УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛАСТИНКИ ПРИ УСЛОВИИ РАВЕНСТВА ЕЕ НЕКОТОРЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

С. В. Босаков

Аннотация. *Рассматривается контактная задача для пластинки на упругом основании под действием вертикальной нагрузки. Считается, что некоторые точки пластинки при ее изгибе лежат в одной плоскости. Такие перемещения пластинки вызываются неизвестными силами, приложенными к этим точкам пластинки. Т. е. неизвестными являются контактные напряжения между пластинкой и упругим основанием и неизвестные силы, приложенные к пластинке.*

Поставленная задача решается способом Жемочкина. Система разрешающих уравнений состоит из нескольких блоков, которые включают уравнения способа Жемочкина, условия равенства перемещений в отдельных точках пластинки и уравнение равновесия для неизвестных сил. В результате решения определяются усилия в связях Жемочкина, неизвестные силы, вызывающие заданные перемещения пластинки. Далее находятся перемещения пластинки, усилия в ней.

Приводится пример расчета металлической базы центрально сжатой металлической колонны двутаврового поперечного сечения, лежащей на бетонном основании. Приведены изолинии равных контактных напряжений и перемещений, графики напряжений, перемещений и неизвестных сил по характерным сечениям базы.

Ключевые слова: пластинка, база колонны, упругое основание, контактные напряжения, способ Жемочкина.

Постановка задачи

Рассматривается пластинка на упругом основании под действием неизвестной симметричной вертикальной нагрузки с равнодействующей R. Принимается, что на контакте между пластинкой и основанием возникают только нормальные напряжения, для пластинки справедливы гипотезы технической теории изгиба [1]. Также будем считать, что некоторые точки пластинки имеют одинаковые вертикальные перемещения (рис.1). Необходимость рассмотрения такой задачи может возникнуть при расчете плитного фундамента высотного здания на стадии эксплуатации, металлической базы колонны.

Ставится задача определения контактных напряжений между пластинкой и основанием, ее перемещений и усилий в ней.

Решение

Поставленную задачу будем решать способом Жемочкина [2]. С этой целью пластинку разобьем на одинаковые прямоугольные участки размерами Δx и Δy. В центре каждого участка поставим вертикальную жесткую связь, через которую осуществляется контакт пластинки с упругим основанием. Будем считать, что усилие в связи вызывают равномерно распределенные контактные напряжения в пределах каждого прямоугольного участка. Очевидно, в точках с одинаковыми вертикальными перемещениями должны быть приложены неизвестные вертикальные силы P_i, которые обеспечивают равенство этих перемещений. Для решения используем смешанный метод строительной механики [3]. С этой целью в начале координат (рис.1) вводим защемление.

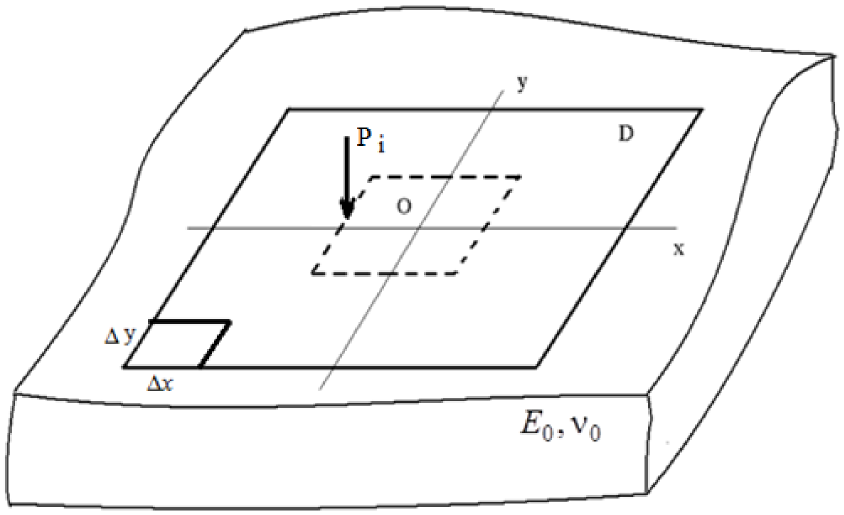


Рисунок 1 – Пластинка на упругом основании
(показаны пунктиром точки пластинки с одинаковыми вертикальными перемещениями)

