и получается при

$$n_{\text{оïò}} = 1+\left(\frac{5}{4}\delta\right)^{-1/(s+1)} e^{-s/(s+1)} s(s+2)^{1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \alpha^{-1}. \tag{5}$$

Замечание 1. *Оптимальная по* n *оценка погрешности* (4) *имеет порядок* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$, *и он оптимален в классе задач с истокообразно представимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0$ [1].

Замечание 2. *Оптимальная оценка погрешности не зависит от* α, *но от итерационного параметра* α *зависит* $n_{опт}$ (5)*, и, значит, объём вычислительной работы. Для его уменьшения следует выбирать* α *из условия* $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$ *и так, чтобы* $n_{опт}$ *было целым*.

Предложенный метод может быть успешно применён для решения некорректных задач, встречающихся в спектроскопии, акустике, синтезе антенн, математической обработке данных эксперимента, теплопроводности.

Литература

1. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. Наука, 1986. – 178 с.

УДК 519.24

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СОСТОЯТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Марчук А.Ю.

УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест

Научный руководитель - Мирская Е.И., кандидат физ.-мат. наук, доцент

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс $X(t)=\{X_a(t), a=\overline{1,r}\}$, $t\in Z$, с $MX(t)=0$, неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda\in \Pi=[-\pi,\pi]$, $a,b=\overline{1,r}$.

Пусть $X_a(0), X_a(1),\dots, X_a(T-1)$ - T последовательных наблюдений, полученных через равные промежутки времени, за составляющей $X_a(t)$ процесса $X(t)$, $t\in Z$, $a=\overline{1,r}$.

Предполагаем, что число наблюдений T представимо в виде $T = LN-(L-1)K$, где L - число пересекающихся интервалов, содержащих по N наблюдений, а K принимает целочисленные значения, $0\le K\le N$.

Используя методику Бриллинджера Д. [2], в качестве оценки взаимной спектральной плотности исследована статистика вида

$$\tilde{f}_{ab}(\lambda)=\frac{2\pi}{T}\sum_{s=1}^{T} W_{ab}\left(\lambda-\frac{2\pi s}{T}\right)\hat{f}_{ab}\left(\frac{2\pi s}{T}\right), \tag{1}$$

где $W_{ab}(x),\ x\in R,\ a,b=\overline{1,r}$ - спектральное окно, а $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda),\ \lambda\in \Pi=[-\pi,\pi]$ - оценка взаимной спектральной плотности процесса $X(t),\ t\in Z$, построенная по методу Уэлча [1]

$$\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)=\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} I_{ab}(\lambda,l), \tag{2}$$

где

$$I_{ab}(\lambda,l)=\frac{1}{2\pi\sum_{p=0}^{N-1} h_a^N(p)h_b^N(p)} H_a(\lambda,l)\overline{H_b(\lambda,l)}, \tag{3}$$

$l=\overline{1,L},\ a,b=\overline{1,r},\ \lambda\in \Pi$, модифицированная периодограмма на l-ом интервале разбиения, а $H_a(\lambda,l)$ задано выражением

$$H_a(\lambda,l)=\sum_{t=0}^{N-1} h_a^N(t)X_a(t+(l-1)(N-K))e^{-i\lambda(t+(l-1)(N-K))}, \tag{4}$$

$l=\overline{1,L},\ a=\overline{1,r},\ \lambda\in \Pi$, причем наблюдения сглаживаются одним и тем же окном просмотра данных $h_a^N(t),\ t\in Z.$

В работе [1] исследована оценка (2) для гауссовских процессов. В данной работе оценки (1), (2) исследованы для произвольных случайных процессов.

Предположение 1. Пусть окна просмотра данных $h_a^N(t),\ a=\overline{1,r},\ t\in Z,$ ограничены единицей и имеют ограниченную постоянной вариацию.

Предположение 2. Пусть $W_{ab}(x)$ непрерывная, периодическая функция с периодом 2π, имеет ограниченную вариацию и является ядром.

Теорема 1. Если взаимная спектральная плотность $f_{ab}(x)$ непрерывна в точке $x=\lambda$ и ограничена на Π, окна просмотра данных $h_a^N(t),\ t\in R,\ a=\overline{1,r}$ удовлетворяют предположению 1, а спектральные окна предположению 2, то для оценки $\tilde{f}_{ab}(\lambda),\ \lambda\in \Pi$, заданной выражением (1), справедливо соотношение

$$\lim_{T\to\infty} M\tilde{f}_{ab}(\lambda)=f_{ab}(\lambda), \tag{5}$$

$\lambda\in \Pi,\ a,b=\overline{1,r}.$

Доказательство. Используя свойства математического ожидания и функции $\Phi_{ab}(x)$, $x\in \Pi,\ a,b=\overline{1,r}$ вида

$$\Phi_{ab}(x)=[2\pi\sum_{t=0}^{N-1} h_a^N(t)h_b^N(t)]^{-1}\varphi_a(x)\overline{\varphi_b(x)},$$

