Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} = 1$ иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\|f(x_n)\|\gamma_n}{\|f(x_{n+1})\|\beta_n}\right), \gamma_{n+1} = \frac{\|f(x_n)\|\gamma_n\beta_{n+1}}{\|f(x_{n+1})\|\beta_n}, n = 0,1,2,..., \gamma_0 = \beta_0^2$$

и осуществляется переход на шаг 1.

При тех же входных данных для всех трёх задач в таблице приведены средние арифметические невязок.

	Количество узлов		
N запуска	n=10	n=15	n=20
1	5,18939919947691E-17	6,29312212895089E-17	3,43767148499694E-17
2	3,56378524417662E-17	1,74632476698947E-16	1,80382886098853E-19
3	2,43007726719648E-18	2,43555942616395E-15	2,4967436032531E-18
4	2,43742222095381E-18	2,47662248315181E-15	2,55625438697336E-18

Аппроксамация полиномами Чебышева I рода весьма эффективна даже при малом количестве членов отрезка ряда Фурье.

Литература

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы решения нелинейных уравнений: монография / В.М. Мадорский. – Брест: Изд-во БрГУ, 2005. – 186 с.

УДК 519.95

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДУ И СИСТЕМ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Тухто Н.Н.
УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест
Научный руководитель – Тузик Т.А., доцент

В электротехнике очень часто приходится иметь дело с сигналами, которые нельзя представить в виде непрерывной функции. Так, например, в теории автоматического управления для исследования качества регулирования широко используются ступенчатые функции. Такие функции, имеющие конечное число разрывов первого рода (конечных) называются разрывными.

Уравнение, описывающее электрическую цепь, как правило является линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) первого или высших порядков. Поэтому возникает необходимость в решении таких уравнений с разрывной правой части.

Будем решать уравнения с помощью преобразования Лапласа [1-2]. В данной работе рассмотрены некоторые уравнения и системы уравнений такого типа.

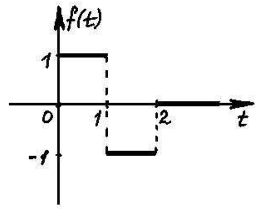
Рассмотрим следующие примеры:

1. Найти решение дифференциального уравнения $x'' + x = f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} 1, \text{ åñëè } 0 \le t < 1, \\ -1, \text{ åñëè } 1 \le t < 2, \\ 0, \text{ åñëè } t \ge 2. \end{cases}$$

при нулевых начальных условиях: $x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$

Функцию $f(t)$ можно представить графически:



Запишем функцию $f(t)$ единым аналитическим выражением:

$$\mathrm{f(t)=1\eta(t)-1\eta(t-1)+(-1)\eta(t-1)-(-1)\eta(t-2)=1\eta(t)-2\eta(t-1)+1\eta(t-2);}$$

Изображение данной функции имеет вид:

$$F(p)=\frac{1}{p}-\frac{2}{p}e^{-p}+\frac{1}{p}e^{-2p}=\frac{1}{p}(1-2e^{-p}+e^{-2p});$$

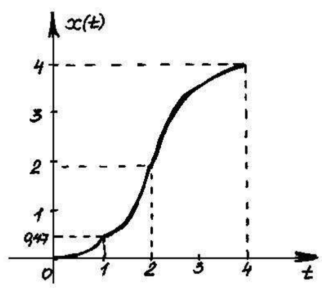
Переходим к операторному уравнению, учитываем нулевые начальные условия и полагаем $x(t)\risingdotseq X(p),\ x'(t)\risingdotseq pX(p),\ x''(t)\risingdotseq p^2X(p).$

$$p^2X(p)+X(p)=\frac{1}{p}(1-2e^{-p}+e^{-2p}); \qquad X(p)=\frac{1}{p(p^2+1)}(1-2e^{-p}+e^{-2p});$$

т.к. $\dfrac{1}{p(p^2+1)}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{p^2+1}\risingdotseq 1-\cos t$, то применяя теорему запаздывания, находим обычное решение данного ДУ:

$$\mathrm{x(t)=1-\cos t-2(1-\cos(t-1))\eta(t-1)+(1-\cos(t-2))\eta(t-2);}$$

$$x(t)=\begin{cases}1-\cos t,\ \text{åñëè}\ 0\le t<1,\\ 2-\cos(t-1)-\cos t,\ \text{åñëè}\ 1\le t<2,\\ 3-\cos(t-2)-\cos(t-1)-\cos t,\ \text{åñëè}\ t\ge 2.\end{cases}$$



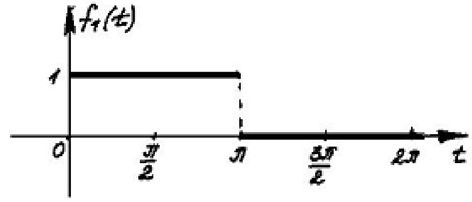
2. Найти решение системы дифференциальных уравнений:

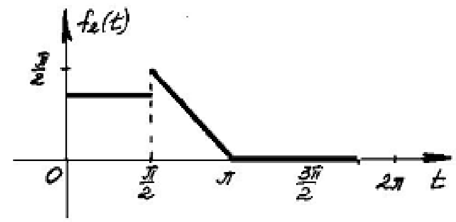
$$\begin{cases}x''\text{-}y'=f_1(t),\\ y'+x=f_2(t).\end{cases}$$

$$f_1(t)=\begin{cases}1,\ \text{åñëè}\ 0\le \mathrm{t}<\pi,\\ 0,\ \text{åñëè}\ \mathrm{t}\ge\pi.\end{cases} \qquad f_2(t)=\begin{cases}t,\ \text{åñëè}\ 0\le \mathrm{t}<\dfrac{\pi}{2},\\ \pi-t,\ \text{åñëè}\ \dfrac{\pi}{2}\le \mathrm{t}<\pi,\\ 0,\ \text{åñëè}\ \mathrm{t}\ge\pi.\end{cases}$$

