УДК 624.072.21.7

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ РАСЧЕТА СИСТЕМЫ ПЕРЕКРЕСТНЫХ ЛЕНТ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ВИНКЛЕРА. СОЗДАНИЕ ТАБЛИЦ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЫ «MATHEMATICA»

С. В. Босаков, О. В. Козунова, К. Шер Мохаммад

Аннотация. *В работе получила дальнейшее развитие методика расчета системы перекрестных лент на упругом основании Винклера под действием единичных кинематических воздействий и внешней нагрузки, которая основана на решении системы линейных алгебраических уравнений методами строительной механики. В свою очередь напряженно-деформированное состояние в каждой из однопролетных или консольных балок, из которых состоит система перекрестных балок, на различные воздействия определяется методом перемещений.*

Показана последовательность определения реактивных усилий на примере балки с двумя защемленными концами, один из которых получает единичное линейное перемещение. Рассмотрен пример расчета симметричной системы перекрестных балок на действие симметрично приложенной сосредоточенной силы.

Составлена базовая таблица метода перемещений для расчета однопролётных балок на упругом основании Винклера с различными опорными закреплениями на действие единичных линейных и угловых смещений опор и внешней нагрузки в компьютерной среде «Mathematica».

Ключевые слова: *методика расчета системы перекрестных лент, метод перемещений, кинематические воздействия, опорные закрепления, упругое основание Винклера, компьютерная среда «Mathematica».*

Annotation. *The work further developed the calculation of the system of cross tapes on Winkler's elastic base under the action of single kinematic effects and external load, which is based on solving a system of linear algebraic equations of the methods of structural mechanics. In turn, the stress-strain state in each of the single-span or cantilever beams that make up the cross-beam system, for various effects is determined by the displacement method.*

The sequence of determining reactive forces is shown by the example of a beam with two pinched ends, one of which receives a single linear displacement. An example of calculating a symmetric system of cross beams on the action of a symmetrically applied concentrated force is considered.

A basic table of the displacement method has been compiled for calculating single-span beams on Winkler's elastic base with various support fixations on the action of unit linear and angular displacements of supports and external load in the Mathematica computer environment.

Key words*: methodology for calculating the system of cross tapes, displacement method, kinematic effects, support fastenings, Winkler elastic base, Mathematica computer environment.*

Введение. Широко распространённые ленточные фундаменты как фундаменты мелкого заложения под многоэтажные здания и сооружения на естественном грунтовом основании проектируются и моделируются в виде системы из перекрестных лент на различных моделях упругого основания. В этом случае система перекрестных лент заменяется на систему перекрестных балок на упругом основании, которая и является расчетной моделью.

Исследования Л. И. Манвелова, Э. С. Барташевича [1], И. И. Черкасова [2], М. И. Горбунова-Посадова [3] свидетельствуют о том, что модель Винклера даёт хорошее первое приближение к действительности при проектировании фундаментных конструкций на упругом основании (рис.1) [4]. Эта простая модель, которая, кроме практического применения, имеет и методическое преимущество – на примере модели Винклера легко объяснить многие сложные решения, которые при моделировании другими моделями теряются в громоздких математических соотношениях.

