = \left(4xy^2 - x^3\right)' = \left(4xy^2\right)' - \left(x^3\right)' = 4y^2 \cdot (x)' + 4x \cdot \left(y^2\right)' - 3x^2 =$$

$$= 4y^2 \cdot 1 + 4x \cdot 2y \cdot y' - 3x^2 = 4y^2 + 8x\,y\,y' - 3x^2.$$

Подставляя $x = 0$, $y = 2$ и $y'(0) = 0$ в $y''(x)$, вычислим значение $y''(0)$:

$$y''(0) = 4 \cdot 2^2 + 8 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 = 16.$$

Найдем $y'''(x)$:

$$y'''(x) = \left(4y^2 + 8x\,y\,y' - 3x^2\right)' = \left(4y^2\right)' + \left(8x\,y\,y'\right)' - \left(3x^2\right)' =$$

$$= 8y \cdot y' + 8y\,y' + 8x\left(y\,y'\right)' - 6x = 16y\,y' + 8x\left(y\,y'' + y'\,y'\right) - 6x =$$

$$= 16y\,y' + 8x\,y\,y'' + 8x(y')^2 - 6x.$$

Подставляя $x = 0$, $y = 2$, $y'(0) = 0$ и $y''(0) = 16$ в $y'''(x)$, вычислим значение $y'''(0)$:

$$y'''(0) = 16 \cdot 2 \cdot 0 + 8 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 16 + 8 \cdot 0 \cdot (0)^2 - 6 \cdot 0 = 0.$$

Найдем $y^{(4)}(x)$:

$$y^{(4)}(x) = \left(16y\,y' + 8x\,y\,y'' + 8x(y')^2 - 6x\right)' = (16y\,y')' + \left(8x\,y\,y''\right)' + \left(8x(y')^2\right)' - (6x)' =$$

$$= 16y'\,y' + 16y\,y'' + 8y\,y'' + 8x\left(y\,y''\right)' + 8(y')^2 + 8x \cdot 2y' \cdot y'' - 6 =$$

$$= 24(y')^2 + 24y\,y'' + 8x\left(y'\,y'' + y\,y'''\right) + 16x \cdot y' \cdot y'' - 6 =$$

$$= 24(y')^2 + 24y\,y'' + 24x\,y'\,y'' + 8xy\,y''' - 6.$$

Подставляя $x=0$, $y=2$, $y'(0)=0$, $y''(0)=16$ и $y'''(0)=0$ в $y^{(4)}(x)$, вычислим значение $y^{(4)}(0)$:

$$y^{(4)}(0)=24\cdot 0^2+24\cdot 2\cdot 16+24\cdot 0\cdot 0\cdot 16+8\cdot 0\cdot 2\cdot 0-6=768-6=762.$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд Маклорена, получим решение исходного дифференциального уравнения

$$y(x)=2+\frac{0}{1!}\cdot x+\frac{16}{2!}\cdot x^2+\frac{0}{3!}\cdot x^3+\frac{762}{4!}\cdot x^4+...=2+\frac{16}{2}\cdot x^2+\frac{762}{24}\cdot x^4+...=$$

$$=2+8x^2+31{,}75x^4+...$$

Ответ. $y(x)\approx 2+8x^2+31{,}75x^4$.

Задание 4. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке $z_0=1+2i$ при отображении $w=f(z)=2xy+2y+i\left(y^2-x^2-2x\right)$.

Решение

Проверим функцию $w=f(z)$ на дифференцируемость, для этого проверим выполнение условий Коши-Римана:

$$\begin{cases} u'_x=v'_y \\ u'_y=-v'_x \end{cases}$$

По условию задачи

$$u(x,y)=2xy+2y \text{ и } v(x,y)=y^2-x^2-2x.$$

Найдем первые частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$:

$u'_x=(2xy+2y)'_x=2y$,

$u'_y=(2xy+2y)'_y=2x+2$,

$v'_x=\left(y^2-x^2-2x\right)'_x=-2x-2=-(2x+2)$,

$v'_y=\left(y^2-x^2-2x\right)'_y=2y$.