Система уравнений для определения неизвестных сил в связях Жемочкина, неизвестных внешних сил и перемещений введенного защемления отличается от стандартной способа Жемочкина [2] и имеет блочный вид

$$\begin{cases}
\delta_{1,1}X_1 + \ldots + \delta_{1,n}X_n + W_0 - \varphi_x y_1 - \varphi_y x_1 - w_{1,n+1}P_1 + \ldots - w_{1,n+m}P_m = 0 \\
\ldots \\
\delta_{n,1}X_1 + \ldots + \delta_{n,n}X_n + W_0 - \varphi_x y_n - \varphi_y x_n - w_{n,n+1}P_1 + \ldots - w_{n,n+m}P_m = 0 \\
-X_1 - \ldots - X_n + R = 0 \\
X_1 y_1 + \ldots + X_n y_n - P_1 y_{P1} - \ldots P_m y_{Pm} = 0 \\
X_1 x_1 + \ldots + X_n x_n - P_1 x_{P1} - \ldots P_m x_{Pm} = 0 \\
\sum\limits_{k=1}^{n} \left(F_{i+1,k} - F_{i,k}\right) X_k = 0 \\
\ldots \\
\sum\limits_{k=1}^{n} \left(F_{m,k} - F_{i,k}\right) X_k = 0 \\
\sum\limits_{k=1}^{m} P_m - R = 0,
\end{cases} \tag{1}$$

$n-$число участков Жемочкина на пластинке;
$m-$число неизвестных сил, приложенных к точкам пластинки с одинаковыми перемещениями;
$i=1,\ldots,m-$номера участков, где приложены сосредоточенные неизвестные силы;
X_k $-$неизвестное усилие в связи Жемочкина на участке с номером k;
W_0,φ_x,φ_y $-$неизвестные линейное и угловые перемещения введенного в начале координат пластинки защемления;
$\delta_{i,k}$ $-$вертикальное перемещение центра участка Жемочкина с номером i упругого основания от единичной силы, распределенной равномерно по участку с номером k $(i=1,\ldots,n),(k=1,\ldots,n)$. Определяется для упругого полупространства [4] по формуле $\delta_{i,k}=\dfrac{1-\nu_0{}^2}{\pi E_0\Delta x}F_{i,k}+w_{i,k}$, где выражение для $F_{i,k}$ приводится в [4]. Для некоторых иных моделей упругого основания выражения для $F_{i,k}$ можно также найти в [4];
P_k $-$неизвестное сила, приложенная к центру участка на пластинке с номером k $(k=1,\ldots,m)$;
x_{Pk},y_{Pk} $-$координаты точки приложения неизвестных сил;
$w_{i,k}$ $-$ вертикальное перемещение (прогиб) центра участка Жемочкина с номером i на пластинке с защемленной нормалью от единичной силы, приложенной к центру участка пластинки с защемленной нормалью с номером k $(i=1,\ldots,n),(k=1,\ldots,n)$. Определяется по формуле, приведенной в [4];
$\Delta x,\Delta y$ $-$размеры прямоугольного участка Жемочкина;
E_0,ν_0 $-$упругие постоянные полупространства;
$R-$ равнодействующая внешних сил.

После решения системы (1) определяются вертикальные перемещения центров участков Жемочкина

$$W_i=\frac{1-\nu_0{}^2}{\pi E_0\Delta x}\sum_{k=1}^{n}F_{i,k}X_k\,, \tag{2}$$

по которым по известным формулам [1] находят внутренние усилия в пластинке.

Результаты

Рассмотрим металлическую базу размерами 640 мм х 520 мм х 40 мм на бетонном фундаменте $E_0 = 30600 МПА$, $\nu_0 = 0.17$. На базу симметрично опирается сварной двутавр 40 мм х 27 мм. Пластинка разбивалась на 16 х 13 прямоугольных участков Жемочкина. Контактная зона двутавра составила 22 участка с одинаковыми перемещениями центров участков. Система разрешающих уравнений получилась 233-го порядка.

На рис. 2, 3 приводятся линии равных контактных напряжений и вертикальных перемещений базы. Явно выделяется область, соответствующая области контакта двутавра с базой. Также можно отметить, что наибольшие контактные напряжения возникают в местах контакта краев полки двутавра с базой.

