Коэффициенты $p(z)$ и $q(z)$ вида (2) уравнения (3) примут вид

$$p(z)=\frac{z^4+z^3+105z^2-100z+24}{z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)},$$
$$q(z)=\frac{-z^8+z^7+145z^6-200z^5+96z^4}{z^2(z-1)^2(z-2)^2(z-3)^2(z-4)^2}. \tag{7}$$

Зная коэффициенты (7) уравнения Риккати (3) и его частное решение (6) легко найти его общее решение. Тогда, согласно работе [4], найдем общее решение уравнения (1), (2) в виде

$$y=C_1\frac{e^{\frac{1}{2}\int b(z)dz}}{e^{\int b(z)dz}}(C_1-\int e^{\int b(z)dz}C_2e^{-\int b(z)dz}dz) \tag{8}$$

где $C_1, C_2 -$ произвольные постоянные.

Для приведенного примера величина $\int b(z)dz$ в соотношении (8) равна

$$\int\frac{2z^3}{z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}dz=\frac{64}{3}\ln(z-4)-27\ln(z-3)+8\ln(z-2)-\frac{1}{3}\ln(z-1).$$

**Литература**

1. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев – СПб: Изд-во «Лань», 2003.

2. Славянов, С.Ю. Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей / С.Ю. Славянов, В. Лай – СПб.: Невский Диалект, 2002. – 312 с.

3. Уиттекер, Э.Т.Курс современного анализа / Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон – М.: Физматгиз, 1963. – Ч.1. – 344 с.

4. Лукашевич, Н.А. Об интегрируемости в квадратурах линейных дифференциальных уравнений второго порядка / Н.А. Лукашевич, А.В. Чичурин // Веснік Брэсцкага ун-та. – 2006.– № 2 (26). – С. 11 - 15.

УДК 517.988.6

## О ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДАХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

***Стрилец Н.Н.***

*УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест*

В работе [1] для решения уравнения

$$f(x)=0,\ \ f:D\subset X\to X,\ \ X-B\text{-пространство}$$

предложен двухпараметрический квазиньютоновский итерационный метод, сходящийся со сверхлинейной (локально квадратичной) скоростью.

Приведем алгоритм реализации метода, который отличается от метода в [1] лишь некоторыми деталями при вычислении шаговой длины.

На нулевой итерации задан начальный набор параметров $(x_0,\beta_0,\gamma_0)$, где $\beta_0\in[10^{-4},1],\ \gamma_0=\beta_0^2$.

На $n$-ой итерации $(n=1,2,\dots)$ уже имеется набор параметров $(x_{n-1},\beta_{n-1},\gamma_{n-1})$, а очередной набор $(x_n,\beta_n,\gamma_n)$ вычисляется в результате поэтапного выполнения следующей последовательности действий.

Этап 1. Находится поправка из линейного уравнения

$$f'(x_{n-1})\Delta x_{n-1}=-f(x_{n-1}), \tag{1}$$

где $f'(x_n)$ — производная Фреше оператора $f$.

Этап 2. Следующее приближение вычисляется по формуле:

$$x_n:=x_{n-1}+\beta_{n-1}\Delta x_{n-1}. \tag{2}$$

Этап 3. Если $\|f(x_n)\|<\varepsilon$, где $\varepsilon$ — точность, то выход из итерационного процесса, иначе переход к следующему шагу.

Этап 4. Определяется новая шаговая длина: если $\beta_{n-1}=1$, то $\beta_n:=1$, иначе

$$\beta_n:=\min\left(1,\frac{\gamma_{n-1}\|f(x_{n-1})\|}{\beta_{n-1}\|f(x_n)\|}\right),\ \gamma_n:=\frac{\gamma_{n-1}\|f(x_{n-1})\|}{\|f(x_n)\|} \tag{3}$$

и осуществляется переход к следующей итерации.

Квазиньютоновский итерационный метод, алгоритм реализации которого описывается этапами 1–4, обозначим как процесс (1)–(3).

Сходимость итерационного процесса (1)–(3) при различных ограничениях на гладкость оператора $f$ доказывается практически аналогично доказательствам соответствующих результатов из работы [2], в которой рассматривается так называемый полностью регуляризованный вариант данного процесса.

