УДК 519.6+517.983.54

# РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВУХШАГОВЫМ ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

***Лялюк Ю.В.***
*УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест*
*Научный руководитель – Матысик О.В., канд. физ.-мат. наук, доцент*

Поскольку некорректные задачи постоянно возникают в многочисленных приложениях математики, то проблема их решения и разработка методов их решения является актуальной. В работе предлагается двухшаговый метод итерации решения некорректных задач. Цель исследования – доказать сходимость метода и получить оценки погрешности в исходной норме гильбертова пространства. Методологической основой исследования является общая теория некорректных задач, элементы функционального и математического анализа, вычислительной математики.

В гильбертовом пространстве *H* решается уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где $A$ – ограниченный положительный и самосопряжённый оператор, в предположении, что нуль принадлежит спектру оператора $A$, но не является его собственным значением. Тогда задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) существует, то будем искать его с помощью явного двухшагового итерационного метода

$$x_n = 2(E - \alpha A)x_{n-1} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2} + \alpha^2 Ay,\ x_0 = x_1 = 0. \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения (1) известна с некоторой точностью $\delta$, т.е. известно $y_\delta$ такое, что $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Тогда метод (2) примет вид

$$x_{n,\delta} = 2(E - \alpha A)x_{n-1,\delta} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 Ay_\delta,\ x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \tag{3}$$

Для методов (2) и (3) справедливы теоремы.

**Теорема 1.** *Итерационный метод* (2) *при условии* $0 < \alpha < \dfrac{2}{\|A\|}$ *сходится в исходной норме гильбертова пространства*.

**Теорема 2**. *Метод* (3) *сходится в исходной норме гильбертова пространства при условии* $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|}$, *если число итераций* $n$ *выбирать в зависимости от* $\delta$ *так, чтобы* $n\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0.$

**Теорема 3.** *При условии* $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|}$ *и* $x = A^s z, s > 0$ *для итерационного двухшагового метода* (3) *справедлива оценка погрешности*

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s (s+2)[(n-1)\alpha e]^{-s}\|z\| + \left(\frac{5}{4}\right)(n-1)\delta\alpha.$$

**Теорема 4.** *Оптимальная по* $n$ *оценка погрешности для метода* (3) *имеет вид*

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{оïò}} \le \left(\frac{5}{4}\right)^{s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} e^{-s/(s+1)} (s+1)(s+2)^{1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \tag{4}$$

*и получается при*

$$n_{\text{оïò}} = 1 + \left(\frac{5}{4}\delta\right)^{-1/(s+1)} e^{-s/(s+1)} s(s+2)^{1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \alpha^{-1}. \tag{5}$$

**Замечание 1.** *Оптимальная по* $n$ *оценка погрешности* (4) *имеет порядок* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$, *и он оптимален в классе задач с истокообразно представимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0$ [1].

**Замечание 2.** *Оптимальная оценка погрешности не зависит от* $\alpha$**,** *но от итерационного параметра* $\alpha$ *зависит* $n_{опт}$ (5)*, и, значит, объём вычислительной работы. Для его уменьшения следует выбирать* $\alpha$ *из условия* $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$ *и так, чтобы* $n_{опт}$ *было целым*.

Предложенный метод может быть успешно применён для решения некорректных задач, встречающихся в спектроскопии, акустике, синтезе антенн, математической обработке данных эксперимента, теплопроводности.

**Литература**

1. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. Наука, 1986. – 178 с.

УДК 519.24

## ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СОСТОЯТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

***Марчук А.Ю.***

*УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест*

*Научный руководитель - Мирская Е.И., кандидат физ.-мат. наук, доцент*

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс $X(t) = \{X_a(t), a = \overline{1,r}\}$, $t \in Z$, с $MX(t) = 0$, неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$, $a, b = \overline{1,r}$.

Пусть $X_a(0), X_a(1), ..., X_a(T-1)$ - $T$ последовательных наблюдений, полученных через равные промежутки времени, за составляющей $X_a(t)$ процесса $X(t)$, $t \in Z$, $a = \overline{1,r}$.

Предполагаем, что число наблюдений $T$ представимо в виде $T = LN - (L-1)K$, где $L$ - число пересекающихся интервалов, содержащих по $N$ наблюдений, а $K$ принимает целочисленные значения, $0 \le K \le N$.

Используя методику Бриллинджера Д. [2], в качестве оценки взаимной спектральной плотности исследована статистика вида

$$\tilde{f}_{ab}(\lambda) = \frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^{T} W_{ab}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) \hat{f}_{ab}\left(\frac{2\pi s}{T}\right), \tag{1}$$