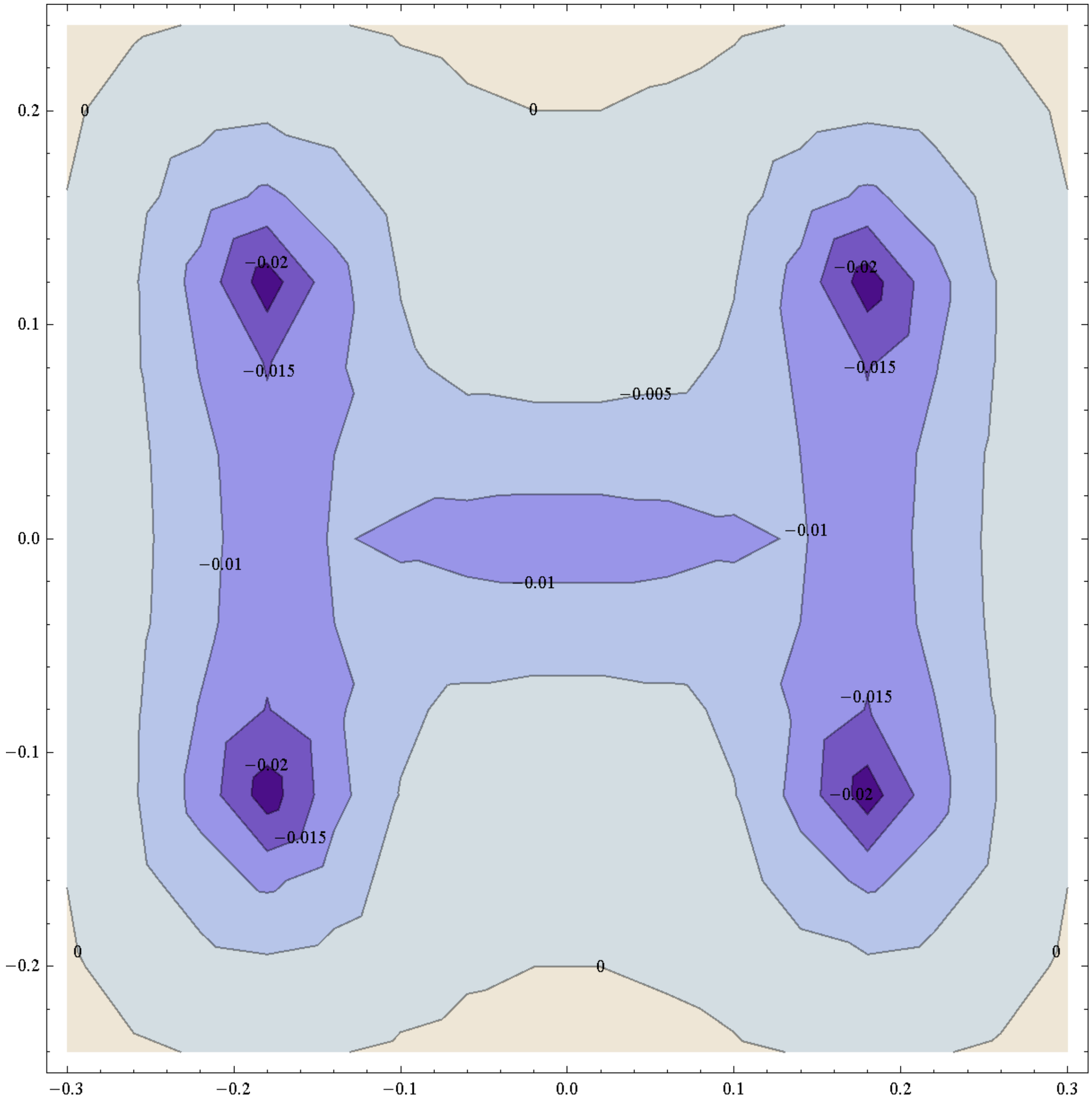


Рисунок 2 – Изолинии равных контактных напряжений под базой в долях от $\dfrac{R}{\Delta x\,\Delta y}$

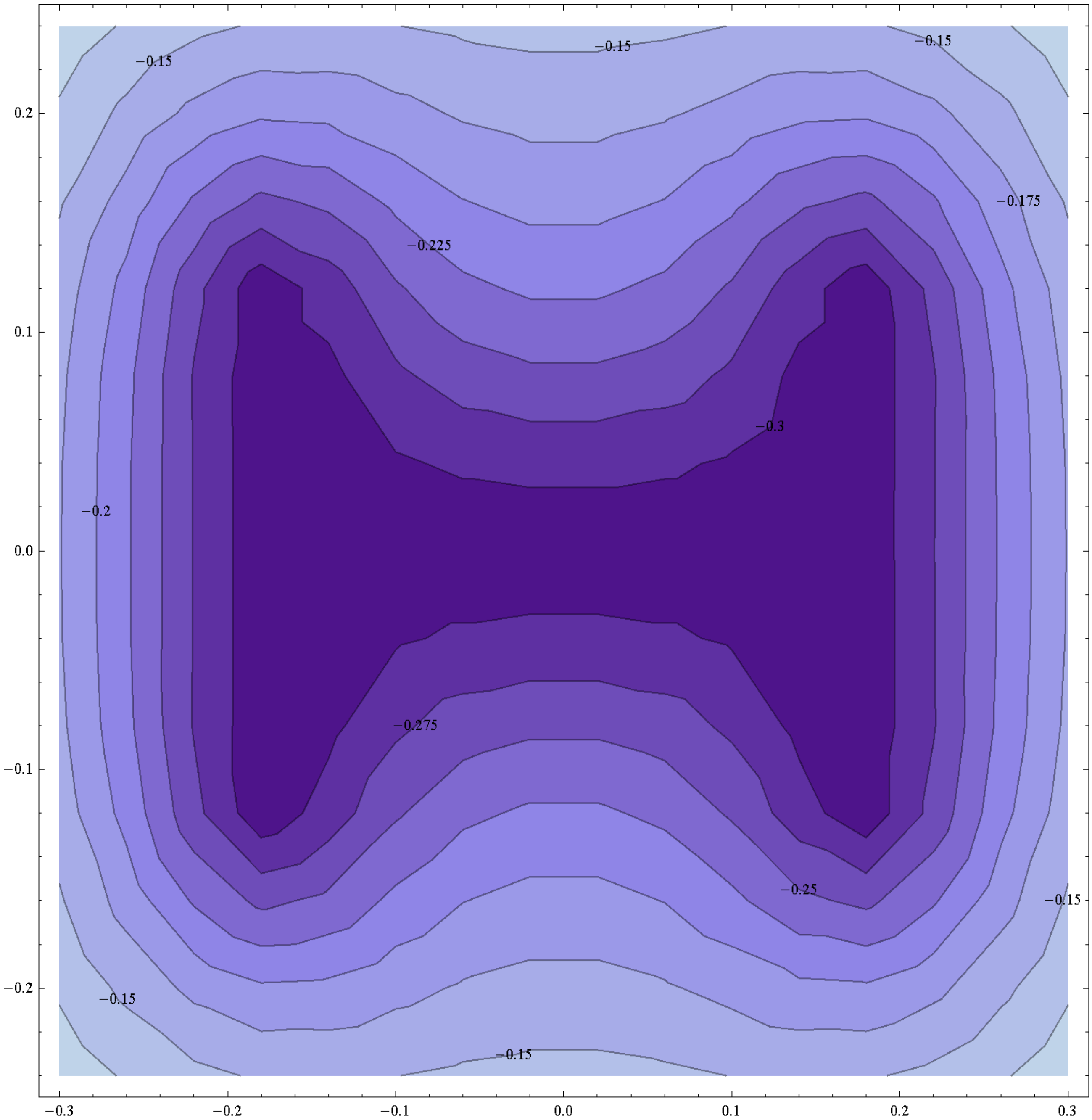