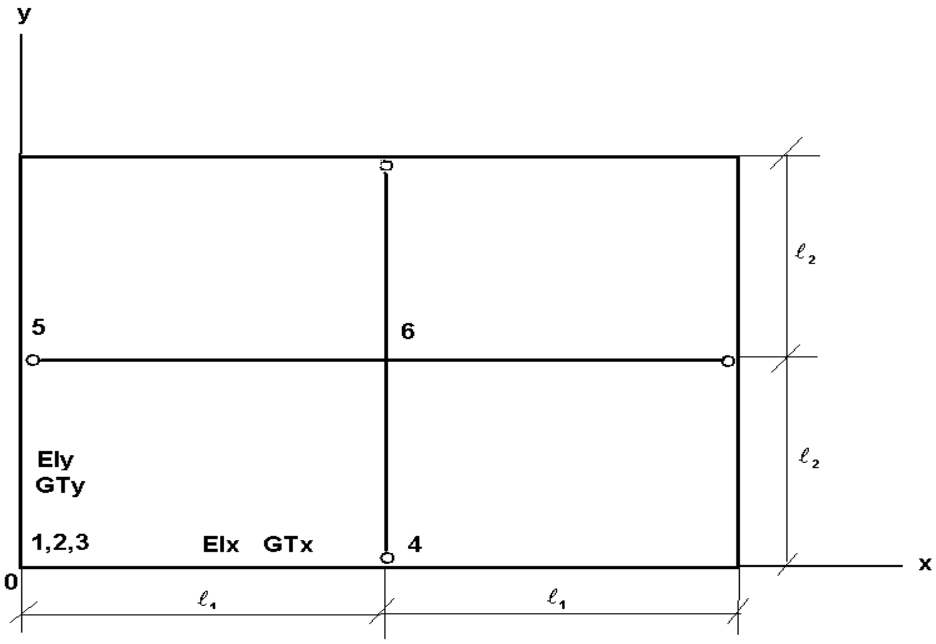

Рисунок 1 – Система перекрестных балок на основании Винклера

Метод перемещений для расчета балки на упругом основании предложил Д. С. Пащевский [5]. Этот метод в классической постановке называется методом деформаций, и используется им для расчета однопролётных балок на основании Винклера без учета трения на контакте балки с упругим основанием.

В основной системе метода перемещений для системы перекрестных балок на упругом основании ее элементом также является горизонтальная однопролетная балка на основании Винклера с различными опорными закреплениями под действием вертикальной нагрузки.

Постановка краевых задач. При исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) однопролетных балок на упругом основании Винклера от действия единичных угловых и линейных смещений опор рассматриваются следующие опорные закрепления: «заделка-заделка», «заделка-шарнир». Исходные данные рассматриваемых задач: коэффициент постели k, жесткость балки EI и её длина L.

Решение дифференциального уравнения (ДУ) изгиба балки на упругом основании Винклера на единичное перемещение [6]

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} - ky = 0, \qquad (1)$$

известно из [7] и использовано авторами в работе [4]

$$y(x) = C_1\cos\left(\lambda\frac{x}{L}\right) + C_2\sin\left(\lambda\frac{x}{L}\right) + C_3 ch\left(\lambda\frac{x}{L}\right) + C_4\mathrm{sh}\left(\lambda\frac{x}{L}\right), \qquad (2)$$

где $\lambda = \sqrt[4]{kL^4/EI}$ – безразмерный упругий параметр.

При единичном *угловом* смещении жёсткой опоры (левая опора) граничные условия задачи следующие:

1) «заделка-шарнир» при $\boldsymbol{x = 0}$: $y = 0;\ y' = 1$; при $\boldsymbol{x = L}$: $y = y'' = 0$;
2) «заделка-заделка» при $\boldsymbol{x = 0}$: $y = 0;\ y' = 1$; при $\boldsymbol{x = L}$: $y = y' = 0$. (3)

При единичном *линейном* смещении жёсткой опоры (правая опора) граничные условия задачи следующие:

«заделка-заделка» при $\boldsymbol{x = 0}$: $y = y' = 0$; при $\boldsymbol{x = L}$: $y = 1;\ y' = 0$. (4)

Выполняя граничные условия (3,4) для поставленной задачи. Из решения ДУ изгиба балки (2) находим постоянные интегрирования $C_i, i = 1,\ldots,4$, а по ним - реакции опор. Для построения окончательных эпюр внутренних усилий *в системе перекрестных балок* (см. рис. 1) необходимо найти выражения изгибающих моментов и поперечных сил в рассматриваемой однопролетной балке с различными опорными закреплениями на действие единичных линейных и угловых смещений опор и внешней нагрузки, что возможно и реализовано в компьютерной среде «Mathematica».

