

С учетом (2.3), (2.4) примет вид

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \pi_{10} \tilde{\gamma}_1 + \pi_{20} \tilde{\gamma}_2, \quad (2.8)$$

а при подстановке (2.3) в (2.5), (2.6), (2.7) равенства превратятся в тождества.

Из всего вышеизложенного вытекает

Теорема 2. *При выполнении условий (2.2) процесс $n(t)$ эргодичен. Для того, что бы его стационарное распределение представлялось в обобщенной форме произведения (2.3), необходимо выполнения равенства (2.8) и условий теоремы 1 для каждого из узлов.*

Литература

1. Miyazawa M., Taylor P.G. A Geometric Product-form Distribution for a Queueing Network with Non-standard Batch Arrivals and Batch Transfers // Adv.Appl.Prob. 1997. V.29. No. 2. P.1-22.
2. Chao X. and Pinedo M. On Generalized Networks of Queues with Positive and Negative Arrivals // Prob. Eng. Inf. Sci. 1993. V.7. P.301-304.
3. Chao X., Pinedo M. and Shaw D. A Network of Assembly Queues with Product-form Solution // J. Appl. Prob. 1996. V.33. P.858-869.

УДК 519.6

МЕТОД СЕКУЩИХ ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Костюк А.Ю.

*УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест
Научный руководитель В.М.Ракецкий, к.ф.-м.н, доцент*

Введение. Методы минимизации функций одной переменной занимают важное место в теории и практике численных методов оптимизации, поскольку они часто используются при разработке методов минимизации функций n переменных. Наиболее популярными из них являются прямые методы (или нулевого порядка), не требующие вычисления производных.

Главное требование, которое предъявляется к прямым методам, можно сформулировать так: достичь заданную точность отыскания точки экстремума при минимальном количестве вычислений функции. Именно эта идея лежит в основе широко известных методов Фибоначчи, “золотого” сечения и квадратичной интерполяции [1,2]. Методы Фибоначчи и “золотого” сечения не предполагают и не требуют от функции никаких дополнительных свойств, кроме свойства унимодальности на заданном отрезке. Они одинаково хороши как для дифференцируемых, так и не дифференцируемых функций. Метод квадратичной интерполяции разработан из предположения, что минимизируемая функция является гладкой, хотя бы один раз дифференцируемой, однако его применение во многих случаях дает хорошие результаты и для недифференцируемых функций.

Ниже приводится описание прямого метода минимизации функции одной переменной, который получил условное название метода секущих, и результаты численного эксперимента по его сравнению с другими аналогичными методами.

Идея метода. Если функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a,b]$, то, зная внутри этого отрезка две точки x_1, x_2 и значения функции в них, можно уменьшить отрезок локализации экстремума, отбросив его часть, заведомо не содержащую точку минимума:

$[a, x_1]$, если $f(x_1) < f(x_2)$, или $[x_2, b]$, если $f(x_1) > f(x_2)$. Этот принцип так или иначе используется во всех методах минимизации унимодальных функций. Однако кроме значений функции в точках x_1, x_2 обычно известны и значения функции на концах отрезка a, b . С помощью информации о четырех точках можно получить новую информацию. Для этого соединим (см. рис. 1) точки $(a, f(a))$, $(x_1, f(x_1))$ и $(x_1, f(x_1))$, $(b, f(b))$ прямыми.

Левая прямая есть линейная аппроксимация левой ветви функции, правая – правой, а абсцисса точки пересечения прямых – приближение к точке минимума. Если ситуация сложится именно так, как показано на рисунке, то после нахождения пятой точки можно от отрезка $[a, b]$ сразу перейти к отрезку $[x_1, x_2]$. Кроме этого можно контролировать процесс минимизации по двум последовательно найденным приближениям: если x^{*1} и x^{*2} – два последовательно найденных приближения к точке минимума, то x^{*2} принимаем в качестве точки экстремума, если $|x^{*1} - x^{*2}| \leq \epsilon$, где ϵ – заданная точность отыскания экстремума.

