УДК 517.928.4.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОДНОГО БИОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Кожух И.Г., Корделюк О.И.
УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест

Прежде чем приступить к конструированию модели прикладного характера, необходимо чётко представить, на какие вопросы можно получить ответ с помощью данной модели. Чем меньшим количеством уравнений можно обойтись при описании явлений, тем лучше модель. Только тогда, когда число независимых переменных не больше двух-трёх, можно уверенно разобраться в решении задачи и выявить влияние различных параметров. При увеличении числа уравнений результаты становятся необозримыми, и основное преимущество изучения модели вместо самого явления пропадает.

Рассмотрим модель процесса роста клеток в проточном культиваторе. Принцип действия проточного культиватора очень прост. В сосуд объема V см^3 (культиватор) со скоростью ν см/с через специальное отверстие поступает раствор питательного вещества известной концентрации. В культиваторе он тщательно перемешивается с имеющимся раствором, содержащим биомассу X, то же питательное вещество заданной концентрации и некоторое количество продуктов жизнедеятельности клеток. Данный раствор с такой же скоростью ν см/с выливается из сосуда через второе отверстие.

Основное замечательное свойство проточного метода-это осуществление устойчивого состояния равновесия. Через некоторое время после включения протока в сосуде устанавливаются постоянные, не зависящие от времени концентрации биомассы, вещества и продуктов жизнедеятельности. Это означает, что прирост биомассы из-за размножения в точности равен убыли из-за протока. В описанной ситуации состояние равновесия устойчиво. Пусть случайным образом изменилась концентрация биомассы в сосуде, тогда вырастет потребление питательного вещества и его концентрация станет меньше равновесной, что, в свою очередь, вызовет уменьшение скорости роста биомассы, вследствие чего произойдет уменьшение биомассы до равновесного состояния.

Попытаемся составить модель роста биомассы в культиваторе. Если он непроточный, то кинетика роста биомассы в нем описывается дифференциальным уравнением.

$$\frac{dx}{dt} = \mu X$$

Но одно это уравнение ещё не определяет всего процесса. Значит, более адекватно состояние процесса можно описать системой уравнений.

Рассмотрим простейшую систему уравнений проточного культиватора

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\mu y}{K_y + y} x - Dx,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha \frac{\mu y}{K_y + y} x + D(y_0 - y), \tag{1}$$

где μ скорость роста, а D- коэффициент разбавления.

При заданном значении коэффициента D в культиваторе устанавливается постоянное значение удельной скорости роста μ.

Исследуем стационарные режимы системы (1) с целью определить, какие скорости протока возможны для нормальной работы культиватора. Для этого в уравнениях системы (1) положим производные по времени равными нулю. Получим два алгебраических уравнения

$$\alpha\bar{x}+\bar{y}=y_0, \tag{2}$$

$$\bar{x}\left(\frac{\mu\bar{y}}{K_y-\bar{y}}-D\right)=0 \tag{3}$$

Уравнение (2) дает линейную связь между стационарными концентрациями $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и должно выполняться всегда. Это условие постоянства экономического коэффициента $Y=\frac{1}{\alpha}$. Этот коэффициент показывает, какой процент пищи превращается непосредственно в клеточную массу. Уравнению (3) соответствуют две возможности: либо

$$\bar{x}=\bar{x}_a=0, \tag{4а}$$

а тогда из (2)

$$\bar{y}=\bar{y}_a=y_0, \tag{4в}$$

либо $\bar{x}\neq 0$, тогда

$$\bar{y}=\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{b}}=\frac{K_yD}{\mu-D} \tag{5а}$$

$$\bar{x}=\bar{x}_b=\frac{1}{\alpha}\left(y_0-\bar{y}_b\right)=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\mu y_0-D(K_y+y_0)}{\mu-D}, \tag{5в}$$

где y_0 - постоянное значение, к которому с течением времени стремится суммарная концентрация u углерода $(u=x+y)$.

Начертив графики зависимости $\bar{x}_a$, $\bar{y}_a$, $\bar{x}_b$, $\bar{y}_b$ от коэффициента разбавления D, можно показать, что при $\mathrm{D}>\mathrm{D}_{\text{êð}}$, где $\mathrm{D}_{\text{êð}}=\dfrac{\mu \mathrm{y}_0}{K_y+y_0}$ (6) и $\bar{x}_b$ становится отрицательным. Это значит, что решения (5а) и (5в) перестанут иметь смысл, поскольку концентрации не могут быть отрицательными. А тогда в этой области значения параметра D может существовать только одно нулевое решение.

Вывод: при $\mathrm{D}>\mathrm{D}_{\text{êð}}$, наступает режим вымывания, т.е. скорость потока настолько велика, что прирост биомассы не может компенсировать ее отток.

