Негладкие функции:

Функции	[a; b]	Количество вычислений функции		
		"Золотое сечение"	Метод секущих	Квадратичной интерполяции
1. $F(x) = \lvert x - \pi \rvert$	[3;4]	20	8	14
	[0;4]	22	8	14
2. $F(x) = \lvert x^2 - \pi^2 \rvert$	[3;4]	20	12	16
	[0;4]	22	19	19
3. $F(x) = \begin{cases} \pi^2 - x^2, если. x \le \pi \\ x - \pi, если. x > \pi \end{cases}$	[3;4]	20	10	28
	[0;4]	22	12	30
4. $F(x) = \lvert x - \pi \rvert + 0.1(x - \pi)^2$	[3;4]	20	12	13
	[0;4]	22	16	17

Гладкие функции:

Функции	[a; b]	Количество вычислений функции		
		"Золотое сечение"	Метод секущих	Квадратичной интерполяции
1. $F(x) = x + \dfrac{1}{x}$	[0.5;7]	24	33	22
	[0.9;6]	23	33	13
2. $F(x) = \dfrac{x-5}{4x^2 - 25x + 40}$	[1;4]	22	29	11
	[3;6]	22	28	11

Численный эксперимент подтверждает предположение о том, что для негладких функций метод секущих будет более эффективен, чем для гладких. Особенно он эффективен для функций, близких к линейным негладким функциям.

Литература

1. Габасов, Р.Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф.М. Кириллов – Минск: Изд-во БГУ, 1981.
2. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау – М: Мир, 1975.

УДК 519.24

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ И ДИСПЕРСИИ ОСРЕДНЕННОЙ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Кулак Т.Н.
УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест
Научный руководитель - Мирская Е.И., кандидат физ.-мат. наук, доцент

Рассмотрим r-мерный стационарный случайный процесс $X(t) = \{X_a(t), a = \overline{1,r}\}$, $t \in Z$, $a = \overline{1,r}$, с $MX(t) = 0$, неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$,, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$,, $a, b = \overline{1,r}$.

$$f_{ab}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} R_{ab}(t) e^{-i\lambda t}. \qquad (1)$$

Пусть $X_a(0), X_a(1), .., X_a(T-1)$ - T последовательных наблюдений за составляющей $X_a(t)$ процесса $X(t)$, $t \in Z$, $a = \overline{1,r}$ и $T = LN - (L-1)K$, где L - число пересекающихся интервалов, содержащих по N наблюдений, а K принимает целочисленные значения, $0 \le K \le N$.

Используя метод Уэлча [1], в качестве оценки взаимной спектральной плотности процесса исследована статистика вида

$$\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} I_{ab}(\lambda, l), \tag{2}$$

где

$$I_{ab}(\lambda, l) = \frac{1}{2\pi\sum_{p=0}^{N-1} h_a^N(p) h_b^N(p)} H_a(\lambda, l)\overline{H_b(\lambda, l)}, \tag{3}$$

где $l = \overline{1, L},\ a, b = \overline{1, r}$, $\lambda \in \Pi$, модифицированная периодограмма на l-ом интервале разбиения, а $H_a(\lambda, l)$ задано выражением

$$H_a(\lambda, l) = \sum_{t=0}^{N-1} h_a^N(t) X_a(t + (l-1)(N-K)) e^{-i\lambda(t+(l-1)(N-K))}, \tag{4}$$

$l = \overline{1, L},\ \ a, b = \overline{1, r}$, $\lambda \in \Pi$, причем наблюдения сглаживаются одним и тем же окном просмотра данных $h_a^N(t),\ t \in Z$.

Исследованы некоторые статические свойства оценки $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, $a, b = \overline{1, r}$. Найдены математическое ожидание и дисперсия построенной оценки.