Подставляя в условия Коши-Римана найденные производные, получим

$$\begin{cases} 2y=2y \\ 2x+2=2x+2 \end{cases}$$

Оба условия выполняются. Тогда

$$f'(z) = u'_x + i \cdot v'_x = 2y - i \cdot (2x + 2).$$

Найдем значение $f'(z)$ в точке $z_0 = 1 + 2i$.

Так как $z_0 = 1 + 2 \cdot i$, то $x = 1$ и $y = 2$.

Тогда

$$f'(z_0) = f'(1 + 2i) = \left(2y - i \cdot (2x + 2)\right)\Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 2 \cdot 2 - i \cdot (2 \cdot 1 + 2) = 4 - 4i.$$

Коэффициент растяжения равен

$$k = \left|f'(1 + 2i)\right| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Так как $4 > 0$ и $-4 < 0$, то угол поворота равен

$$\varphi = \arg\left(f'(1 + 2i)\right) = arctg\left(\frac{-4}{4}\right) = arctg\,(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Ответ. $k = 4\sqrt{2}$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$.

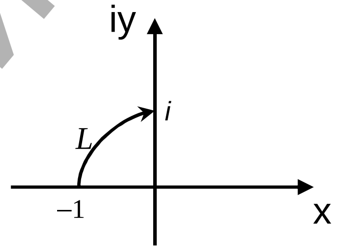
Задание 5. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_L (\bar{z})^2 \cdot \operatorname{Re} z\, dz$, где L – дуга параболы $y = 1 - x^2$ от $z_1 = -1$ до $z_2 = i$.

б) $\oint\limits_C \dfrac{z + 5i}{(z - 2 + 3i)(z - 14 + 3i)}\, dz$, где $C: \left| z - 2 + 3i \right| = 6$.

Решение

а) Изобразим путь интегрирования: $y = 1 - x^2$, $-1 \le x \le 0$.



Так как $z = x + iy$ и $y' = -2x$, то

$$dz = dx + i\,dy = dx + i(-2x\,dx) = (1 - 2xi)\,dx.$$

$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(x + iy) = x$.

$$(\bar{z})^2 = \left(\overline{x + iy}\right)^2 = (x - iy)^2 = x^2 - 2xyi + (iy)^2 = x^2 - 2xyi - y^2 =$$

$$= x^2 - 2x\left(1 - x^2\right)i - \left(1 - x^2\right)^2 = x^2 + \left(-2x + 2x^3\right)i - \left(1 - 2x^2 + x^4\right) =$$

$$= \left(3x^2 - x^4 - 1\right) + \left(-2x + 2x^3\right)i.$$

Подынтегральное выражение примет следующий вид

$$(\bar{z})^2\cdot \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z=\left(\left(3x^2-x^4-1\right)+\left(-2x+2x^3\right)i\right)x\left(1-2x\,i\right)dx=$$

$$=\left(3x^2-x^4-1-2x\,i+2x^3\,i\right)\left(x-2x^2\,i\right)dx=$$

$$=\left(3x^3-x^5-x-2x^2\,i+2x^4 i-2i\left(3x^4-x^6-x^2-2x^3\,i+2x^5\,i\right)\right)dx=$$

$$=\left(3x^3-x^5-x-2x^2\,i+2x^4 i-6\,x^4 i+2x^6\,i+2x^2\,i-4x^3+4x^5\right)dx=$$

$$=\left(3x^5-x^3-x+2x^6\,i-4\,x^4 i\right)dx\,.$$

Подставляя в интеграл получим

$$\int\limits_L(\bar{z})^2\cdot \operatorname{Re} z\,dz=\int\limits_{-1}^{0}\left(3x^5-x^3-x+2x^6\,i-4\,x^4 i\right)dx=$$

$$=\left(3\cdot\frac{x^6}{6}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+2i\cdot\frac{x^7}{7}-4i\cdot\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=$$