Решение задачи для однопролётной балки «заделка-заделка» от единичного линейного смещения. Рассмотрим однопролетную балку с защемленными концами на упругом основании Винклера с упругим параметром λ, значение которого зависит от длины *l*, жесткости *EI* и коэффициента постели *k*. Правый конец этой балки получает единичное *линейное* смещение (рис.2).

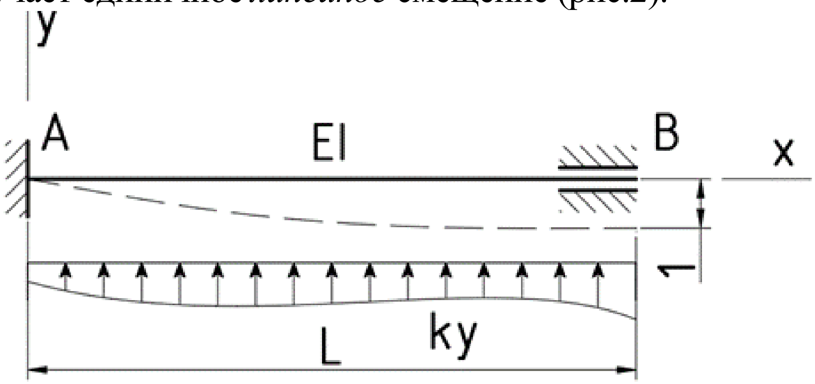

Рисунок 2 – Однопролётная балка «заделка-заделка» с единичным линейным смещением правой опоры

Для решения этой статически неопределимой задачи из решения уравнения (2) находят выражения для внутренних усилий $Q(x)$ и $M(x)$, а по ним – опорные реакции (рис. 3), необходимые для построения окончательных эпюр в системе перекрёстных балок.

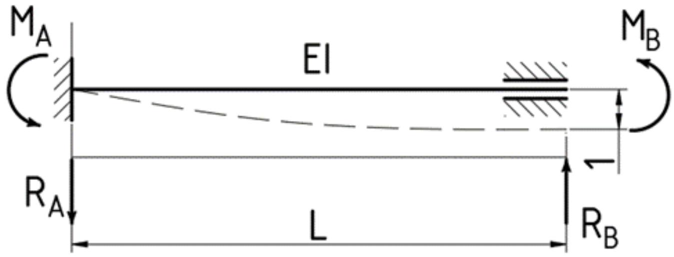

Рисунок 3 – Опорные реакции в однопролётной балке «заделка-заделка» от единичного линейного смещения

Выражения для изгибающих моментов и поперечных сил в рассматриваемой балке от единичного линейного смещения правого защемления при выполнении условий (4) имеют следующий вид

$$\boldsymbol{Q(x)} = \frac{-EI\lambda^3}{2L^3}\left[\begin{array}{l}\frac{\cos\lambda-\mathrm{ch}\lambda}{1-\cos\lambda ch\lambda}\sin\frac{x\lambda}{L}-\frac{\sin\lambda+\mathrm{sh}\lambda}{1-\cos\lambda ch\lambda}\cos\frac{x\lambda}{L}-\\ -\frac{\cos\lambda-\mathrm{ch}\lambda}{1-\cos\lambda ch\lambda}\mathrm{sh}\frac{x\lambda}{L}-\frac{\sin\lambda+\mathrm{sh}\lambda}{1-\cos\lambda ch\lambda}\mathrm{ch}\frac{x\lambda}{L}\end{array}\right]; \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{M(x)} = \frac{-EI\lambda^2}{2L^2}\left[\begin{array}{l}\frac{\cos\lambda-\mathrm{ch}\lambda}{1-\cos\lambda\, ch\lambda}\cos\frac{x\lambda}{L}+\frac{\cos\lambda-\mathrm{ch}\lambda}{1-\cos\lambda\, ch\lambda}\mathrm{ch}\frac{x\lambda}{L}+\\ +\frac{\sin\lambda+\mathrm{sh}\lambda}{1-\cos\lambda\, ch\lambda}\sin\frac{x\lambda}{L}+\frac{\sin\lambda+\mathrm{sh}\lambda}{1-\cos\lambda\, ch\lambda}\mathrm{sh}\frac{x\lambda}{L}\end{array}\right].$$

Опорные реакций в однопролетной балке от единичного линейного смещения (рис. 3) при выполнении условий (4) имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{R_A} = \frac{EI\lambda^3}{L^3}\frac{\sin\lambda+\mathrm{sh}\lambda}{1-\cos\lambda\, ch\lambda}; \qquad \boldsymbol{M_A} = \frac{EI\lambda^2}{L^2}\frac{\cos\lambda-\mathrm{ch}\lambda}{1-\cos\lambda\, ch\lambda};$$
$$\boldsymbol{R_B} = \frac{EI\lambda^3}{L^3}\frac{\mathrm{ch}\lambda\sin\lambda+\cos\lambda\,\mathrm{sh}\lambda}{1-\cos\lambda\, ch\lambda}; \qquad \boldsymbol{M_B} = \frac{EI\lambda^2}{L^2}\frac{\sin\lambda+\mathrm{sh}\lambda}{1-\cos\lambda\, ch\lambda}. \qquad (6)$$

Хотелось бы отметить, что в формулах внутренних усилий $Q(x)$ и $M(x)$ и опорных реакций (5,6) в знаменателе получено выражение $1-\cos\lambda\, ch\lambda$, которое уже известно ранее из теории линейных колебаний балок [8] в трансцендентном уравнении

$$\cos\lambda\, ch\lambda - 1 = 0, \qquad (7)$$

решая которое, можно получить критические значения упругого параметра λ, при которых выражения (5,6) скачкообразно меняют знак.

В доказательство этому на рис.4 приведен график изменения реактивного момента в левом защемлении балки $M_А$ при изменении параметра λ.

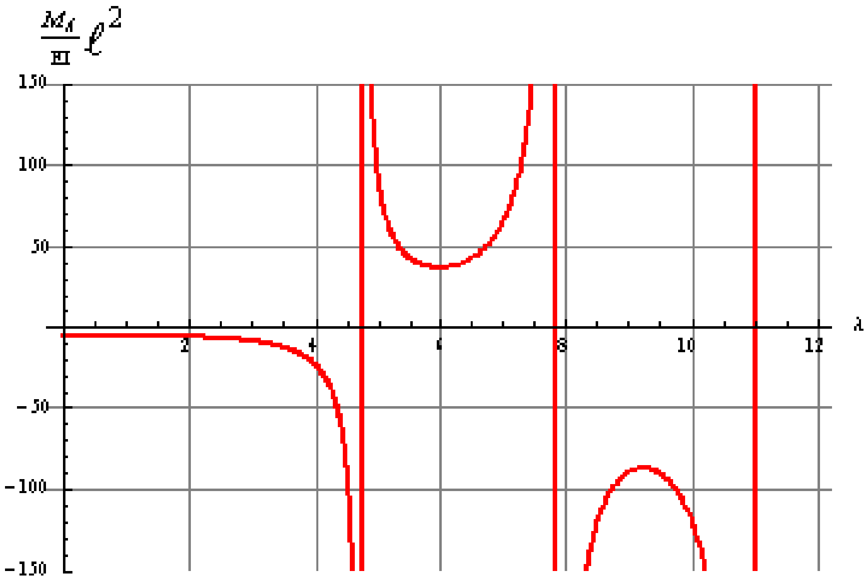

Рисунок 4 – Изменение реактивного момента в левом защемлении балки
M_A *при изменении упругого параметра λ*

На рисунке 5 приведен график изменения изгибающего момента по длине балки при различных значениях упругого параметра λ.