Теорема 1. Математическое ожидание оценки взаимной спектральной плотности $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, $a, b = \overline{1, r}$, задаваемой соотношением (2), имеет вид

$$M\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \int_{\Pi} f_{ab}(x + \lambda)\Phi_{ab}(x)dx, \tag{5}$$

где

$$\Phi_{ab}(x) = \left[2\pi\sum_{t=0}^{N-1} h_a^N(t) h_b^N(t)\right]^{-1} \varphi_a(x)\overline{\varphi_b(x)}, \tag{6}$$

$$\varphi_a(x) = \sum_{t=0}^{N-1} h_a^N(t) e^{itx}, \tag{7}$$

$x \in \Pi$, $a, b = \overline{1, r}$.

Доказательство. Подставляя вместо $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$ ее выражение в явном виде, используя соотношения (4), (3) и учитывая свойства математического ожидания, получим

$$M\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} MI_{ab}(\lambda, l) = \frac{1}{L}\sum_{l-1}^{L}\frac{1}{2\pi\sum_{p=0}^{N-1} h_a^N(p) h_b^N(p)} M\left\{H_a(\lambda, l)\overline{H_b(\lambda, l)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{L}\sum_{l-1}^{L}\frac{1}{2\pi\sum_{p=0}^{N-1} h_a^N(p) h_b^N(p)} M\left[\sum_{t=0}^{N-1} h_a^N(t_1) X_a(t_1 + (l-1)(N-K)) e^{-i\lambda(t_1+(l-1)(N-K))}\right] \times$$

$$\times \sum_{t=0}^{N-1} h_b^N(t_2) X_b(t_2 + (l-1)(N-K)) e^{-i\lambda(t_2+(l-1)(N-K))} = \frac{1}{L}\sum_{l-1}^{L}\frac{1}{2\pi\sum_{p=0}^{N-1} h_a^N(p) h_b^N(p)} \times$$

$$\times \sum_{t_1=0}^{N-1}\sum_{t_2=0}^{N-1} h_a^N(t_1) h_b^N(t_2) e^{-i\lambda(t_1-t_2)} R_{ab}(t_1 - t_2).$$

Учитывая связь взаимной ковариационной функции и взаимной спектральной плотности

$$R_{ab}(t)=\int_{\Pi} f_{ab}(x)e^{itx}dx,$$

получим требуемый результат. Теорема доказана.

Доказано, что если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(\lambda)$, $a,b=\overline{1,r}$, заданная соотношением (1), , непрерывна в точках λ_1,λ_2 и ограничена на Π, семиинвариантная спектральная плотность 4-го порядка ограничена на Π^3, окна просмотра данных ограничены единицей, то

$$\lim_{N\to\infty} D\,\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{L}C_1 f_{aa}(\lambda)f_{bb}(\lambda), & при\ \lambda\neq 0\ (\mathrm{mod}\,\pi),\\ \dfrac{1}{L}\left(f_{ab}(0)f_{ba}(0)+C_1 f_{aa}(0)f_{bb}(0)\right), & при\ \lambda=0\ (\mathrm{mod}\,\pi),\end{cases} \qquad (8)$$

где C_1 - задано соотношением

$$C_1=\frac{\int_0^1\left[h_a^N(x)\right]^2dx\int_0^1\left[h_b^N(x)\right]^2dx}{\left(\int_0^1 h_a^N(x)h_b^N(x)dx\right)^2},$$

$\lambda\in\Pi$, $a,b=\overline{1,r}$.

Теорема 2. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(x)$ непрерывна в точке $x=\lambda$ и ограничена на П, окна просмотра данных $h_a^N(t)$, $a=\overline{1,r}$, $t\in R$, ограничены единицей и имеют ограниченную постоянной вариацию, то для оценки $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, $a,b=\overline{1,r}$, заданной выражением (2), справедливо соотношение

$$\lim_{N\to\infty} M\,\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)=f_{ab}(\lambda).$$

Построен график оценки спектральной плотности (2), полученной на основании данных о солнечной активности по Вольфу в каждом полугодии с 1749 г. по 1901 г. для окна Фейера.