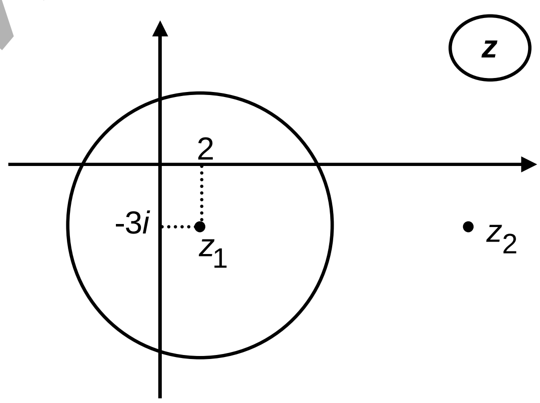
$$=0-\left(3\cdot\frac{(-1)^6}{6}-\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^2}{2}+2i\cdot\frac{(-1)^7}{7}-4i\cdot\frac{(-1)^5}{5}\right)=$$

$$=-\left(\frac{3}{6}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{2}{7}i+\frac{4}{5}i\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{2}{7}i-\frac{4}{5}i=\frac{1}{4}-\frac{18}{35}i\,.$$

б) Определим контур интегрирования.

$C:\left|\,z-2+3i\,\right|=6;\quad \left|x+i\,y-2+3i\right|=6;\quad \sqrt{\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2}=6;$

$\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2=6^2$ – окружность с центром в точке $(2;-3)$ радиуса 6 .



Функция $g\left(z\right)=\dfrac{z+5i}{\left(z-2+3i\right)\left(z-14+3i\right)}$ имеет две особые точки:

$$(z-2+3i)(z-14+3i)=0,$$

$$z_1=2-3i\ \text{ и }\ z_2=14-3i\,.$$

В контур C попадает одна точка $z_1 = 2 - 3i$. В этой точке у функции $g(z)$ нарушается условие аналитичности. Однако функция $f(z) = \dfrac{z + 5i}{z - 14 + 3i}$ аналитична в круге $\left| z - 2 + 3i \right| \le 6$.

Воспользуемся интегральной формулой Коши:

$$\oint\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0} = 2p\, i \cdot f\left(z_0\right),$$

где $f(z)$ аналитична в круге, ограниченном контуром интегрирования C.

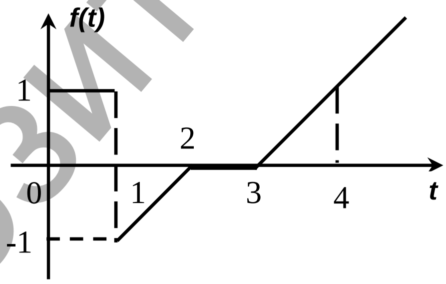
Так как $g(z) = \dfrac{f(z)}{z - 2 + 3i}$, то

$$\oint\limits_C \frac{z + 5i}{(z - 2 + 3i)(z - 14 + 3i)} dz = 2p\, i \cdot \left(\frac{z + 5i}{z - 14 + 3i} \right)\Bigg|_{z_1 = 2 - 3i} =$$

$$= 2p\, i \cdot \frac{2 - 3i + 5i}{2 - 3i - 14 + 3i} = 2p\, i \cdot \frac{2 + 2i}{-12} = -p\, i \cdot \frac{1 + i}{3} = -\frac{p}{3} i - \frac{p}{3} i^2 = \frac{p}{3} - \frac{p}{3} i.$$

Ответ. а) $\dfrac{1}{4} - \dfrac{18}{35} i$; б) $\dfrac{p}{3} - \dfrac{p}{3} i$.

Задание 6. По данному графику оригинала $f(t)$ найти изображение



Решение

Оригинал $f(t)$ задан графически, запишем сначала его аналитическое выражение:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t < 0, \\ 1, & \text{если} \quad 0 \le t < 1, \\ t - 2, & \text{если} \quad 1 \le t < 2, \\ 0, & \text{если} \quad 2 \le t < 3, \\ t - 3, & \text{если} \quad t \ge 3. \end{cases}$$

В момент времени $t=0$ «включается» функция $f(t)=1$, которая при $t=1$ снимается и «включается» функция $f(t)=t-2$, которая снимается при $t=2$ и «включается» функция $f(t)=0$, которая снимается при $t=3$ и «включается» функция $f(t)=t-3$.