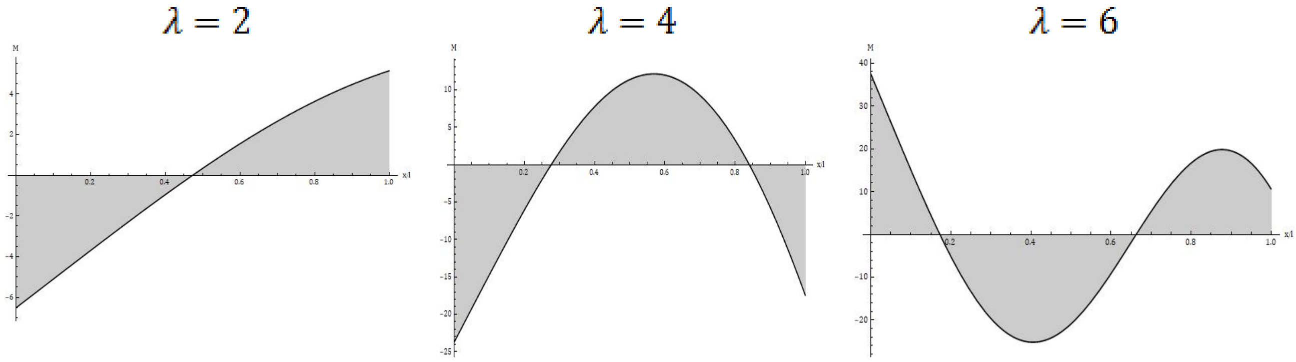

Рисунок 5 – Изменение изгибающего момента по длине балки при различных значениях упругого параметра $\boldsymbol{\lambda}$

Об особенностях упругого параметра λ и его критических значениях. Перед построением графиков $M\frac{L}{EJ}$ и $Q\frac{L^3}{EJ}$ определим первый ноль знаменателя выражений для изгибающих моментов и поперечных сил и опорных реакций в однопролетной балке от единичного смещения (первое критическое значение λ), при котором в балке начинают растягиваться верхние волокна.

Расчет реализуем в компьютерном пакете «Mathematica» через решение ДУ изгиба (2) для однопролетной балки с опорными закреплениями «заделка-шарнир» по аналогичному алгоритму, приведенному выше. При единичном *угловом* смещении жёсткой опоры (левая опора) граничные условия задачи принимаются согласно (3).

На рисунке 6 построен график зависимости $f(\lambda) = 1 - \cos\lambda\, ch\lambda$ от упругого параметра λ и первое критическое значение (λкр $= 3.9266$) для данного опорного закрепления и кинематического воздействия.

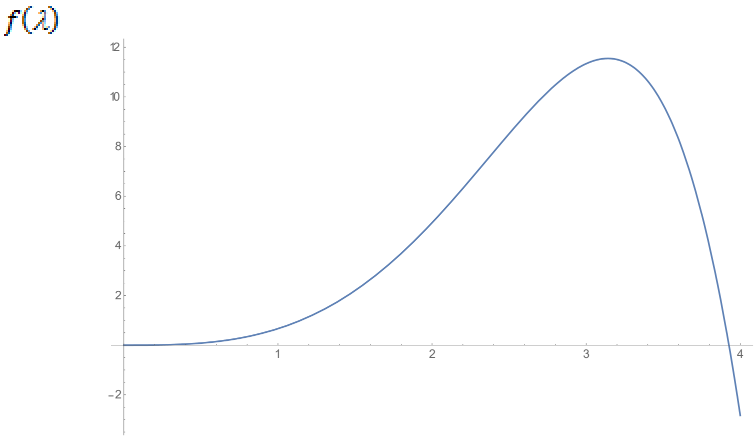

Рисунок 6 – График зависимости $\boldsymbol{f(\lambda) = 1 - \cos\lambda\, ch\lambda}$
от упругого параметра λ *(*$\boldsymbol{\lambda кр = 3.9266}$*)*

При любом значении упругого параметра $\lambda < \lambda$кр строим эпюры внутренних усилий по длине балки $M\frac{L}{EJ}$ и $Q\ \frac{L^2}{EJ}$ (рис. 7 и 8).