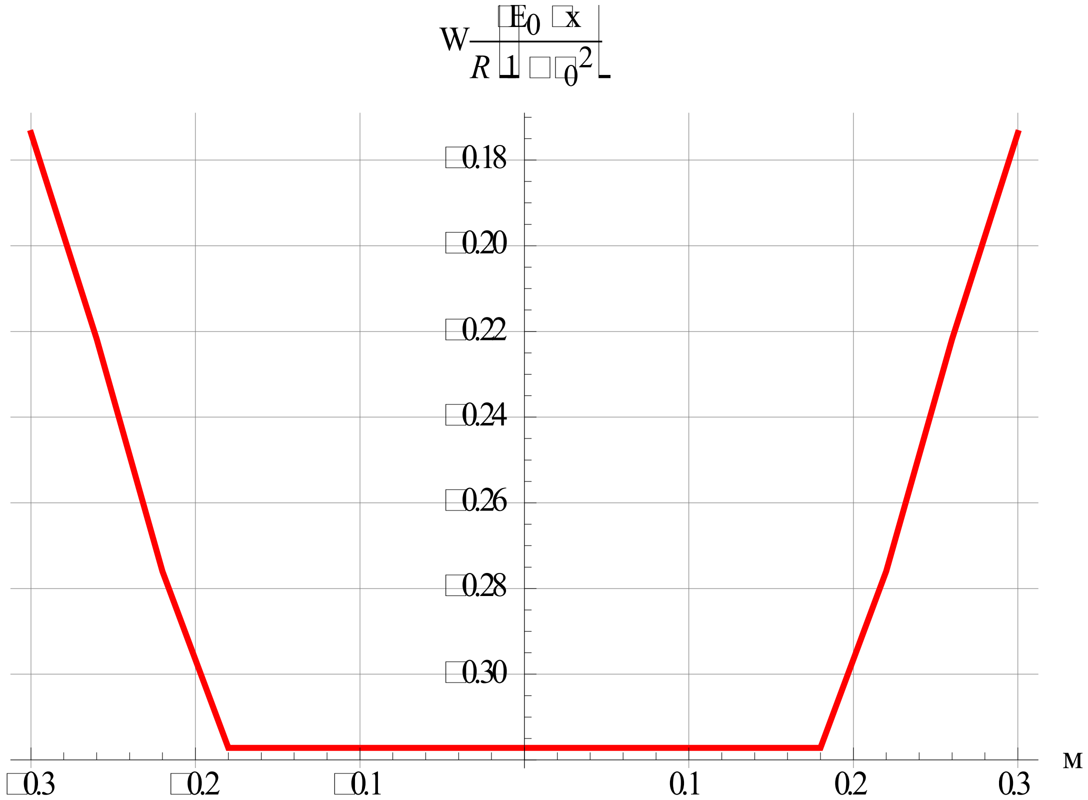