где

$$\varphi_a(x)=\sum_{t=0}^{N-1} h_a^N(t)e^{itx},$$

запишем

$$I=\left|M\tilde{f}_{ab}(\lambda)-f_{ab}(\lambda)\right|=\left|\frac{2\pi}{T}\sum_{s=1}^{T} W_{ab}(\lambda-\frac{2\pi s}{T})M\hat{f}_{ab}(\frac{2\pi s}{T})-f_{ab}(\lambda)\right|=$$

$$=\left|\int_{\Pi} f_{ab}(x)\frac{2\pi}{T}\sum_{s=1}^{T} W_{ab}(\lambda-\frac{2\pi s}{T})\Phi_{ab}(x-\frac{2\pi s}{T})dx-f_{ab}(\lambda)\right|.$$

Откуда, учитывая лемму Д5.1 работы [2], получим

$$I = \left| \iint_{\Pi^2} W_{ab}(\lambda - v)\Phi_{ab}(x - v)\, f_{ab}(x)dxdv + O(\frac{1}{T}) - f_{ab}(\lambda) \right|.$$

Сделаем замену переменных $y = \lambda - v,\ x = x,$ тогда,

$$I = \left| \iint_{\Pi^2} W_{ab}(y)\Phi_{ab}(x + y - \lambda)\, f_{ab}(x)dxdy - f_{ab}(\lambda) + O(\frac{1}{T}) \right|.$$

Сделаем замену переменных $z = x - \lambda,\ y = y$, получим

$$I = \left| \iint_{\Pi^2} W_{ab}(y)\Phi_{ab}(z + y)\, f_{ab}(z + \lambda)dzdy - f_{ab}(\lambda) + O(\frac{1}{T}) \right|.$$

Известно, что свертка двух ядер является ядром, следовательно

$$V_{ab}(z) = \int_{\Pi} W_{ab}(y)\Phi_{ab}(z + y)dy \text{ -}$$

ядро. Тогда

$$I = \left| \int_{\Pi} V_{ab}(z)\, f_{ab}(z + \lambda)dz - f_{ab}(\lambda) + O(\frac{1}{T}) \right| \le$$

$$\le \int_{\Pi} |V_{ab}(z)| \left| f_{ab}(z + \lambda) - f_{ab}(\lambda) \right| dz + O(\frac{1}{T}).$$

Так как взаимная спектральная плотность $f_{ab}(z)$ непрерывна в точке $z = \lambda$ и ограничена на Π, а $V_{ab}(z)$ является ядром, получим требуемый результат. Теорема доказана.

Таким образом, показано, что оценка взаимной спектральной плотности $\widetilde{f}_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, $a,b = \overline{1,r}$, заданная соотношением (1), является асимптотически несмещенной оценкой взаимной спектральной плотности процесса.

Построен график оценки спектральной плотности (2), полученной на основании данных температуры воздуха в г. Бресте за период с октября 2008 по февраль 2009 года для окон Дирихле, Фейера и Рисса.

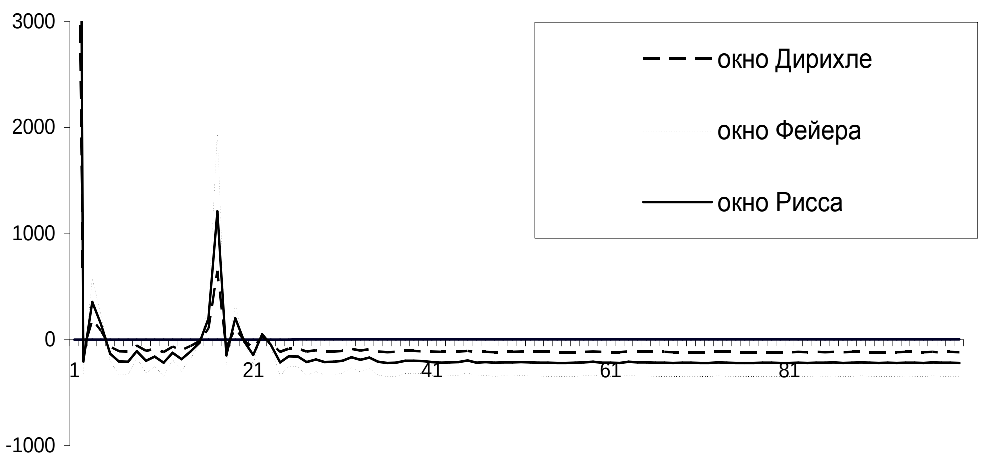

Рисунок 1 – Графики оценки спектральной плотности (1) для окон Дирихле, Фейера и Рисса

Литература

1. Welch, P.D. The use of FFT for the estimation of power spectra / P.D. Welch // IEEE Trans. Electroacoust. – 1967. – Vol. 15, №2. – P.70-73.

2. Бриллинджер, Д. Временные ряды. Обработка данных и теория / Д.Бриллинджер. – М.: Мир, 1980. – 536 с.