Процесс (1)–(3) допускает альтернативное представление. Для этого введем следующую формулу пересчета шаговой длины:

$$\beta_n=\begin{cases}\min\left(1,\dfrac{\|f(x_0)\|}{\|f(x_n)\|}\beta_0\right), & n=1,\\[2ex] \min\left(1,\dfrac{\|f(x_{n-1})\|}{\|f(x_n)\|}\beta_{n-2}\right), & n=2,3,\dots\end{cases} \tag{4}$$

Итерационный процесс, который получается из процесса (1)–(3) заменой формулы (3) на формулу (4), обозначим как процесс (1),(2),(4).

**Теорема 1.** Итерационные процессы (1)–(3) и (1),(2),(4) при одинаковых начальных параметрах $(x_0,\beta_0)$ эквивалентны (т.е. генерируют одну и ту же последовательность приближений $\{x_n\}$).

**Доказательство.** Рассмотрим итерационный процесс (1)–(3). Очевидно, что найдутся $n$ такие, что $\beta_n<1$. Для них из (3) последовательно получим соотношения

$$\beta_0, \qquad \gamma_0=\beta_0^2,$$

$$\beta_1=\frac{\beta_0\|f(x_0)\|}{\|f(x_1)\|}, \qquad \gamma_1=\frac{\gamma_0\|f(x_0)\|}{\|f(x_1)\|}=\beta_0\frac{\beta_0\|f(x_0)\|}{\|f(x_1)\|}=\beta_1\beta_0,$$

$$\beta_2=\frac{\gamma_1\|f(x_1)\|}{\beta_1\|f(x_2)\|}=\frac{\beta_0\|f(x_1)\|}{\|f(x_2)\|}, \quad \gamma_2=\frac{\gamma_1\|f(x_1)\|}{\|f(x_2)\|}=\beta_1\beta_0\frac{\beta_2}{\beta_0}=\beta_2\beta_1.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Учитывая полученные соотношения для $\beta_n$, индуктивным путем придем (4). В результате, мы получили итерационный процесс (1),(2),(4).

Докажем теперь обратный переход. Рассмотрим процесс (1),(2),(4). Очевидно, что найдутся $n$ такие, что $\beta_n < 1$. Для них из (4) будем иметь

$$\beta_n = \frac{\|f(x_{n-1})\|}{\|f(x_n)\|}\beta_{n-2} = \frac{\beta_{n-1}\beta_{n-2}\|f(x_{n-1})\|}{\beta_{n-1}\|f(x_n)\|} = \frac{\gamma_{n-1}\|f(x_{n-1})\|}{\beta_{n-1}\|f(x_n)\|}, \tag{5}$$

где $\gamma_{n-1} = \beta_{n-1}\beta_{n-2}$.

Тогда с учетом последних двух соотношений получим:

$$\gamma_n = \beta_n\beta_{n-1} = \frac{\|f(x_{n-1})\|}{\|f(x_n)\|}\beta_{n-1}\beta_{n-2} = \frac{\gamma_{n-1}\|f(x_{n-1})\|}{\|f(x_n)\|}. \tag{6}$$

Объединяя (5) и (6) и полагая $\gamma_0 = \beta_0^2$, получим (3). Таким образом, мы пришли к процессу (1)–(3). **Теорема доказана.**

Модифицируем формулу (3):

$$\beta_n := \min\left(1, \frac{\gamma_{n-1}}{\beta_{n-1}\|f(x_n)\|}\right), \quad \gamma_n := \frac{\gamma_{n-1}\|f(x_{n-1})\|}{\|f(x_n)\|}, \tag{7}$$

где $\gamma_0 = \beta_0^2\|f(x_0)\|$.

Итерационный процесс, который получается из процесса (1)–(3) заменой формулы (3) на (7), обозначим как процесс (1),(2),(7).

