Если норма $f(x_1)$ меньше, то мы брали значение x_1 за эталон и повторяли все шаги с уменьшением β_0 и сравнением норм заново. А в противном случае в качестве начального параметра принимается β_0.

Всего таких шагов проводилось 10.

Результаты эксперимента показали незначительное увеличение процента сходимости всех методов.

Вычислительном эксперимент №3 состоял в следующем: для каждого метода мы сохранили значения векторов x_0, для которых данный метод не сошелся. Далее мы повторяли вычисления, принимая за начальные приближения вектора равные разности двух «плохих» векторов. Результаты эксперимента показали, что среди векторов начальных приближений, найденных таким образом, сходимость стабильно более (примерно на 10%) высокая по сравнению с векторами, взятыми случайным образом.

В вычислительном эксперименте №4 мы сохраняли «плохие» значения вектора x_0 наиболее эффективного из методов – трехшагового метода (2)-(4),(9) – и использовали данные значения как начальные приближения для одного из наименее эффективных методов - метода (2),(3),(7),(11). Результат вычислительного эксперимента показал, что в ряде случаев эти «плохие» вектора являются вполне хорошим начальным приближением для другого метода. Таким образом, комбинированное использование двух различных методов позволяет расширить область сходимости. Это говорит о том, что области сходимости различных методов есть множества пересекающиеся.

Литература.

1. Жанлав, Т. О сходимости на основе непрерывного аналога метода Ньютона / Т. Жанлав, И.В. Пузынин // Вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. –Т.32, №6. – С.846-856.

2. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы решения нелинейных уравнений: монография / В.М. Мадорский. – Брест: Изд-во БрГУ, 2005. – 186 с.

3. Артюшеня, А.А. Сравнительный анализ эфективности одношаговых, двухшаговых и трёхшаговых методов решения нелинейных систем / А. А. Артюшеня // Материалы III международной молодежной научно-практической конференции «Научный потенциал молодежи – будущему Беларуси» Пинск : Изд-во Полесского ГУ. – 2009. – Ч. 3. – С. 210.

УДК 517.925

О ПОСТРОЕНИИ ОБЩЕГО ИНТЕГРАЛА У НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 4-ГО ПОРЯДКА

Белемук О.В.

УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест

В работах [1-3] рассматривается метод построения общего интеграла специальной формы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков. Приведенные в этих работах алгоритмы поиска коэффициентных условий, при выполнении которых рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет заданный общий интеграл, распространены на уравнения 4-го порядка и реализованы в кодах системы символьных вычислений *Mathematica* 6.03.

Сущность рассматриваемого метода состоит в следующем: рассмотрим функцию

$$\varphi_5(x) = \sum_{i=1}^{4} C_i \, \varphi_i(x) \, e^{\lambda_i \, y(x)}, \tag{1}$$

где $C_i \ \ (i = \overline{1,4})$ – произвольные постоянные, $\varphi_j \ \ (j = \overline{1,5})$ – произвольные, отличные от нуля аналитические функции, $\lambda_i \ (i = \overline{1,4})$ – некоторые постоянные. Сформулируем следующую задачу: найти дифференциальное уравнение 4-го порядка, общий интеграл которого имеет вид (1).

Введем в рассмотрение функции $\xi_i \ (i = \overline{1,4})$:

$$\xi_i = \frac{\varphi_i'}{\varphi_i} - \frac{\varphi_5'}{\varphi_5}, \tag{2}$$

в этом случае функции $\varphi_i \ \ (i = \overline{1,4})$ примут вид:

$$\varphi_i = \varphi_5 e^{\int \xi_i \, dx}. \tag{3}$$

После подстановки (3) в функцию (1) получим равенство:

$$\sum_{i=1}^{4} C_i e^{\lambda_i \, y(x) + \int \xi_i \, dx} = 1, \tag{4}$$

которое будет представлять общий интеграл дифференциального уравнения 4-го порядка.

Алгоритм построения дифференциального уравнения, для которого соотношение (4) будет общим интегралом, проводится в два этапа: 1) построение дифференциального уравнения с неопределенными коэффициентами; 2) установление соотношений, связывающих коэффициенты построенного дифференциального уравнения.