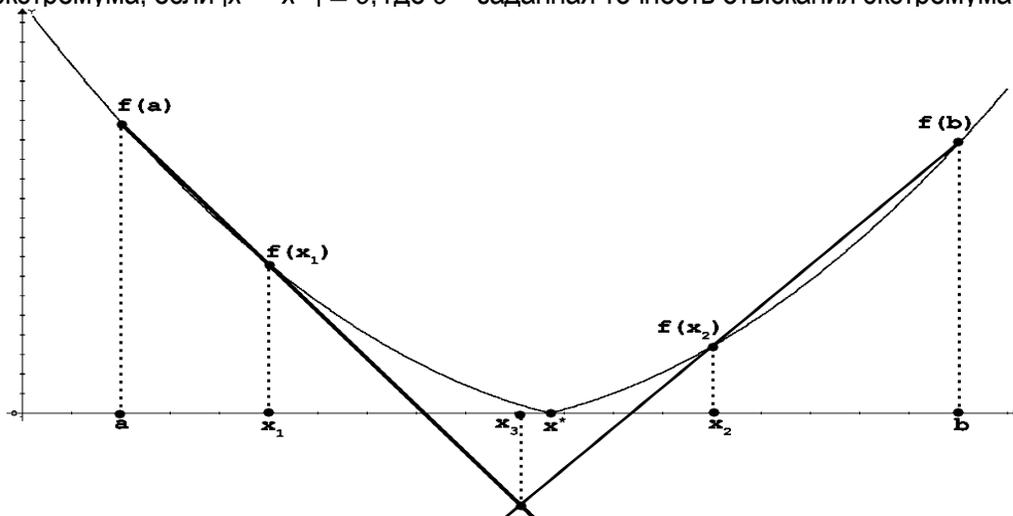


Рисунок 1 – Графическая интерпретация метода секущих

Никаких предположений о поведении функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, кроме унимодальности, не высказывалось. Поэтому этот метод приемлем для поиска минимума любых унимодальных функций. Однако характер аппроксимации подсказывает, что метод должен давать хорошие результаты для негладких функций и особенно для функций, которые близки по своему поведению к линейным негладким функциям типа $|x - x^*|$.

Описание метода. Обсудим сначала, как располагать точки x_1, x_2 внутри исходного отрезка $[a, b]$. Из последующего описания будет видно, что какого-то регулярного, заранее predeterminedного размещения точек внутри отрезка локализации экстремума, как это есть в методах Фибоначчи или “золотого” сечения, сконструировать не удастся. Поэтому первоначальное размещение точек в принципе может быть любым, лишь бы точки x_1, x_2 не совпадали друг с другом. Предлагаются два способа:

- 1) точки x_1, x_2 располагаются равномерно на отрезке $[a, b]$ и делят его на 3 равные части;
- 2) сначала в середине отрезка $[a, b]$ располагается точка x_1 . Точка x_2 помещается в середину одного из двух получившихся отрезков в зависимости от соотношения значений функции на концах отрезка $[a, b]$. Если $f(a) < f(b)$, то x_2 – середина отрезка $[a, x_1]$; при $f(a) > f(b)$ точка x_2 – середина отрезка $[x_1, b]$.

Оба способа допускают дополнительный анализ: после построения точки x_1 можно проанализировать соотношение между значениями $f(a)$, $f(x_1)$ и $f(b)$. Если $f(a) < f(x_1) < f(b)$, то в силу унимодальности функции точка экстремума $x^* \in [a, x_1]$. В случае $f(a) > f(x_1) > f(b)$ точка минимума $x^* \in [x_1, b]$. В этих случаях можно сразу, без построения точки x_2 , уменьшить отрезок локализации экстремума.

Рассмотрим теперь общую конструкцию метода. Как следует из его идеи, для метода секущих типичной является схема, когда от отрезка $[a, b]$ происходит переход к отрезку $[a^1, b^1] = [x_1, x_2]$. Внутри последнего остается точка, в которой пересекаются секущие (для определенности, обозначим ее x_1^1). Эту точку, по аналогии с другими методами, необходимо использовать в дальнейших вычислениях. Возникает вопрос: как в этом случае выбрать вторую точку x_2^1 внутри отрезка $[a^1, b^1]$? Один из вариантов – симметрично точке x_1^1 относительно середины отрезка $[a^1, b^1]$. Однако расположение точки x_1^1 внутри отрезка $[a^1, b^1]$ не предсказуемо и при симметричном расположении точки x_2^1 нельзя гарантировать, что следующий отрезок $[a^2, b^2]$ будет существенно короче отрезка $[a^1, b^1]$. Поэтому точку x_2^1 предлагается располагать в середине большего из отрезков $[a_1, x_2^1]$, $[x_2^1, b^1]$. В этом случае следующий отрезок будет более чем в два раза короче предыдущего (если переход от $[a^1, b^1]$ к $[a^2, b^2]$ произойдет по типичной схеме).