при нулевых начальных условиях: $x(0)=y(0)=0,\ x'(0)=y'(0)=0.$

Функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ можно представить графически:





Запишем $f_1(t)$ и $f_2(t)$ с помощью единичной функции Хевисайда:

$$\mathrm{f}_1(\mathrm{t}) = 1\eta(\mathrm{t}) - 1\eta(\mathrm{t}-\pi);$$

$$\mathrm{f}_2(\mathrm{t}) = \mathrm{t}\eta(\mathrm{t}) - \mathrm{t}\eta(\mathrm{t}-\frac{\pi}{2}) + (\pi-\mathrm{t})\eta(\mathrm{t}-\frac{\pi}{2}) - (\pi-\mathrm{t})\eta(\mathrm{t}-\pi) = \mathrm{t}\eta(\mathrm{t}) + (-2\mathrm{t}+\pi)\eta(\mathrm{t}-\frac{\pi}{2}) -$$
$$-(\pi-\mathrm{t})\eta(\pi-\mathrm{t});$$

Изображениями данных функций являются следующие функции:

$$F_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-\pi p} = \frac{1}{p}(1-e^{-\pi p});$$

$$F_2(p) = \frac{1}{p^2} - 2\frac{1}{p^2}e^{-\frac{\pi}{2}p} + \frac{1}{p^2}e^{-\pi p} = \frac{1}{p^2}(1-2e^{-\frac{\pi}{2}p} + e^{-\pi p});$$

С учетом нулевых начальных условий $x(0) = y(0) = 0,\ x'(0) = y'(0) = 0$ полагаем:

$$x(t) \risingdotseq X(p),\ \ x'(t) \risingdotseq pX(p),\ \ x''(t) \risingdotseq p^2X(p),\ \ y(t) \risingdotseq Y(p),\ \ y'(t) \risingdotseq pY(p),\ \ y''(t) \risingdotseq p^2Y(p).$$

Переходим к линейной системе относительно изображений:

$$\begin{cases} p^2X(p) - pY(p) = \dfrac{1}{p}(1-e^{-\pi p}), \\ pY(p) + X(p) = \dfrac{1}{p^2}(1-2e^{-\frac{\pi}{2}p} + e^{-\pi p}). \end{cases}$$

Методом определителей решим эту систему:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p^2 & -p \\ 1 & p \end{vmatrix} = p^3 + p = p(p^2+1);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{p}(1-e^{-\pi p}) & -p \\ \dfrac{1}{p^2}(1-2e^{-\frac{\pi}{2}p} + e^{-\pi p}) & p \end{vmatrix} = (1-e^{-\pi p}) + \frac{1}{p}(1-2e^{-\frac{\pi}{2}p} + e^{-\pi p});$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p^2 & \dfrac{1}{p}(1-e^{-\pi p}) \\ 1 & \dfrac{1}{p^2}(1-2e^{-\frac{\pi}{2}p} + e^{-\pi p}) \end{vmatrix} = (1-2e^{-\frac{\pi}{2}p} + e^{-\pi p}) - \frac{1}{p}(1-e^{-\pi p});$$

Получаем операторное решение данной системы ДУ:

$$\begin{cases} X(p)=\dfrac{1-e^{-\pi p}}{p(p^2+1)}+\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}(1-2e^{-\frac{\pi}{2}p}+e^{-\pi p}), \\ Y(p)=\dfrac{1-2e^{-\frac{\pi}{2}p}+e^{-\pi p}}{p(p^2+1)}-\dfrac{1-e^{-\pi p}}{p^2(p^2+1)}. \end{cases}$$

Применяя теорему запаздывания, находим решение системы ДУ:

$$\begin{cases} x(t)=1-\cos t-(1-\cos(t-\pi))\eta(t-\pi)+t-\sin t-2((t-\frac{\pi}{2})-\sin(t-\frac{\pi}{2}))\eta(t-\frac{\pi}{2})+ \\ \quad +((t-\pi)-\sin(t-\pi))\eta(t-\pi), \\ y(t)=1-\cos t-t+\sin t-2((t-\frac{\pi}{2})-\cos(t-\frac{\pi}{2}))\eta(t-\frac{\pi}{2})+(1-\cos(t-\pi))\eta(t-\pi)+ \\ \quad +((t-\pi)-\sin(t-\pi))\eta(t-\pi). \end{cases}$$

Литература

1. Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И., Макаренко – М.: Наука, 1981.

2. Сборник задач по математике для втузов специальные разделы математического анализа – М.: Наука, 1981

УДК 519.216.74

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ УСТОЙЧИВОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ НА СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ РЁССЛЕРА

Черноокий А.Л.

УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест

Научный руководитель Труш Н.Н – доктор физико-математических наук, профессор

В динамике химических реакций с перемешиванием известна довольно простая модель Рёслера [1], задаваемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=-y-z, \\ \frac{dy}{dt}&=x+ey, \\ \frac{dz}{dt}&=f+xz-mz, \end{aligned} \tag{1}$$

где x, y, z – компоненты решения, e, f, m – параметры модели.

Будем рассматривать модель (1) со стохастическими возмущениями в виде системы стохастических дифференциальных уравнений с устойчивыми приращениями: