фициенты $b_k \quad (k=\overline{0,5})$ и $\sigma_i \quad (i=\overline{1,6})$. Частное решение четвертого уравнения системы (3) в случае $b_0=2$ есть $T(w)=\dfrac{2}{w}$ Т.о.

$$f_1(z,w)=z\cdot\frac{2w^2(2C_2w-3)}{2w^3(C_2w-2)+\sigma_3}$$

Построение систем (2) и (3), нахождение их решений требует громоздких вычислений, которые были реализованы в системе *Mathematica* [2]. В данной работе не приводится явный вид всех функций $f_i \quad (i=\overline{1,4})$ по причине их большого объема.

Литература

1. Добровольский, В.А. очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений / В.А. Добровольский – Киев: Вища школа, 1974. – 456 с.
2. Чичурин, А.В. Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса: Монография / А.В. Чурин – М.: Изд-во РУДН, 2003. – 143 с.
3. Chazy J. – Sur les equations differentielles du troisieme order et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes. Acta Math., 1911 – N 34. – P. 317 – 385.

УДК 517.983+519.6

О СХОДИМОСТИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Юрко И.В.
УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина», г. Брест
Научный руководитель – Савчук В.Ф., кандидат физ.-мат. наук, доцент

Поскольку некорректные задачи возникают в многочисленных приложениях математики, то проблема их решения и разработка методов их решения является актуальной. В работе предлагается новый метод решения некорректных задач. Цель исследования – доказать сходимость предложенного метода в случае априорного выбора числа итераций, получить оценки погрешности и их минимизировать. Методологической основой исследования является общая теория некорректных задач, элементы функционального и математического анализа, вычислительной математики.

В гильбертовом пространстве H решается уравнение 1-го рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A - ограниченный положительный и самосопряженный оператор, в предположении, что нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением. Тогда задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) существует, то будем искать его с помощью итерационного метода

$$x_{n+1}=(E-\alpha A)^2x_n+2\alpha y-\alpha^2Ay,\ x_0=0. \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения (1) известна с некоторой точностью δ, т.е. известно y_δ такое, что $\|y-y_\delta\|\le\delta$. Тогда метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta}=(E-\alpha A)^2 x_{n,\delta}+2\alpha y_\delta-\alpha^2 Ay_\delta,\ x_{0,\delta}=0. \qquad (3)$$

Изучена сходимость метода (2) при точной правой части y уравнения (1). Справедлива

Теорема 1 Итерационный процесс (2) при условии $0<\alpha<\dfrac{2}{\|A\|}$ сходится.

Показано, что метод (3) сходится при условии $0<\alpha<\dfrac{2}{\|A\|}$, если число итераций n разумно согласовывать с уровнем погрешности δ, т. е доказана

Теорема 2. При условии $0<\alpha<\dfrac{2}{\|A\|}$ итерационный процесс (3) сходится, если выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $n\delta\to 0, n\to\infty, \delta\to 0.$

В предположении, что точное решение уравнения (1) истокообразнопредставимо, т.е. $x=A^s z,\ s>0$ получена оценка погрешности для метода (3), т. е. справедлива

Теорема 3. Если точное решение x уравнения (1) истокообразно представимо, то при условии $0<\alpha\le\dfrac{5}{4\|A\|}$ для метода (3) справедлива оценка погрешности

$$\|x-x_{n,\delta}\|\le s^s(2n\alpha e)^{-s}\|z\|+2n\alpha\delta. \qquad (4)$$

Оптимизируем полученную оценку (4) по n, т. е. найдём такое значение числа итераций $n_{опт}$, при котором оценка (4) становится минимальной. Для этого производную от правой части неравенства (4) приравняем нулю. Итак, доказана

Теорема 4. Если точное решение x уравнения (1) истокообразно представимо, то при условии $0<\alpha\le\dfrac{5}{4\|A\|}$ оптимальная оценка погрешности для итерационного метода (3) имеет вид $\|x-x_{n,\delta}\|_{опт}\le(1+s)e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}$ и достигается при $n_{опт}=s(2\alpha)^{-1}e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{1}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}$.

Метод (2) пригоден и тогда, когда $\lambda=0$ является собственным значением оператора A (случай неединственного решения уравнения (1)). Обозначим через $N(A)=\{x\in H\,|\,Ax=0\}, M(A)-$ ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x-$ проекция $x\in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x-$ проекция $x\in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 5. Пусть $A\ge 0, y\in H, 0<\alpha<\dfrac{2}{\|A\|}$, тогда для итерационного процесса (2) верны следующие утверждения:

a) $Ax_n\to Ï\ (A)y, \|Ax_n-y\|\to I(A,y)=\inf\limits_{x\in H}\|Ax-y\|$;

b) метод (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax=\Pi(A)y$ разрешимо. В последнем случае $x_n\to P(A)x_0+x^*$, где x^*- минимальное решение уравнения.