Литература

1. Welch, P. D. The use of FFT for the estimation of power spectra / P. D. Welch // IEEE Trans. Electroacoust. – 1967. – Vol. 15., № 2. – P. 70–73.
2. Бриллинджер, Д. Временные ряды. Обработка данных и теория / Д.Бриллинджер. - М.: Мир, 1980. – 536 с.

УДК 519.95

ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Лапич С.В.
УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест
Научный руководитель: доцент Тузик Т.А.

При решении прикладных задач, в частности задачи анализа входных процессов линейных динамических систем (линейны электрических цепей), возникает необходимость в решении задачи, которая по своей сути сводится к решению ЛДУ.

Требуется решить ЛДУ следующего вида:

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+a_2x^{(n-2)}+...+a_nx=f(t) \tag{1}$$

При нулевых начальных условиях $x(0)=x^{'}(0)=x^{''}(0)=...=x^{(n-1)}(0)=0$

Решаем уравнение (1), когда *f(t)=1,* и получаем уравнение следующего вида:

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+a_2x^{(n-2)}+...+a_nx=1 \tag{2}$$

при тех же начальных условиях. После преобразования по Лапласу получаем: $A(p)X(p)=F(p)$, для уравнения (1) и $A(p)X_1(p)=\dfrac{1}{p}$ – для уравнения (2). Преобразовывая данные выражения, получим решение ДУ через интеграл Дюамеля:

$$X(p)=\frac{F(p)}{A(p)},\qquad X_1(p)=\frac{1}{pA(p)},\qquad X(p)=pX_1(p)F(p)=\int_0^t f(\tau)x_1^{'}(t-\tau)d\tau;$$

$$x(t)=L^{-1}X(p)=L^{-1}(pX_1(p)F(p))=\int_0^t f(\tau)x_1^{'}(t-\tau)d\tau \tag{3}$$

Интеграл Дюамеля позволяет находить решения ЛДУ при нулевых начальных условиях, не находя изображения правой части уравнения (1). Формулу целесообразно использовать, когда производится исследование какой-либо динамической системы, работа которой описывается левой частью уравнения (1). Для неё один раз находим решение уравнения (2) с начальными нулевыми условиями, а затем ищутся решения уравнения (1) при любых *f(t).*

Рассмотрим два примера использования формулы Дюамеля для решения линейных ДУ второго порядка с нулевыми начальными условиями.

Пример 1.

Условие: $x''-x'=\dfrac{e^{2t}}{2+e^t}$, $\qquad x(0)=x'(0)=0$.

Решаем ДУ, когда f(t)=1 и начальные условия нулевые:

$x''-x'=1,\qquad x_1(t)=e^t-t-1,\qquad x_1'(t)=e^t-t$.

Тогда решение заданного ДУ получим по формуле (3).

$$x(t)=\int_0^t \frac{e^{2\tau}}{2+e^{\tau}}(e^{t-\tau}-1)\mathrm{d}\tau;$$

$$\int_0^t \frac{e^{2\tau}}{2+e^{\tau}}(e^{t-\tau}-1)\mathrm{d}\tau=\int_0^t \frac{e^{\tau+t}}{2+e^{\tau}}\mathrm{d}\tau-\int_0^t \frac{e^{2\tau}}{e^{\tau}+2}\mathrm{d}\tau=e^t\int_0^t \frac{e^{\tau}}{2+e^{\tau}}\mathrm{d}\tau-\int_0^t \frac{e^{\tau}}{e^{\tau}+2}\mathrm{d}e^{\tau}=e^t\cdot\ln(e^{\tau}+2)\Big|_0^t-$$

$$-(e^{\tau})\Big|_0^t+2\ln(e^{\tau}+2))\Big|_0^t=e^t(\ln(e^t+2)-\ln 3)-(e^t-1)+2\ln(e^t+2)\cdot\ln 3=e^t\ln\frac{e^t+2}{3}-e^t+1+$$

$$+2\ln\frac{e^t+2}{3};$$

$$x(t)=(e^t+2)\ln\frac{e^t+2}{3}-e^t+1.$$

Аналогичным образом решаем задачу Коши для ДУ вида:

$$x''+x'=\frac{1}{2+\cos t},\qquad x(0)=x'(0)=0.$$

Решение. $x''+x'=1,\qquad p^2X(p)+X(p)=\dfrac{1}{p},\qquad X(p)=\dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{1}{p^2+1};$

$$X(p)=\frac{-p}{p^2+1}+\frac{1}{p},\qquad x_1(t)=1-\cos t,\qquad x_1'=\sin t;$$

$$x(t)=\int_0^t \frac{1}{2+\cos\tau}\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau;$$

$$\int_0^t \frac{1}{2+\cos\tau}\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t \frac{\sin t\cos\tau-\cos t\sin\tau}{2+\cos\tau}\mathrm{d}\tau=\sin t\int_0^t \frac{\cos\tau+2-2}{\cos\tau+2}\mathrm{d}\tau-\cos t\int_0^t \frac{\sin\tau}{2+\cos\tau}\mathrm{d}\tau=$$

$$=t\sin t+2\sin t\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{3\cos^2\frac{\tau}{2}+\sin^2\frac{\tau}{2}}+\cos t\cdot\ln(2+\cos\tau)\Big|_0^t;$$