Теперь представим функцию $f(t)$ единым аналитическим выражением с помощью функции сдвига $h(t-t)$.

$$f(t)=-0\cdot h(t)+1\cdot h(t)-1\cdot h(t-1)+(t-2)\cdot h(t-1)-(t-2)\cdot h(t-2)+$$
$$+0\cdot h(t-2)-0\cdot h(t-3)+(t-3)\cdot h(t-3)=$$
$$=h(t)+(t-2-1)\cdot h(t-1)-(t-2)\cdot h(t-2)+(t-3)\cdot h(t-3)=$$
$$=h(t)+((t-1)-2)\cdot h(t-1)+(-(t-2))\cdot h(t-2)+(t-3)\cdot h(t-3)=$$
$$=j_1(t)\cdot h(t)+j_2(t)\cdot h(t-1)+j_3(t)\cdot h(t-2)+j_4(t)\cdot h(t-3).$$

Таким образом:

$$j_1(t)=1 \qquad L(j_1(t))=\frac{1}{p};$$
$$j_2(t)=t-2 \qquad L(j_2(t))=\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p};$$
$$j_3(t)=-t \qquad L(j_3(t))=-\frac{1}{p^2};$$
$$j_4(t)=t \qquad L(j_4(t))=\frac{1}{p^2}.$$

Используя теорему запаздывания, найдем изображение $F(p)$ оригинала $f(t)$:

$$F(p)=\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p}\right)\cdot e^{-p}-\frac{1}{p^2}\cdot e^{-2p}+\frac{1}{p^2}\cdot e^{-3p}.$$

Ответ. $F(p)=\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p}\right)\cdot e^{-p}-\frac{1}{p^2}\cdot e^{-2p}+\frac{1}{p^2}\cdot e^{-3p}$.

Задание 7. Операционным методом решить задачу Коши.

$$2y'' - y' = \sin 3t, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1.$$

Решение

Перейдем от оригиналов к изображениям:

$L(y(t)) = Y(p)$,

$L(y'(t)) = pY(p) - y(0) = pY(p) - 2$,

$L(y''(t)) = p^2Y(p) - p\,y(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p - 1$,

$L(\sin 3t) = \dfrac{3}{p^2+9}$.

Операторное уравнение примет вид

$$2\left(p^2Y(p) - 2p - 1\right) - \left(pY(p) - 2\right) = \frac{3}{p^2+9}.$$

Откуда получаем операторное решение

$$Y(p) = \frac{4p^3 + 36p + 3}{2p\left(p - \frac{1}{2}\right)\left(p^2+9\right)}.$$

Представим последнюю дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{4p^3 + 36p + 3}{p(2p-1)\left(p^2+9\right)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{2p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+9}.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$$\frac{4p^3 + 36p + 3}{p(2p-1)\left(p^2+9\right)} = \frac{A(2p-1)\left(p^2+9\right) + Bp\left(p^2+9\right) + (Cp+D)\,p(2p-1)}{p(2p-1)\left(p^2+9\right)}.$$

$$4p^3 + 36p + 3 = A(2p-1)\left(p^2+9\right) + Bp\left(p^2+9\right) + (Cp+D)\,p(2p-1).$$

Составляем систему:

$$\left.\begin{aligned} &p^3: 2A + B + 2C = 4 \\ &p^2: -A - C + 2D = 0 \\ &p^1: 18A + 9B - D = 36 \\ &p^0: -9A = 3 \end{aligned}\right\}.$$

Найдем решение полученной системы.

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{3}+B+2C=4, \\ \dfrac{1}{3}-C+2D=0, \\ -6+9B-D=36, \\ A=-\dfrac{1}{3}. \end{cases} \quad \begin{cases} B=\dfrac{14}{3}-2C, \\ D=-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}C, \\ 9\cdot\left(\dfrac{14}{3}-2C\right)-\left(-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}C\right)=42, \\ A=-\dfrac{1}{3}. \end{cases} \quad \begin{cases} B=\dfrac{172}{37}, \\ D=-\dfrac{6}{37}, \\ C=\dfrac{1}{111}, \\ A=-\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Подставляя найденные коэффициенты, получим

$$Y(p)=\frac{-\frac{1}{3}}{p}+\frac{\frac{172}{37}}{2p-1}+\frac{\frac{1}{111}p-\frac{6}{37}}{p^2+9}.$$

$$Y(p)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p}+\frac{86}{37}\cdot\frac{1}{p-\frac{1}{2}}+\frac{1}{111}\cdot\frac{p}{p^2+9}-\frac{2}{37}\cdot\frac{3}{p^2+9}.$$

Перейдем к оригиналам

$$y(t)=L^{-1}\left(Y(p)\right)=-\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{86}{37}\cdot e^{\frac{1}{2}t}+\frac{1}{111}\cdot\cos 3t-\frac{2}{37}\cdot\sin 3t.$$

Ответ. $y(t)=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{86}{37}\cdot e^{0,5t}+\dfrac{1}{111}\cdot\cos 3t-\dfrac{2}{37}\cdot\sin 3t$.

Задание 8. Операционным методом решить систему линейных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x}=x+4y+1, \\ \dot{y}=2x+3y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0)=0, \\ y(0)=1. \end{cases}$$

Решение

Перейдем в каждом уравнении системы от оригиналов к изображениям:

$L(x(t))=X(p);$

$L(\dot{x}(t))=pX(p)-x(0)=pX(p);$

$L(1)=\dfrac{1}{p};$

$L(y(t))=Y(p);$

$L(\dot{y}(t))=pY(p)-y(0)=pY(p)-1.$

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + 4Y(p) + \dfrac{1}{p}, \\ pY(p) - 1 = 2X(p) + 3Y(p). \end{cases}$$

Найдем решение системы по формулам Крамера.

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - 4Y(p) = \dfrac{1}{p}, \\ -2X(p) + (p-3)Y(p) = 1. \end{cases}$$

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} p-1 & -4 \\ -2 & p-3 \end{vmatrix} = (p-1)(p-3) - 8 = p^2 - 4p - 5 = (p-5)(p+1).$$

$$\mathrm{D}_X = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{p} & -4 \\ 1 & p-3 \end{vmatrix} = \frac{1}{p}(p-3) + 4 = \frac{5p-3}{p}.$$

$$\mathrm{D}_Y = \begin{vmatrix} p-1 & \dfrac{1}{p} \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = p - 1 + \frac{2}{p} = \frac{p^2 - p + 2}{p}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{\mathrm{D}_X}{\mathrm{D}} = \dfrac{5p-3}{p(p-5)(p+1)}, \\ Y(p) = \dfrac{\mathrm{D}_Y}{\mathrm{D}} = \dfrac{p^2 - p + 2}{p(p-5)(p+1)}. \end{cases}$$

Разложим дробь $\dfrac{5p-3}{p(p-5)(p+1)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{5p-3}{p(p-5)(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-5} + \frac{C}{p+1} = \frac{A(p+1)(p-5) + B(p+1)p + Cp(p-5)}{p(p-5)(p+1)}.$$

Приравняем числители дробей слева и справа:

$$5p - 3 = A(p+1)(p-5) + B(p+1)p + Cp(p-5).$$

Чтобы получить значения коэффициентов A, B и C, в данное равенство подставим значения $p = 0$, $p = 5$ и $p = -1$ (последовательно).

