*в) если, кроме того,* $\varepsilon(\delta,\beta)\to 0,\ \delta,\beta\to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta)\ge d\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta^p\right)$, *где* $d>1,\ p\in(0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m-x\|=0$.

Для иллюстрации скоростных качеств метода (1) в гильбертовом пространстве $L_2(0,1)$ решаем модельную задачу в виде уравнения:

$$\int_0^1 K(t,s)x(s)ds=y(t)\,,\ t\in[0,1]$$

с симметричным положительным ядром $K(t,s)=\dfrac{1}{1+100(t-s)^2}$.

В качестве точного решения сформулированной задачи выберем функцию

$$x(s)=\begin{cases} s, & 0\le s<0.5,\\ 1-s, & 0.5\le s\le 1.\end{cases}$$

Данная задача решалась методом (1) и хорошо известным в научной литературе методом простой итерации

$$x_{n+1,\delta}=x_{n,\delta}+\alpha\left(y_\delta-Ax_{n,\delta}\right),\quad x_{0,\delta}=0\,. \tag{3}$$

Здесь воспользовались правилом останова (2), выбрав уровень останова $\varepsilon=1{,}5\delta$. Итак, при $\delta=10^{-3}$, $\varepsilon=1{,}5\cdot10^{-3}$ для достижения оптимальной точности при счёте методом итераций (1) потребовалось 10 итераций, при счете методом простой итерации (3) – 21 итерация. При $\delta=10^{-4}$, $\varepsilon=1{,}5\cdot10^{-4}$ соответственно потребовалось 17 и 48 итераций. Пример счёта показал, что для достижения оптимальной точности метод итераций (1) требует примерно в 2,5 раза меньше итераций, чем метод простой итерации (3).

УДК 519.6 + 517.983.54

## К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ ЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

***Наумовец С.Н.***
*УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест*
*Научный руководитель – Матысик О. В., канд. физ.-мат. наук, доцент*

Пусть в гильбертовом пространстве *H* требуется решить уравнение

$$Ax=y \tag{1}$$

где $A$ – ограниченный, самосопряженный, положительный оператор $A:H\to H$, для которого нуль не является собственным значением. Причем $0\in S_{A}$, т. е. задача некорректна. Предполагается существование единственного решения *x* при точной правой части *y*. Для его отыскания предлагается итерационный метод

$$x_{n+1}=(E-\alpha A)^2x_n+2\alpha y-\alpha^2Ay,\quad x_0=0. \tag{2}$$

Правую часть уравнения (1), как это обычно бывает на практике, считаем известной приближённо, т.е. вместо *y* известно $\delta$– приближение $y_\delta,\ \|y-y_\delta\|\le\delta$. Тогда итерационный процесс (2) запишется в виде

$$x_{n+1,\delta}=(E-\alpha A)^2x_{n,\delta}+2\alpha y_\delta-\alpha^2Ay_\delta,\quad x_{0,\delta}=0. \tag{3}$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению *x* уравнения (1) при подходящем выборе *n* и достаточно малых $\delta$. Иными словами, метод итераций (3) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_{n}\left\|x - x_{n,\delta}\right\|\right) = 0$.

В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения ($x = A^s z,\ s > 0$), затруднительно получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова. И, тем не менее, метод итераций (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться энергетической нормой гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. Покажем сходимость метода (3) в энергетической норме к решению (1) и получим для него априорные оценки погрешности в энергетической норме.

Рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. Запишем первое слагаемое в виде $x - x_n = A^{-1}(E - \alpha A)^{2n} y = (E - \alpha A)^{2n} x$.

Нетрудно показать, что $x - x_n \to 0$ в исходной норме гильбертова пространства *H* при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для её оценки необходимо предположить, что $x = A^s z,\ s > 0$. При использовании энергетической нормы нам это предположение не понадобится. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора $A = \int\limits_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и $E_\lambda$ – соответствующая спектральная функция, имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = \left(A(E - \alpha A)^{2n} x, (E - \alpha A)^{2n} x\right) = \int\limits_0^M \lambda\,(1 - \alpha\lambda)^{4n}\, d(E_\lambda x, x),$$

$$\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A^2 = \int\limits_0^M \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{2n}\right]^2 d\left(E_\lambda (y - y_\delta), y - y_\delta\right).$$

Оценив подынтегральные функции, получим при условии $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$ оценку погрешности для итерационного метода (3) в энергетической норме

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \le (4n\alpha \mathrm{e})^{-1/2}\|x\| + \left(\frac{35}{27} n\alpha\right)^{1/2} \delta,\ n \ge 1. \tag{4}$$

Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокопредставимости порядка $s = \dfrac{1}{2}$ для точного решения. Более того, для сходимости $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \to 0,\, n \to \infty$, достаточно, чтобы $\sqrt{n}\delta \to 0,\, n \to \infty,\, \delta \to 0$.