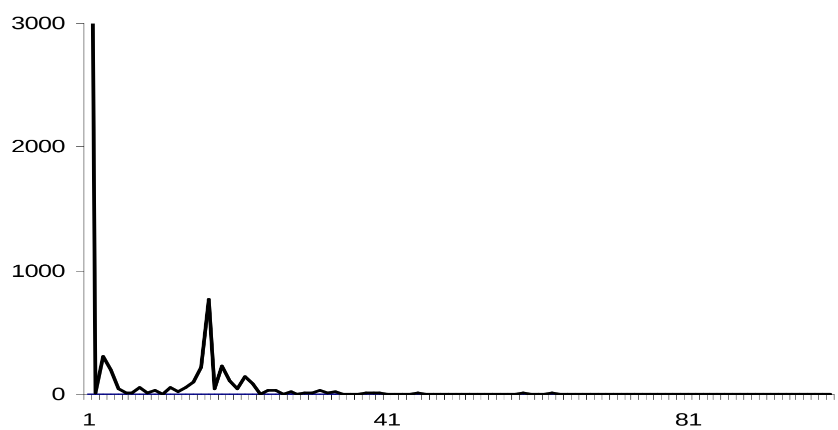

Рисунок 1 – График оценки спектральной плотности (2) для окна Фейера, полученной на основании данных о солнечной активности по Вольфу в каждом полугодии с 1749 г. по 1901 г.

Литература

1. Welch, P. D. The use of FFT for the estimation of power spectra / P. D. Welch // IEEE Trans. Electroacoust. – 1967. – Vol. 15., № 2. – P. 70–73.
2. Бриллинджер, Д. Временные ряды. Обработка данных и теория / Д.Бриллинджер. - М.: Мир, 1980. – 536 с.

УДК 519.95

ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Лапич С.В.
УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест
Научный руководитель: доцент Тузик Т.А.

При решении прикладных задач, в частности задачи анализа входных процессов линейных динамических систем (линейны электрических цепей), возникает необходимость в решении задачи, которая по своей сути сводится к решению ЛДУ.

Требуется решить ЛДУ следующего вида:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \ldots + a_n x = f(t) \qquad (1)$$

При нулевых начальных условиях $x(0) = x'(0) = x''(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0$

Решаем уравнение (1), когда *f(t)=1,* и получаем уравнение следующего вида:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \ldots + a_n x = 1 \qquad (2)$$

при тех же начальных условиях. После преобразования по Лапласу получаем: $A(p)X(p) = F(p)$, для уравнения (1) и $A(p)X_1(p) = \frac{1}{p}$ – для уравнения (2). Преобразовывая данные выражения, получим решение ДУ через интеграл Дюамеля:

$$X(p) = \frac{F(p)}{A(p)}, \qquad X_1(p) = \frac{1}{pA(p)}, \qquad X(p) = pX_1(p)F(p) = \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau;$$

$$x(t) = L^{-1}X(p) = L^{-1}(pX_1(p)F(p)) = \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau \qquad (3)$$

Интеграл Дюамеля позволяет находить решения ЛДУ при нулевых начальных условиях, не находя изображения правой части уравнения (1). Формулу целесообразно использовать, когда производится исследование какой-либо динамической системы, работа которой описывается левой частью уравнения (1). Для неё один раз находим решение уравнения (2) с начальными нулевыми условиями, а затем ищутся решения уравнения (1) при любых *f(t).*

Рассмотрим два примера использования формулы Дюамеля для решения линейных ДУ второго порядка с нулевыми начальными условиями.

Пример 1.

Условие: $x'' - x' = \dfrac{e^{2t}}{2+e^t}$, $\qquad x(0) = x'(0) = 0$.

Решаем ДУ, когда f(t)=1 и начальные условия нулевые:

$x'' - x' = 1$, $\qquad x_1(t) = e^t - t - 1$, $\qquad x_1'(t) = e^t - t$.