Рассуждения предыдущего абзаца основывались на типичной схеме. Но она не является единственной. В процессе вычислений возможна нетипичная схема №1, когда точка пересечения секущих не принадлежит отрезку $[x_1, x_2]$. В этом случае, для упрощения анализа, перенумеруем три внутренних точки таким образом, чтобы выполнялось соотношение $x_1 < x_2 < x_3$. После этого новый отрезок строится по одному из 3-х правил:

- 1) $[a^1, b^1] = [x_1, x_3]$, если $f(x_2) < \min\{f(x_1), f(x_3)\}$;
- 2) $[a^1, b^1] = [a, x_1]$, если $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$;
- 3) $[a^1, b^1] = [x_3, b]$, если $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$.

Наконец, возможна нетипичная схема №2, когда точка пересечения секущих совпадает в пределах заданной точности с одной из точек x_1, x_2 или вообще не принадлежит отрезку $[a, b]$. В этом случае новый отрезок строится классическим способом (для упрощения считаем, что $x_1 < x_2$):

- 1) $[a^1, b^1] = [a, x_1]$, если $f(x_1) < f(x_2)$;
- 2) $[a^1, b^1] = [x_2, b]$, если $f(x_1) > f(x_2)$.

С целью упрощения при анализе описанных выше ситуаций сознательно не рассматривались соотношения \leq, \geq . Для описания общей схемы метода они не имеют принципиального значения.

В заключение описания метода приведем формулы для вычисления абсциссы точки пересечения секущих (обозначим ее как x_s):

$$x_s = \frac{B_2(x_2, b) - B_1(a, x_1)}{A_1(a, x_1) - A_2(x_2, b)},$$

$$\text{где } A_1(a, x_1) = \frac{f(a) - f(x_1)}{a - x_1}; \quad A_2(x_2, b) = \frac{f(x_2) - f(b)}{x_2 - b}; \quad B_1(a, x_1) = \frac{-x_1 f(a) + a f(x_1)}{a - x_1};$$

$$B_2(x_2, b) = \frac{-b f(x_2) + x_2 f(b)}{x_2 - b}.$$

Численный эксперимент. Для проверки эффективности метода секущих был проведен численный эксперимент, в котором метод секущих сравнивался по количеству итераций и вычислений функции с методами “золотого” сечения и квадратичной интерполяции. При этом реализован был алгоритм, в котором точки x_1, x_2 для начального отрезка строились по правилу 2 с дополнительным анализом значения в точке x_1 .

Негладкие функции:

Функции	[a; b]	Количество вычислений функции		
		“Золотое сечение”	Метод секущих	Квадратичной интерполяции
1. $F(x) = x - \pi $	[3;4]	20	8	14
	[0;4]	22	8	14
2. $F(x) = x^2 - \pi^2 $	[3;4]	20	12	16
	[0;4]	22	19	19
3. $F(x) = \begin{cases} \pi^2 - x^2, \text{ если } x \leq \pi \\ x - \pi, \text{ если } x > \pi \end{cases}$	[3;4]	20	10	28
	[0;4]	22	12	30
4. $F(x) = x - \pi + 0.1(x - \pi)^2$	[3;4]	20	12	13
	[0;4]	22	16	17

Гладкие функции:

Функции	[a; b]	Количество вычислений функции		
		“Золотое сечение”	Метод секущих	Квадратичной интерполяции
1. $F(x) = x + \frac{1}{x}$	[0.5;7]	24	33	22
	[0.9;6]	23	33	13
2. $F(x) = \frac{x - 5}{4x^2 - 25x + 40}$	[1;4]	22	29	11
	[3;6]	22	28	11

Численный эксперимент подтверждает предположение о том, что для негладких функций метод секущих будет более эффективен, чем для гладких. Особенно он эффективен для функций, близких к линейным негладким функциям.

Литература

1. Габасов, Р. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф.М. Кириллов – Минск: Изд-во БГУ, 1981.
2. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау – М: Мир, 1975.

УДК 519.24

**ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ И ДИСПЕРСИИ
ОСРЕДНЕННОЙ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ**

Кулак Т.Н.

УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест
Научный руководитель - Мирская Е.И., кандидат физ.-мат. наук, доцент

Рассмотрим r -мерный стационарный случайный процесс $X(t) = \{X_a(t), a = \overline{1, r}\}$, $t \in Z$, $a = \overline{1, r}$, с $MX(t) = 0$, неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$, $a, b = \overline{1, r}$.

$$f_{ab}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} R_{ab}(t) e^{-i\lambda t} \tag{1}$$

Пусть $X_a(0), X_a(1), \dots, X_a(T-1)$ - T последовательных наблюдений за составляющей $X_a(t)$ процесса $X(t)$, $t \in Z$, $a = \overline{1, r}$ и $T = LN - (L-1)K$, где L - число пересекающихся интервалов, содержащих по N наблюдений, а K принимает целочисленные значения, $0 \leq K \leq N$.