Результатом первого этапа построения алгоритма является дифференциальное уравнение 4-го порядка

$$\begin{gathered}
\Big(\sum_{i=0}^{2}(a_{i101}y'^{i})y'' + \sum_{i=0}^{5}(a_{i001}y'^{i})\Big)y^{(IV)} + \Big(\sum_{i=0}^{2}(a_{i110}y'^{i})y'' + \sum_{i=0}^{6}(a_{i010}y'^{i})\Big)y''' + \\
+ a_{0210}y''^{2}y''' + \sum_{i=0}^{2}(a_{i020}y'^{i})y'''^{2} + a_{0400}y''^{4} + \sum_{i=0}^{3}(a_{i300}y'^{i})y''^{3} + \\
\sum_{i=0}^{5}(a_{i200}y'^{i})y''^{2} + \sum_{i=0}^{7}(a_{i100}y'^{i})y'' + \sum_{i=0}^{10}(a_{i000}y'^{i}) = 0,
\end{gathered} \tag{5}$$

где a_{ijkl} - коэффициенты при $y'^{i} y''^{j} y'''^{k} y^{(IV)l}, \, i, j, k, l \in \mathrm{Z}, \ i = \overline{0,10}, \ j = \overline{0,4}, k = \overline{0,2}, l = 0{,}1.$

Реализованный средствами ССВ *Mathematica* алгоритм позволил установить вид коэффициентов дифференциального уравнения (5), линейные зависимости между коэффициентами при одинаковых весовых характеристиках, а также вид функций $\xi_i \ (i = \overline{1,4})$, что позволяет классифицировать дифференциальные уравнения вида (5) в зависимости от вводимых коэффициентов и строить для них общий интеграл.

Литература

1. Belemuk O., Chichurin A. Cauchy Problem for Abel's Differential Equation of the First Kind // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Evolution, Control and Stability of Dynamical Systems. WSFiZ, Siedlce, 2009. P. 18-22.

2. Белемук, О.В. О построении общего интеграла у обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка специального вида с помощью компьютерного моделирования / О.В. Белемук, А.В. Чичурин // Book of abstracts of the Second International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii (DNU, Donetsk, Ukraine, 11-14 November 2008). – Donetsk, Цифрова типографія, 2008. – С. 42-43.

3. Белемук, О.В. Алгоритмический и программный аспекты решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида / О.В. Белемук // Современные проблемы математического моделирования и новые образовательные технологии в математике: материалы республиканской научно-практической конференции молодых ученых, аспирантов и студентов, БрГУ, 22-23 апреля 2009 г. – Том 1. – Брест: Альтернатива. – 2009. – С. 68-70.

УДК 517.983+519.6

СХОДИМОСТЬ ОДНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Берёзкина М.С.

УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест

Научный руководитель – Савчук В.Ф., кандидат физ.-мат. наук, доцент

Поскольку некорректные задачи постоянно возникают в многочисленных приложениях математики, то проблема их решения и разработка методов их решения является актуальной. В работе предлагается новый метод решения некорректных задач. Цель исследования – доказать сходимость метода и получить оценки погрешности в исходной норме гильбертова пространства.

В гильбертовом пространстве *H* решается уравнение I рода

$$Ax = y\ , \tag{1}$$

где A – неограниченный положительный самосопряжённый оператор, для которого нуль не является собственным значением. Однако нуль принадлежит спектру оператора A и, следовательно, задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) существует, то будем искать его с помощью итерационного метода

$$x_{n+1} = (A^2 + B)^{-1}(Bx_n + Ay),\ x_0 = 0. \tag{2}$$

Здесь B – ограниченный вспомогательный самосопряжённый оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмём оператор $B = bE,\ b > 0,\ E -$ тождественный оператор. В случае приближённой правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$, итерационный процесс (2) запишется в виде

$$x_{n+1} = (A^2 + B)^{-1}(Bx_{n,\delta} + Ay_\delta),\ \ x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Для метода (3) доказаны теоремы.

Теорема 1. Итерационный процесс (2) сходится к точному решению x уравнения (1).

Теорема 2. Если выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $\sqrt{n}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0,$ то итерационный процесс (3) сходится.