

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ШАЗИ С ШЕСТЬЮ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Швычкина Е. Н.

УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест

Уравнения третьего порядка с шестью различными полюсами относительно искомой функции рассматривал Шази [4]. Результаты его исследований сводятся к следующему.

1) Если решения таких уравнений не имеют подвижных критических особых точек, то последние по необходимости должны иметь вид

$$w''' = \sum_{k=1}^6 \frac{(w'-a_k')(w''-a_k'') + A_k(w'-a_k')^3 + B_k(w'-a_k')^2}{w-a_k} + \frac{C_k(w'-a_k')}{w-a_k} + Dw'' + Ew' + \prod_{i=1}^6 (w-a_i) \sum_{k=1}^6 \frac{F_k}{w-a_k}, \quad (1)$$

которые, очевидно, содержит 32 функции по z : A_k, B_k, C_k, F_k ($k = \overline{1,6}$), и D, E .

2) Если, кроме того, эти функции удовлетворяют специальной системе (S), состоящей из 31 алгебраического и дифференциального уравнения, то эти условия будут и достаточными. Система (S) содержит 31 уравнение с 32 функциями.

Однако Шази не завершил интегрирование системы (S) и не определил класс неприводимых уравнений, которому принадлежало бы уравнение (1). Вместе с тем он показал, что некоторые случаи вырождения уравнения (1) являются неприводимыми уравнениями Пенлеве. С этой точки зрения, уравнение (1) можно рассматривать как новое, трансцендентные решения которого не имеют подвижных критических особых точек [1].

При исследовании характера особых точек во многих случаях удобнее рассматривать вместо уравнения (1) эквивалентную ему систему.

В данной работе, для случая, когда коэффициенты уравнения (1) являются постоянными и $B_k = 0$ ($k = \overline{1,6}$), составлена система вида

$$\begin{cases} w'' = -f_1(z, w)w^2 + f_2(z, w)v + f_3(z, w), \\ v' = -2f_1(z, w)w'v + f_4(z, w); \end{cases} \quad (2)$$

где f_i ($i = \overline{1,4}$) функции по z и w подлежащие определению. Продифференцируем первое уравнение системы (2) по z и, подставляя (2) в уравнение Шази (1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях w , получим систему дифференциальных уравнений для отыскания функции f_i ($i = \overline{1,4}$). Эта система имеет следующий вид

$$\begin{aligned} f_2 \sum_{k=1}^6 \frac{1}{w-a_k} - \frac{\partial f_2}{\partial w} = 0, \quad f_2 - \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0, \quad f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0, \\ -2f_1^2 + f_1 \sum_{k=1}^6 \frac{1}{w-a_k} + \sum_{k=1}^6 \frac{A_k}{w-a_k} - \frac{\partial f_1}{\partial w} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$E - 2f_3f_1 + f_3 \sum_{k=1}^6 \frac{1}{w - a_k} + \sum_{k=1}^6 \frac{C_k}{w - a_k} + \frac{\partial f_3}{\partial w} = 0,$$

$$f_4f_2 + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0.$$

Из первых двух уравнений системы (3) находим функцию

$$f_2(z, w) = z \cdot \prod_{k=1}^6 (w - a_k) \cdot C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная. Чтобы решить систему (3) применим метод, который рассматривается в работе [3] для решения линейного уравнения второго порядка класса Фукса с шестью особыми точками. Рассмотрим подробнее процедуру нахождения функции $f_1(z, w)$. Из третьего уравнения системы (3) найдем

$$f_1(z, w) = z \cdot T(w).$$

Т. о. четвертое уравнение системы (3) является уравнением Риккати относительно неизвестной функции $T(w)$. Решение будем искать в виде

$$T(w) = \frac{b_0w^5 + b_1w^4 + b_2w^3 + b_3w^2 + b_4w + b_5}{w^6 - w^5\sigma_1 + w^4\sigma_2 - w^3\sigma_3 + w^2\sigma_4 - w\sigma_5 + \sigma_6}, \quad (4)$$

где σ_i ($i = \overline{1,6}$) – элементарные симметрические многочлены, составленные из элементов a_i ($i = \overline{1,6}$). Преобразуем следующее выражение к виду

$$\sum_{k=1}^6 \frac{A_k}{w - a_k} = \frac{6w^4 - 3w^2\alpha + 3w\beta_2 - 3\beta_3 - 4w^3\sigma_1 + 3w^2\sigma_2 + \sigma_4}{w^6 - w^5\sigma_1 + w^4\sigma_2 - w^3\sigma_3 + w^2\sigma_4 - w\sigma_5 + \sigma_6}, \quad (5)$$

где σ_i ($i = \overline{1,6}$) связаны с величинами α , β_2 , β_3 следующими соотношениями,

$$\beta_2 = \frac{(3\alpha_2 - \sigma_2)(2\alpha_2\sigma_1 - 3\sigma_3) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2},$$

$$\beta_3 = \frac{2\sigma_1\sigma_5 - (3\alpha_2 - \sigma_2)(12\alpha_2^2 - 4\alpha_2\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{2(18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2)},$$

а число α удовлетворяет уравнению 5-й степени [3]. Выражение (5) получено также с учетом выполнения соотношений между функциями A_i и a_i системы (S).

Подставляя (4) в четвертое уравнение системы (3), получим уравнение десятой степени относительно w . Приравнявая коэффициенты этого уравнения нулю, получим систему из одиннадцати алгебраических уравнений, где неизвестными являются коэф-

коэффициенты b_k ($k = \overline{0, 5}$) и σ_i ($i = \overline{1, 6}$). Частное решение четвертого уравнения системы (3) в случае $b_0 = 2$ есть $T(w) = \frac{2}{w}$ т.о.

$$f_1(z, w) = z \cdot \frac{2w^2(2C_2w - 3)}{2w^3(C_2w - 2) + \sigma_3}$$

Построение систем (2) и (3), нахождение их решений требует громоздких вычислений, которые были реализованы в системе *Mathematica* [2]. В данной работе не приводится явный вид всех функций f_i ($i = \overline{1, 4}$) по причине их большого объема.

Литература

1. Добровольский, В.А. очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений / В.А. Добровольский – Киев: Вища школа, 1974. – 456 с.
2. Чичурин, А.В. Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса: Монография / А.В. Чурин – М.: Изд-во РУДН, 2003. – 143 с.
3. Chazy J. – Sur les equations differentielles du troisieme order et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes. Acta Math., 1911 – N 34. – P. 317 – 385.

УДК 517.983+519.6

О СХОДИМОСТИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Юрко И.В.

*УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест
Научный руководитель – Савчук В.Ф., кандидат физ.-мат. наук, доцент*

Поскольку некорректные задачи возникают в многочисленных приложениях математики, то проблема их решения и разработка методов их решения является актуальной. В работе предлагается новый метод решения некорректных задач. Цель исследования – доказать сходимость предложенного метода в случае априорного выбора числа итераций, получить оценки погрешности и их минимизировать. Методологической основой исследования является общая теория некорректных задач, элементы функционального и математического анализа, вычислительной математики.

В гильбертовом пространстве H решается уравнение 1-го рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A - ограниченный положительный и самосопряженный оператор, в предположении, что нуль принадлежит спектру оператора A , но не является его собственным значением. Тогда задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) существует, то будем искать его с помощью итерационного метода

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^2 x_n + 2\alpha y - \alpha^2 Ay, x_0 = 0. \tag{2}$$