Подставим $n_{\text{îïò}}$ в оценку (6), получим оптимальную оценку погрешности

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A^{\text{îïò}} \le 2^{\frac{5}{4}} e^{-\frac{1}{8}} \delta^{\frac{1}{2}} \left\| x \right\|^{\frac{1}{2}}, \; n \ge 2. \qquad (8)$$

Итак, доказана

Теорема 3. *В условиях предыдущей теоремы оптимальная оценка погрешности в энергетической норме для метода* (3) *имеет вид* (8) *и получается при* $n_{\text{îïò}}$ *из* (7).

Таким образом, энергетическая норма как бы заменяет истокопредставимость точного решения уравнения (1) степени $s = \frac{1}{2}$. Её использование позволило получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова без дополнительного требования на гладкость точного решения – его истокообразную представимость. Следовательно, энергетическая норма позволяет сделать итерационный процесс (3) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения.

Важен вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H. Эти условия дает

Теорема 4. *Если выполнены условия* 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, 2) $E_\varepsilon x = 0$, *где* $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$, ε – *фиксированное положительное число* ($0 < \varepsilon < \|A\|$), *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.*

УДК 517.948

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОДНОШАГОВЫХ И МНОГОШАГОВЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Артюшеня А.А.

УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест

Для решения нелинейной системы

$$f(x) = 0, \; f(D \in R^n \to R^n), \; f \in C_D^{(2)} \qquad (1)$$

применяются одношаговые, двухшаговые и трехшаговые методы.

В данной работе для решения модельной системы вида [2]:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = n+1, \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = n+1, \\ x_1 + x_2 + \ldots + 2x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = n+1, \\ x_1 x_2 \ldots x_{n-2} x_{n-1} x_n = 1, \\ \sin^2 x_1 + \cos^3 x_n = \sin^2 1 + \cos^3 1 \end{cases} \qquad (2)$$

применялись одношаговые, двухшаговые и трехшаговые методы.

Алгоритм решения нелинейной системы следующий:

Шаг 1: решается система линейных алгебраических уравнений:

$$f^{/}(x_n)\Delta x_n = -f(x_n),\ n = 0,1,2,\ldots \tag{3}$$

где $f'(x_n)$ - матрица Якоби, Δx_n - искомый вектор.

Шаг 2: вычисляется вектор x_{n+1} в соответствии с каждым из методов:

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n, n = 0,1,2,\ldots,\ \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]. \tag{4}$$

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt[3]{\beta_n}\Delta x_n, n = 0,1,2,\ldots,\ \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]. \tag{5}$$

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n\Delta x_n, n = 0,1,2,\ldots,\ \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]. \tag{6}$$

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt[4]{\beta_n}\Delta x_n, n = 0,1,2,\ldots,\ \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]. \tag{7}$$

Шаг 3: проверяется условие:

$$\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon,\ \text{где}\ \|f(x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^{\,2}(x_n)}. \tag{8}$$

Если условие (8) выполняется, то x_{n+1} – принимается за приближенное решение системы (1). В противном случае производится пересчет β_{n+1}, для чего проверяется условие: если

$$\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_{n+1})\|,$$

то $\beta_{n+1} = 1$, иначе β_{n+1} находится по одной из формул (9)-(13,) определенной для каждого метода, и осуществляем переход на шаг 1.

Будем рассматривать трехшаговые методы, где β_n просчитывается по формулам (9)-(11):

$$\begin{gathered}\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n\|f(x_n)\|\cdot\|f(x_{n-1})\|}{\beta_n\|f(x_{n+1})\|^2}\right),\\ \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n\|f(x_n)\|\cdot\|f(x_{n-1})\|}{\|f(x_{n+1})\|\cdot\|f(x_{n+2})\|}\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n},\ \gamma_0 = \beta_0^2\frac{\|f(x_0)\|}{\|f(x_1)\|},\end{gathered} \tag{9}$$

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n\|f(x_n)\|\cdot\|f(x_{n-1})\|}{\beta_n\|f(x_{n+1})\|^2}\right),\ \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n\|f(x_{n-1})\|}{\|f(x_{n+2})\|}\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n},\ \gamma_0 = \beta_0^2\frac{\|f(x_0)\|}{\|f(x_1)\|}. \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n\|f(x_n)\|\cdot\|f(x_{n-1})\|}{\beta_n\|f(x_{n+1})\|^2}\right),\ \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n\|f(x_{n-1})\|\cdot\|f(x_{n+1})\|}{\|f(x_{n+2})\|^2}\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n},\\ \gamma_0 = \beta_0^2\frac{\|f(x_0)\|^2}{\|f(x_1)\|^2}.\end{gathered} \tag{11}$$

одношаговый метод Жанлава-Пузынина[1], где β_n просчитывается по формуле (12):

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\beta_n \left\| f(x_n) \right\|}{\left\| f(x_{n+1}) \right\|}\right), \tag{12}$$

и двухшаговый метод, рассмотренный в работе [2], где β_n просчитывается по формуле (13):

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \left\| f(x_n) \right\|}{\beta_n \left\| f(x_{n+1}) \right\|}\right), \ \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \left\| f(x_n) \right\|}{\left\| f(x_{n+2}) \right\|}, \ \gamma_0 = \beta_0^2. \tag{13}$$

Причем $\left\| f(x_{-1}) \right\|$ полагаем равным $\left\| f(x_0) \right\|$.

Таким образом, нами рассматриваются процессы:

(2)-(4),(9); (2),(3),(5),(10); (2),(3),(7),(11); (2),(3),(6),(12); (2),(3),(6),(13).

Вычислительный эксперимент и его обсуждение.

Вычислительный эксперимент на модельной системе (2) проводился при следующих начальных данных: точность $\varepsilon = 10^{-12}$, $\beta_0 = 10^{-2}$, начальные приближения берутся с отрезка $[-3{,}3]$. Размерности системы = 50,70,100,150.

Вычислительный эксперимент №1 состоял в следующем: запускались рассмотренные выше методы при одних и тех же начальных условиях, описанных выше, и эксперимент показал следующее: из рассмотренных одношаговых, двухшаговых и трехшаговых методов наиболее эффективными по скорости сходимости к решению является трехшаговый метод (2)-(4),(9) и одношаговый метод (2),(3),(6),(12). А по широте области сходимости наиболее эффективными являются (2),(3),(6),(12), далее идет метод (2)-(4),(9).

Результаты эксперимента представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты вычислительного эксперимента

n - Размерность	50	70	100
Метод №1	44.92%	41.52%	36.76%
Метод №2	45.8%	38.8%	25.52%
Метод №3	43.24%	36.44%	35.48%
Метод №4	45.96%	42.36%	38.56%
Метод №5	43.42%	37.27%	31.46%

В вычислительный эксперименте №2 мы проводили вычисления всех методов при одном и том же начальном приближении, а β_0 находилось следующим образом: вначале брали β_0 случайным образом из отрезка $[10^{-3}, 10^{-1}]$, затем, после нахождения Δx_0, вычисляли x_1 в соответствии с одной из формул (4)-(7), то-есть

$$x_1 = x_0 + \beta_0 \Delta x_0.$$

Далее находили норму, соответствующую данному значению x_1:

$$\left\| f(x_n) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^{\,2}(x_n)}.$$

После этого вместо β_0 брали $\frac{\beta_0}{2}$, затем заново вычисляли x_1 и сравнивали его норму с нормой $f(x_1)$, где x_1 найдено на предыдущем шаге.

Если норма $f(x_1)$ меньше, то мы брали значение x_1 за эталон и повторяли все шаги с уменьшением β_0 и сравнением норм заново. А в противном случае в качестве начального параметра принимается β_0.

Всего таких шагов проводилось 10.

Результаты эксперимента показали незначительное увеличение процента сходимости всех методов.

Вычислительном эксперимент №3 состоял в следующем: для каждого метода мы сохранили значения векторов x_0, для которых данный метод не сошелся. Далее мы повторяли вычисления, принимая за начальные приближения вектора равные разности двух «плохих» векторов. Результаты эксперимента показали, что среди векторов начальных приближений, найденных таким образом, сходимость стабильно более (примерно на 10%) высокая по сравнению с векторами, взятыми случайным образом.

В вычислительном эксперименте №4 мы сохраняли «плохие» значения вектора x_0 наиболее эффективного из методов – трехшагового метода (2)-(4),(9) – и использовали данные значения как начальные приближения для одного из наименее эффективных методов - метода (2),(3),(7),(11). Результат вычислительного эксперимента показал, что в ряде случаев эти «плохие» вектора являются вполне хорошим начальным приближением для другого метода. Таким образом, комбинированное использование двух различных методов позволяет расширить область сходимости. Это говорит о том, что области сходимости различных методов есть множества пересекающиеся.

Литература.

1. Жанлав, Т. О сходимости на основе непрерывного аналога метода Ньютона / Т. Жанлав, И.В. Пузынин // Вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. –Т.32, №6. – С.846-856.

2. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы решения нелинейных уравнений: монография / В.М. Мадорский. – Брест: Изд-во БрГУ, 2005. – 186 с.

3. Артюшеня, А.А. Сравнительный анализ эфективности одношаговых, двухшаговых и трёхшаговых методов решения нелинейных систем / А. А. Артюшеня // Материалы III международной молодежной научно-практической конференции «Научный потенциал молодежи – будущему Беларуси» Пинск : Изд-во Полесского ГУ. – 2009. – Ч. 3. – С. 210.

УДК 517.925

О ПОСТРОЕНИИ ОБЩЕГО ИНТЕГРАЛА У НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 4-ГО ПОРЯДКА

Белемук О.В.

УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест

В работах [1-3] рассматривается метод построения общего интеграла специальной формы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков. Приведенные в этих работах алгоритмы поиска коэффициентных условий, при выполнении которых рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет заданный общий интеграл, распространены на уравнения 4-го порядка и реализованы в кодах системы символьных вычислений *Mathematica* 6.03.