При скоростях протока, меньших $\mathrm{D}_{\text{êð}}$, имеют смысл оба решения (4а), (4в) и (5а), (5в). Для исследования вопроса, в каком режиме работает культиватор, необходимо проанализировать устойчивость обоих возможных режимов. Можно показать, что нулевое решение неустойчиво при $\mathrm{D}<\mathrm{D}_{\text{êð}}$. Это значит, что если не поместить в культиватор никакой “затравки” микроорганизмов, то биомасса в нем не вырастет.

Рассмотрим далее случай $\mathrm{D} < \mathrm{D}$êð., исследуя вопрос об оптимальных режимах работы культиватора. Производительностью культиватора называют количество биомассы, снимаемой за единицу времени с единицы объема установки.

$$w = \frac{\Delta m}{V} = Dx. \tag{7}$$

Из (7) следует, что при $\mathrm{D} \to 0,$ производительность тоже стремится к нулю. Она равна нулю и тогда, когда происходит вымывание биомассы, т.е. $\mathrm{x} = 0.$ Нетрудно показать, что при определённых значениях $\mathrm{D} = \mathrm{D}_0$ производительность достигает максимума, что произойдет тогда, когда

$$\mathrm{D}_0 = \mu\left(1 - \sqrt{\frac{K_y}{y_0 + K_y}}\right), w = \frac{\mu}{\alpha}\left(\sqrt{y_0 + K_y} - \sqrt{K_y}\right) \tag{8}$$

Вернемся опять к системе(1) и введем там безразмерные переменные и параметры: $\tilde{x} = \frac{\alpha \mathrm{x}}{\mathrm{y}_0}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{\mathrm{y}_0}, \quad \tilde{t} = t\mu, \quad v = \frac{D}{\mu}, K = \frac{K_y}{y_0}.$

Сохранив за переменными обозначения $x, \; y, \; t$ вместо системы (1) будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{xy}{K+y} - \sigma = P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{xy}{K+y} + \sigma(1-y) = Q(x,y) \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнение изоклины вертикальных касательных $P(x,y) = 0$ определяет на фазовой плоскости две прямые: $x = o \quad y = \frac{\sigma K}{1-\sigma} = y_c$. Изоклина горизонтальных касательных $Q(x,y) = 0$ является гиперболой, одна из асимптот которой - ось x, а кривая $Q(x,y)$ пересекает ось y в точке $\mathrm{y} = 1$ при любом значении σ. Особыми точками системы (9) являются:

$$x_a = 0, \quad y_a = 1; \tag{10}$$

$$x_b = \frac{1 - \sigma(K+1)}{1-\sigma}, \quad y_b = \frac{K-\sigma}{1-\sigma}, \tag{11}$$

Причем, при $\sigma \neq 0$ обе эти точки лежат на прямой $\mathrm{x} + \mathrm{y} = 1,$ и при увеличении скорости протока σ вторая точка перемещается влево вверх вдоль прямой $\mathrm{x} + \mathrm{y} = 1.$ При $\sigma = \sigma_{кр}$ обе точки сливаются в одну, а при $\sigma > \sigma_{кр}$ такой режим не имеет физического смысла, т.к. x и y не могут быть отрицательными.

Исследовав характер и устойчивость особых точек, приходим к выводу:

а) точка $a(\bar{x}_a = 0, \quad \bar{y}_a = \mu)$ при $\sigma < \sigma_{кр}$ является седлом, а при $\sigma > \sigma_{кр}$ - устойчивым узлом.

б) точка $b(\bar{x}_b, \quad \bar{y}_b)$ существует лишь при $\sigma < \sigma_{кр} = \dfrac{1}{K+1}$ и является устойчивым узлом.

Выводы: а) процессы установления в соответствующей системе всегда носят апериодический характер.

б) качественное исследование системы (9) на фазовой плоскости позволяет определить положение и характер устойчивости особых точек, найти критические значения, а также и условия сосуществования.

Литература

1. Чернавский, Д.С. Колебательные процессы в биологических и химических системах / Д.С. Чернавский, Л. Н. Григоров, М.С. Полякова. – М.: Наука,1967.

2. Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Физматгиз,1959.

УДК 517.928.4.

МЕТОД МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ АМПЛИТУД В ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Кожух И.Г., Касперович Ю.А.

УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест

Рассмотрим один из приближенных методов исследования некоторого класса динамических систем, имеющих предельный цикл, т.е. автоколебательных систем.

Пусть дана динамическая система

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y), \tag{1}$$

где $P(x, y)$, и $Q(x, y)$ – заданные аналитические функции. Поместим начало координат в особую точку (0,0) системы (1) , тогда она примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + \mu f_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + \mu f_2(x, y). \end{aligned} \tag{2}$$

Система (2) получается из системы (1) в результате разложения функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в ряд Тейлора.

Известный французский ученый А.Пуанкаре в начале прошлого века показал, что в одном важном частном случае можно получить приближенное решение $x(t), y(t)$ такой системы. Этот случай относится к автоколебательным системам, имеющим предельный цикл.

Сформулированная выше задача может быть решена при выполнении двух условий.