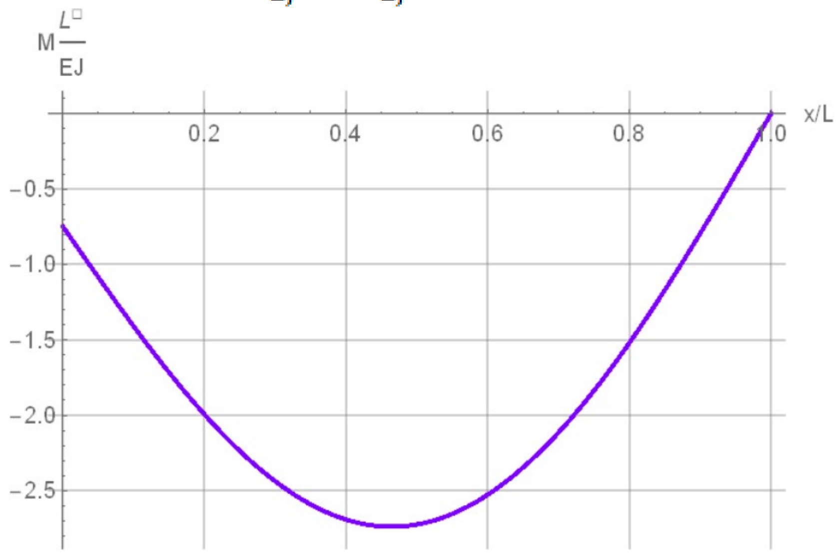

Рисунок 7 – График зависимости $\boldsymbol{M\frac{L}{EJ}}$

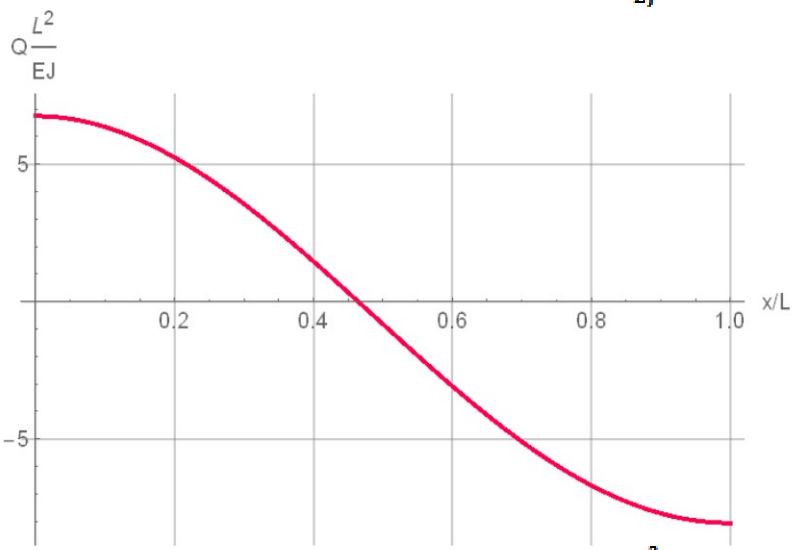

Рисунок 8 – График зависимости $\boldsymbol{Q\ \frac{L^2}{EJ}}$

Расчет системы перекрестных балок на упругом основании Винклера. Рассмотрим симметричную систему перекрестных балок на упругом основании Винклера (см. рис.1) от действия симметричной нагрузки. Число неизвестных метода перемещений уменьшится до шести, а именно: 1,4,5,6 –линейные неизвестные (вертикальные перемещения), 2,3 – угловые неизвестные (углы поворота сечений во введенной заделке относительно осей X и Y соответственно). Задача решается с учетом действия крутящих моментов при определении коэффициентов канонических уравнений метода перемещений в перекрестных лентах (балках), как это было рассмотрено ранее в работе авторов [4].