После интегрирования получаем обычное решение исходной задачи.

$$x(t)=t\sin t-\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}+\cos t\cdot\frac{\ln(2+\cos t)}{3}.$$

Расчет переходных процессов с использованием интеграла Дюамеля

Зная реакцию цепи на единичное возмущающее воздействие, т.е. функцию переходной проводимости *g(t)* или (и) переходную функцию по напряжению *h(t)*, можно найти реакцию цепи на воздействие произвольной формы. В основе метода – метода расчета с помощью интеграла Дюамеля – лежит принцип наложения.

При использовании интеграла Дюамеля для разделения переменной, по которой производится интегрирование, и переменной, определяющей момент времени, в который определяется ток в цепи, первую принято обозначать как т, а вторую - как *t*.

Пусть в момент времени *t=0* к цепи с нулевыми начальными условиями (пассивному двухполюснику **ПД** на рис. 1) подключается источник с напряжением $u(\tau)$ произвольной формы. Для нахождения тока *i* в цепи заменим исходную кривую ступенчатой (см. рис. 2), после чего с учетом, что цепь линейна, просуммируем токи от начального скачка напряжения *u(0)* и всех ступенек напряжения до момента *t*, вступающих в действие с запаздыванием по времени.

В момент времени t составляющая общего тока, определяемая начальным скачком напряжения *u(0)*, равна *u(0)g(t)*.

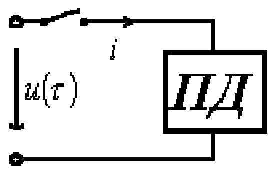

Рисунок 1

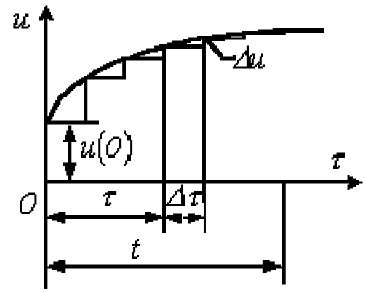

Рисунок 2

В момент времени $\tau + \Delta\tau$ имеет место скачок напряжения $\Delta u \approx u'(\tau)\Delta\tau$, который с учетом временного интервала от начала скачка до интересующего момента времени t обусловит составляющую тока $u'(\tau)g(t-\tau-\Delta\tau)\Delta\tau$.

Полный ток $i(t)$ в момент времени t равен, очевидно, сумме всех составляющих тока от отдельных скачков напряжения с учетом $u(0)g(t)$, т.е.

$$i(t) = u(0)g(t) + \sum u'(\tau)g(t-\tau-\Delta\tau)\Delta\tau.$$

Переходя к пределу, когда $\Delta\tau$ стремиться к 0, получим, что полный ток, рассчитываемый с помощью интеграла Дюамеля, равен:

$$i(t)=u(0)g(t)+\int_0^t u'(\tau)g(t-\tau)d\tau \qquad (4)$$

Следует отметить, что с использованием интеграла Дюамеля можно определять также напряжение. При этом в формуле (4) вместо переходной проводимости $g(t)$ будет входить переходная функция по напряжению.

Пример. Пусть известна переходная проводимость g(t), равная $\frac{1}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$, при напряжении цепи $u(t)=1000e^{-5t}$ В, сопротивлении R=10 Ом и индукции L=1 Гн. Рассчитаем значение тока в любой момент времени t.

Решение.

В данном случае:

1. $g(t)=0{,}1(1-e^{-10t})$;
2. $g(t-\tau)=0{,}1(1-e^{-10t}e^{10\tau})$;
3. $u'(\tau)=-5000e^{-5\tau}$;
4. $i(t)=u(0)g(t)+\int_0^t u'(\tau)g(t-\tau)d\tau$

$$i(t)=100(1-e^{-10t})-500\int_0^t e^{-5\tau}d\tau+500e^{-10t}\int_0^t e^{5\tau}d\tau;$$

После интегрирвания получаем решение исходной задачи:

$$i(t)=200\ (e^{-5t}-e^{-10t})A.$$

Литература

1. Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренко – М.: Наука, 1981.

2. Пантелеев, А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова – М.: Высш. шк., 2001.