Пусть $p = 0$, тогда из уравнения получим

$$-3 = A \cdot 1 \cdot (-5).$$

Откуда

$$A = \frac{3}{5}.$$

Пусть $p = 5$, тогда из уравнения имеем

$$5 \cdot 5 - 3 = B \cdot 6 \cdot 5.$$

Откуда

$$B = \frac{11}{15}.$$

Пусть $p = -1$, тогда из уравнения имеем

$$5 \cdot (-1) - 3 = C \cdot (-1) \cdot (-6).$$

Откуда

$$C = -\frac{4}{3}.$$

Таким образом, получили

$$\frac{5p-3}{p(p-5)(p+1)} = \frac{\frac{3}{5}}{p} + \frac{\frac{11}{15}}{p-5} + \frac{-\frac{4}{3}}{p+1}.$$

Изображение $X(p)$ примет следующий вид

$$X(p) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{p} + \frac{11}{15} \cdot \frac{1}{p-5} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{p-(-1)}.$$

Разложим дробь $\frac{p^2-p+2}{p(p-5)(p+1)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{p^2-p+2}{p(p-5)(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-5} + \frac{C}{p+1} = \frac{A(p+1)(p-5) + B(p+1)p + C\,p(p-5)}{p(p-5)(p+1)}.$$

Приравняем числители дробей слева и справа:

$$p^2 - p + 2 = A(p+1)(p-5) + B(p+1)p + C\,p(p-5).$$

Пусть $p = 0$, тогда из уравнения получим

$$2 = A \cdot 1 \cdot (-5).$$

Откуда

$$A = -\frac{2}{5}.$$

Пусть $p = 5$, тогда из уравнения имеем

$$5^2 - 5 + 2 = B \cdot 6 \cdot 5.$$

Откуда

$$B = \frac{11}{15}.$$

Пусть $p = -1$, тогда из уравнения имеем

$$(-1)^2 - (-1) + 2 = C \cdot (-1) \cdot (-6).$$

Откуда

$$C = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, получили

$$\frac{p^2-p+2}{p(p-5)(p+1)}=\frac{-\frac{2}{5}}{p}+\frac{\frac{11}{15}}{p-5}+\frac{\frac{2}{3}}{p+1}.$$

Изображение $Y(p)$ примет следующий вид

$$Y(p)=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p}+\frac{11}{15}\cdot\frac{1}{p-5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-(-1)}.$$

В результате имеем систему:

$$\begin{cases} X(p)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{p}+\frac{11}{15}\cdot\frac{1}{p-5}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{p-(-1)}; \\ Y(p)=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p}+\frac{11}{15}\cdot\frac{1}{p-5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-(-1)}. \end{cases}$$

Переходя к оригиналам, получим решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x(t)=\frac{3}{5}+\frac{11}{15}\cdot e^{5t}-\frac{4}{3}\cdot e^{-t}; \\ y(t)=-\frac{2}{5}+\frac{11}{15}\cdot e^{5t}+\frac{2}{3}\cdot e^{-t}. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x(t)=\frac{3}{5}+\frac{11}{15}\cdot e^{5t}-\frac{4}{3}\cdot e^{-t}; \\ y(t)=-\frac{2}{5}+\frac{11}{15}\cdot e^{5t}+\frac{2}{3}\cdot e^{-t}. \end{cases}$

Литература

1 Индивидуальные задания по высшей математике: Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: учеб. пособие / А.П. Рябушко и [др.]; под общ. ред. А.П. Рябушко. − Мн.: Выш. шк., 2004. − 367 с.

2 Индивидуальные задания по высшей математике: Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости: учеб. пособие / А.П. Рябушко. − Мн.: Выш. шк., 2006. − 336 с.

3 Краснов, М.А. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.А. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. − М.: Наука, 1981. − 303 с.

4 Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. − М.: АйрисПресс, 2003. − 576 с.

5 Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления: методические указания для студентов технических специальностей / И.И. Гладкий, М.П. Сидоревич, Т.А. Тузик. − Брест: Изд. БрГТУ. − 2000. – 88 с.

Содержание

Учебное издание

Составители: Гладкий Иван Иванович
Лизунова Ирина Владимировна
Тузик Татьяна Александровна
Юхимук Михаил Михайлович

РЯДЫ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Методические рекомендации и варианты контрольной работы по дисциплине *“Высшая математика”* для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: Гладкий И.И.
Редактор: Строкач Т.В.
Компьютерная вёрстка: Боровикова Е.А.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 28.04 2011 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Бумага «Снегурочка». Усл. п. л. 2,3. Уч. изд. л. 2,5.
Заказ № 498. Тираж 100 экз.
Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.