Оптимизируем оценку (4) по *n*. Для этого при заданном $\delta$ найдём такое значение числа итераций *n* , при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по *n* от правой части неравенства (4), получим $n_{\text{оïò}} = (35/27)^{-1/2}(2\alpha)^{-1} e^{-1/2} \delta^{-1}\|x\|$. Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (4), найдём её оптимальное значение

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^{\text{оïò}} \le (35/27)^{1/4}\left(2\delta\|x\|\right)^{1/2} e^{-1/4}. \tag{5}$$

**Замечание**. *Из неравенства* (5) *вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра* $\alpha$. *Но* $n_{опт}$ *зависит от* $\alpha$ *и, поэтому для уменьшения n и, значит, объема вычислительной работы следует брать* $\alpha$ *возможно большим, удовлетворяющим условию* $0<\alpha\le\dfrac{5}{4M}$, *и так, чтобы* $n_{опт}$ *было целым.*

УДК 517.512.2

## АНАЛОГ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

***Онищук А.И.***
*УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест*

В работе [1] указаны условия существования и единственности решения аналога задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y^{(\alpha)}=f(x,y), \tag{1}$$

где $0<\alpha<1$, найдена оценка приближения решения уравнения (1) решением специально построенного, с помощью линейных методов суммирования интегралов Фурье, операторного уравнения типа Абеля-Гаммерштейна.

Пусть $\Pi$ параллелепипед в $\mathbf{R}^4$ вида:

$$\Pi:=\left\{(x,y^{(0)},y^{(1)},y^{(2)})\in\mathbf{R}^4 \mid 0\le x\le l,\ y_0^{(j)}-h_j\le y^{(j)}\le y_0^{(j)}+h_j,\ j=\overline{0,2}\right\},$$

где $l,h_j\in\mathbf{R}_+(j=\overline{0,2})$, $f:\Pi\mapsto\mathbf{R}$ заданная, абсолютно интегрируемая по параллелепипеду $\Pi$ функция.

Через $L_f^{(2)}(0;l)$ обозначим класс дважды дифференцируемых на отрезке $[0;l]$ функций $y=y(x)$ с абсолютно непрерывной производной $y''$, и таких, что функция $f(x,y(x),y'(x),y''(x),,y'''(x))$ абсолютно непрерывна на отрезке [*0, l*]. Нетрудно видеть, что при задании нормы формулой

$$\|y\|:=\sum_{j=0}^{3}\int_0^l\left|y^{(j)}(x)\right|dx,$$

$L_f^{(2)}(0;l)$ является банаховым пространством.

Рассмотрим задачу нахождения функции $y=y(x)$ класса $L_f^{(2)}(0;l)$, удовлетворяющей нелинейному дифференциальному уравнению, с дробной старшей производной

$$y^{(\alpha)}=f(x,y,y',y'',y'''),\ 2<\alpha<3, \tag{2}$$

и начальным условиям

$$y^{(\alpha-1)}(0)=0,\ y^{(\alpha-2)}(0)=0,\ y^{(\alpha-2)}(0)=0. \tag{3}$$

**Теорема.** Пусть функция $f:\Pi\mapsto\mathbf{R}$ абсолютно интегрируема на параллелепипеде $\Pi$ и существует $A>0$, что для любых двух точек $M_1(x,y_1^{(0)},y_1^{(1)},y_1^{(2)},y_1^{(3)})$ и $M_2(x,y_2^{(0)},y_2^{(1)},y_2^{(2)},y_2^{(3)})$ из $\Pi$ выполняется неравенство

$$\left|f(M_1)-f(M_2)\right|\le A\sum_{j=0}^{3}\left|y_1^{(j)}-y_2^{(j)}\right|.$$