Основная система метода перемещений образуется постановкой пространственного защемления и вертикальной связи в жесткие узлы и вертикальной связи в шарнирные. Строятся эпюры изгибающих моментов и поперечных сил в основной системе от единичных угловых и линейных смещений каждого группового неизвестного метода перемещений по таблицам. Определяются коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) метода перемещений. В результате решения СЛАУ находятся перемещения узлов системы, по которым известными методами строительной механики строятся окончательные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

В качестве примера рассмотрим следующие *исходные данные для системы из перекрестных балок на упругом основании Винклера* (см. рис.1): внешняя нагрузка в виде сосредоточенной силы P = 1000кН приложена к центральному узлу; геометрические параметры $\ell_1 = \ell_2 = 6\text{м}$; $b = 0,6\text{м}$; жесткости $EJ_x = EJ_y = 10\,000\,\text{кНм}^2$; $GT_x = GT_y = 1000\,\text{кНм}^2$; коэффициент постели $k = 5000\, кН/м^2$; упругий параметр λ_1=λ_2=5.0454.

Матрица коэффициентов r при неизвестных перемещениях и вектор внешних нагрузок R имеют вид:

$$r = \begin{matrix} 2341.4577 & 2128.1083 & 2128.1083 & -1870.4850 & -1870.4850 & 0 \\ 2128.1083 & 3422.9489 & 0 & 2242.5086 & 0 & 0 \\ 2128.1083 & 0 & 3422.9489 & 0 & 2242.5086 & 0 \\ -1870.4850 & 2242.5086 & 0 & 2182.6299 & 0 & -469.4557 \\ -1870.4850 & 0 & 2242.5086 & 0 & 2182.6299 & -469.4557 \\ 0 & 0 & 0 & -469.4557 & -469.4557 & 1222.4615 \end{matrix}$$

$$R^T = \{0, 0, 0, 0, 0, -1000\} \;.$$

В результате решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) матрица коэффициентов при неизвестных и вектор свободных членов, которые приведены выше, получены вертикальные перемещения узлов и углы поворота соответственно:

$$Z_1 = -0.0117 м; \quad Z_2 = Z_3 = 0.00692 рад; \quad Z_4 = Z_5 = 0.0005 м;$$

$$Z_6 = 0.08224 м$$

Выводы. В работе предложена в развитии новая нетрадиционная математически несложная методика статического расчета системы перекрестных балок (фундаментных лент) на упругом основании Винклера на вертикальную нагрузку. Эта методика основана на классическом методе перемещений для расчета плоских рам на пространственную нагрузку, только в однопролетных балках при определении реакций от внешней нагрузки и единичных смещений учитываются реактивные давления, возникающие на контакте подошвы балки с основанием Винклера.

С использованием компьютерной программы «Mathematica» составлены таблицы расчета методом перемещений однопролетных балок на упругом основании Винклера от единичных кинематических воздействий, которые могут быть использованы в инженерных расчетах.

Список использованных источников

1. Манвелов, Л. И. О выборе расчетной модели упругого основания / Л. И. Манвелов, Э. С. Барташевич // Строительная механика и расчет сооружений. – 1961. – № 4. – С. 9-12.

2. Черкасов, И. И. Механические свойства грунтовых оснований : учеб. пособие для транспортных и инженерно-строительных вузов / И. И. Черкасов. – М. : Аэротрансиздат, 1966. – 248 с.

3. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкции на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М. : Стройиздат, 1984. – 679 с.

4. Босаков, С.В. Метод перемещений в расчетах системы перекрестных балок на упругом основании Винклера / С.В. Босаков, О.В. Козунова // Строительная механика и расчёт сооружений – Москва, 2019. – № 2. – С. 12-16.

5. Пащевский, Д. П. Применение метода деформаций к расчету балки на упругом основании / / Д. П. Пащевский // Исследование по теории сооружений. – 1954. – VI. – С. 249-256.

6. Александров, А.В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высшая школа, 1990. – 400 с.

7. Тимошенко, С.П. Теория упругости /С.П. Тимошенко, Дж. М Гудьер. – М: ФМ «Наука». – 1975. – 576с.

8. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М.: ФМ «Наука». − 1959. – 439 с.