Этот процесс также допускает альтернативное представление. Для этого введем формулу пересчета шаговой длины:

$$\beta_n = \begin{cases} \min\left(1, \dfrac{\|f(x_0)\|}{\|f(x_n)\|}\beta_0\right), & n = 1, \\ \min\left(1, \dfrac{\|f(x_{n-2})\|}{\|f(x_n)\|}\beta_{n-2}\right), & n = 2,3,\ldots \end{cases} \tag{8}$$

Итерационный процесс, который получается из процесса (1)–(3) заменой формулы (3) на формулу (8), обозначим как процесс (1),(2),(8).

Сходимость итерационного процесса (2),(3),(9) при различных ограничениях на гладкость оператора $f$ можно доказать точно так же, как и для процесса (1)–(3). Справедлива

**Теорема 2.** Итерационные процессы (1),(2),(7) и (1),(2),(8) при одинаковых начальных параметрах ($x_0, \beta_0$) эквивалентны (т.е. генерируют одну и ту же последовательность приближений $\{x_n\}$).

На базе (4) и (8) построим следующие формулы пересчета шаговой длины:

$$\beta_n = \begin{cases} \min\left(1, \dfrac{\|f(x_0)\|}{\|f(x_n)\|}\beta_0\right), & n = 1, \\ \min\left(1, \dfrac{\lambda\|f(x_{n-2})\| + (1-\lambda)\|f(x_{n-1})\|}{\|f(x_n)\|}\beta_{n-2}\right), & n = 2,3,\ldots \end{cases} \tag{9}$$

$$\beta_n = \begin{cases} \min\left(1, \dfrac{\|f(x_0)\|}{\|f(x_n)\|}\beta_0\right), & n=1, \\ \min\left(1, \dfrac{\|f(x_{n-2})\|^{\lambda} \cdot \|f(x_{n-1})\|^{1-\lambda}}{\|f(x_n)\|}\beta_{n-2}\right), & n=2,3,\dots \end{cases} \quad (10)$$

Итерационные процессы, которые получается из процесса (1)–(3) заменой формулы (3) на формулы (9) и (10), обозначим как процессы (1),(2),(9) и (1),(2),(10) соответственно.

Формулы (9) и (10) при надлежащем выборе параметра $\lambda$ позволяют смягчить резкие колебания норм невязок каждого из процессов. В то же время необходимо задавать $\lambda$ таким образом, чтобы вклад каждого из значений $\|f(x_{n-2})\|/\|f(x_n)\|$ и $\|f(x_{n-1})\|/\|f(x_n)\|$ в сумму (произведение) был пропорционален их величине. Это позволит предотвратить необоснованное замедление процесса. Очевидным выбором является следующий способ просчета $\lambda$:

$$\lambda = \frac{\|f(x_{n-2})\|}{\|f(x_{n-2})\| + \|f(x_{n-1})\|}$$

Сходимость итерационных процессов (1),(2),(9) и (1),(2),(10) при различных ограничениях на гладкость оператора $f$ доказывается совершенно аналогично сходимости процессов (1),(2),(9) и (1),(2),(10).

В качестве тестовых задач были взяты одномерное уравнение

$$arctg 10x = 0$$

и комбинированная система из [3]

$$\begin{cases} x_i + \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = n+1, \ i = \overline{1, n-3}, \\ x_1 x_2 \dots x_{n-3} x_{n-2} x_{n-1} x_n = 1, \\ \sin^2 x_1 + \cos^3 x_n = \sin^2 1 + \cos^3 1, \\ arctg x_1 + arctg x_n = 2 arctg 1. \end{cases}$$

Результаты численных экспериментов говорят о том, что пересчет шаговой длины по формулам (10) и (11) позволяет ощутимо повысить процент сходимости соответствующего численного метода.

**Литература**

1. Мадорский, В.М. Об эффективных методах получения приближенных решений нелинейных дифференциальных задач / В.М. Мадорский, Н.Н. Стрилец // Труды Института математики. – 2004. – Т. 12, №2. – С. 130–132.

2. Стрилец, Н.Н. Об одном полностью регуляризованном нелокальном квазиньютоновском методе решения нелинейных задач / Н.Н. Стрилец // Известия Нац. академии наук Беларуси. Сер. физ.-матем. наук. – 2008. – №1. – С. 16–22.

3. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест, 2005.