2. Белемук, О.В. О построении общего интеграла у обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка специального вида с помощью компьютерного моделирования / О.В. Белемук, А.В. Чичурин // Book of abstracts of the Second International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii (DNU, Donetsk, Ukraine, 11-14 November 2008). – Donetsk, Цифрова типографія, 2008. – С. 42-43.

3. Белемук, О.В. Алгоритмический и программный аспекты решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида / О.В. Белемук // Современные проблемы математического моделирования и новые образовательные технологии в математике: материалы республиканской научно-практической конференции молодых ученых, аспирантов и студентов, БрГУ, 22-23 апреля 2009 г. – Том 1. – Брест: Альтернатива. – 2009. – С. 68-70.

УДК 517.983+519.6

СХОДИМОСТЬ ОДНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Берёзкина М.С.
УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест
Научный руководитель – Савчук В.Ф., кандидат физ.-мат. наук, доцент

Поскольку некорректные задачи постоянно возникают в многочисленных приложениях математики, то проблема их решения и разработка методов их решения является актуальной. В работе предлагается новый метод решения некорректных задач. Цель исследования – доказать сходимость метода и получить оценки погрешности в исходной норме гильбертова пространства.

В гильбертовом пространстве *H* решается уравнение I рода

$$Ax = y\ , \tag{1}$$

где A – неограниченный положительный самосопряжённый оператор, для которого нуль не является собственным значением. Однако нуль принадлежит спектру оператора A и, следовательно, задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) существует, то будем искать его с помощью итерационного метода

$$x_{n+1} = (A^2 + B)^{-1}(Bx_n + Ay),\ x_0 = 0. \tag{2}$$

Здесь B – ограниченный вспомогательный самосопряжённый оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмём оператор $B = bE,\ b > 0,\ E -$ тождественный оператор. В случае приближённой правой части $y_\delta,\ \|y - y_\delta\| \le \delta$, итерационный процесс (2) запишется в виде

$$x_{n+1} = (A^2 + B)^{-1}(Bx_{n,\delta} + Ay_\delta),\ \ x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Для метода (3) доказаны теоремы.

Теорема 1. Итерационный процесс (2) сходится к точному решению x уравнения (1).

Теорема 2. Если выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $\sqrt{n}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0,$ то итерационный процесс (3) сходится.

Теорема 3. Если точное решение x уравнения (1) истокопредставимо, т.е. $x = A^{2s}z,\ s>0$, то для итерационного процесса (3) имеет место оценка погрешности:

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le \left(\frac{bs}{2n}\right)^s \|z\| + \sqrt{\frac{n}{2b}}\delta,\ n > 2s. \qquad (4)$$

Теорема 4. Оптимальная по n оценка погрешности для метода (3) имеет вид

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{опт} \le \left[(1+2s)2^{-4s}s^{-s}\|z\|^2\delta^{2s}\right]^{1/(2s+1)}. \qquad (5)$$

и получается при $n_{опт} = \left[2^{3-2s}s^{2(s+1)}b^{2s+1}\|z\|^2\delta^{-2}\right]^{1/(2s+1)}$.

Замечание. Если оператор A – ограниченный, $A = \int\limits_{-M}^{M}\lambda dE_\lambda$, то следует учитывать значение функции $f(\lambda)$ в точке $\lambda = M$, поэтому общая оценка погрешности метода (3) будет иметь вид

$$\|x - x_n\| \le \max\left\{\left(\frac{bs}{2n}\right)^s, \frac{M^{2s}b^n}{\left(M^2+b\right)^n}\right\}\|z\| + \sqrt{\frac{n}{2b}}\delta,\ n > 2s. \qquad (6)$$

Очевидно, при $n \to \infty$ величина $\frac{M^{2s}b^n}{\left(M^2+b\right)^n}$, убывающая как геометрическая прогрессия, станет меньше величины $\left(\frac{bs}{2n}\right)^s$, убывающей как $\frac{1}{n^s}$. Следовательно, для достаточно больших n оценка (6) примет вид (4).

Предложенный метод может быть успешно применён для решения некорректных задач, встречающихся в спектроскопии, акустике, синтезе антенн, математической обработке данных эксперимента, теплопроводности.

УДК 517.512.2

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ТИПА ВОРОНОВСКОЙ

Божко И.Н., Дацык В.Т.
УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест

Одной из основных задач теории суммирования рядов и интегралов, является нахождение главного члена уклонения функций определенного класса от ее линейных средних (операторов приближения) с равномерной оценкой остатка относительно всего класса указанных функций. Впервые такая задача была решена Е.В. Вороновской, а именно:

$$f(x) - B_n(f;x) = -\frac{1}{2}\frac{x(1-x)}{n}f(x) + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (1)$$