Рисунок 3 – Изолинии равных вертикальных перемещений в долях от $\dfrac{R\left(1-\nu_0{}^2\right)}{\pi E_0 \Delta x}$

На рис. 4, 5, 6 приводятся графики напряжений и перемещений, изгибающих моментов по характерным сечениям базы, соответствующие стенке и полкам двутавра.

На рис. 7 показаны вертикальные силы, возникающие на контакте двутавра и базы в долях от величины R центрально приложенной равнодействующей внешних сил. Также опять следует отметить, что максимальные силы возникают у краев полок двутавра. Близкие к нулю силы возникают в стенке двутавра вблизи полок двутавра. Расчеты показали явную неравномерность распределения давления двутавра на базу.



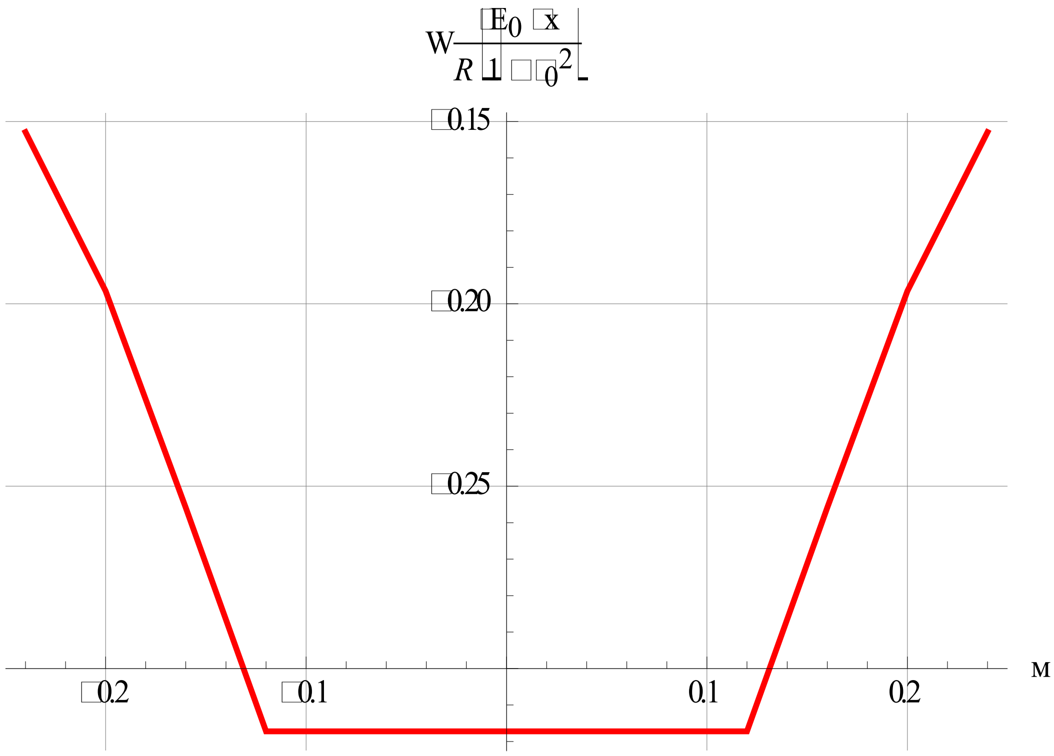
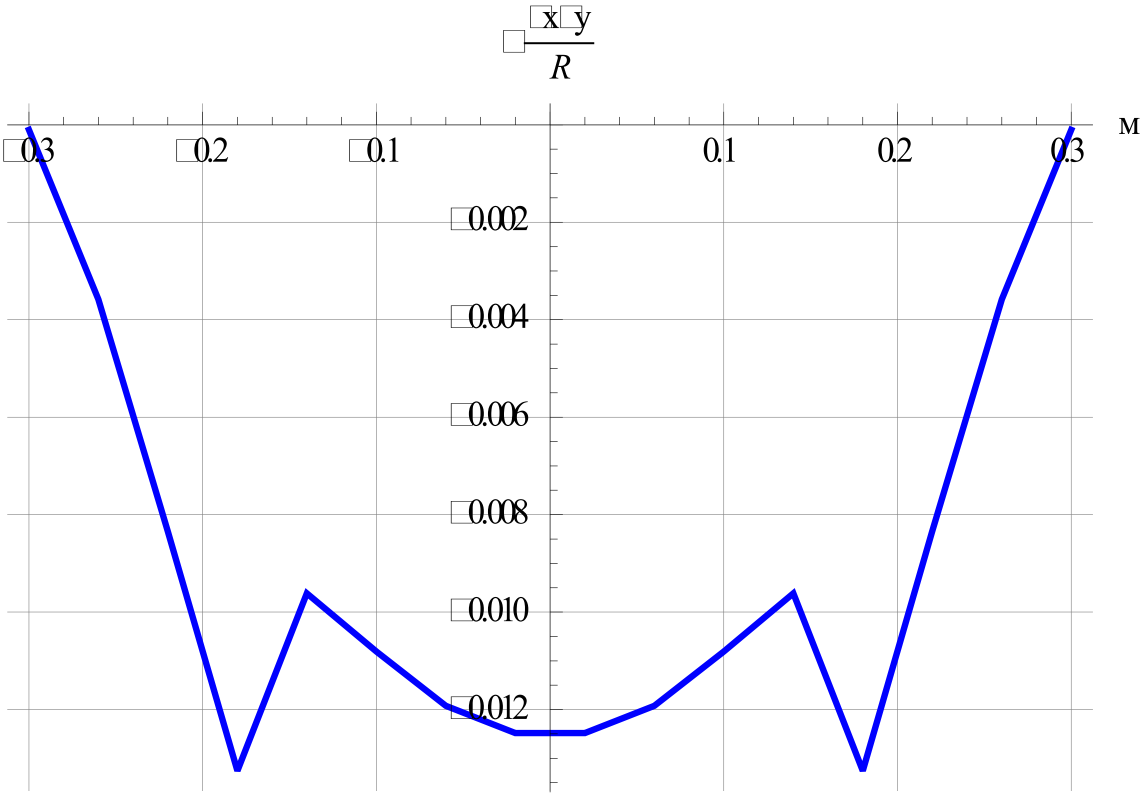


Рисунок 4 – Перемещения узлов базы по стенке двутавра и по вертикальной оси, совпадающей с полкой двутавра



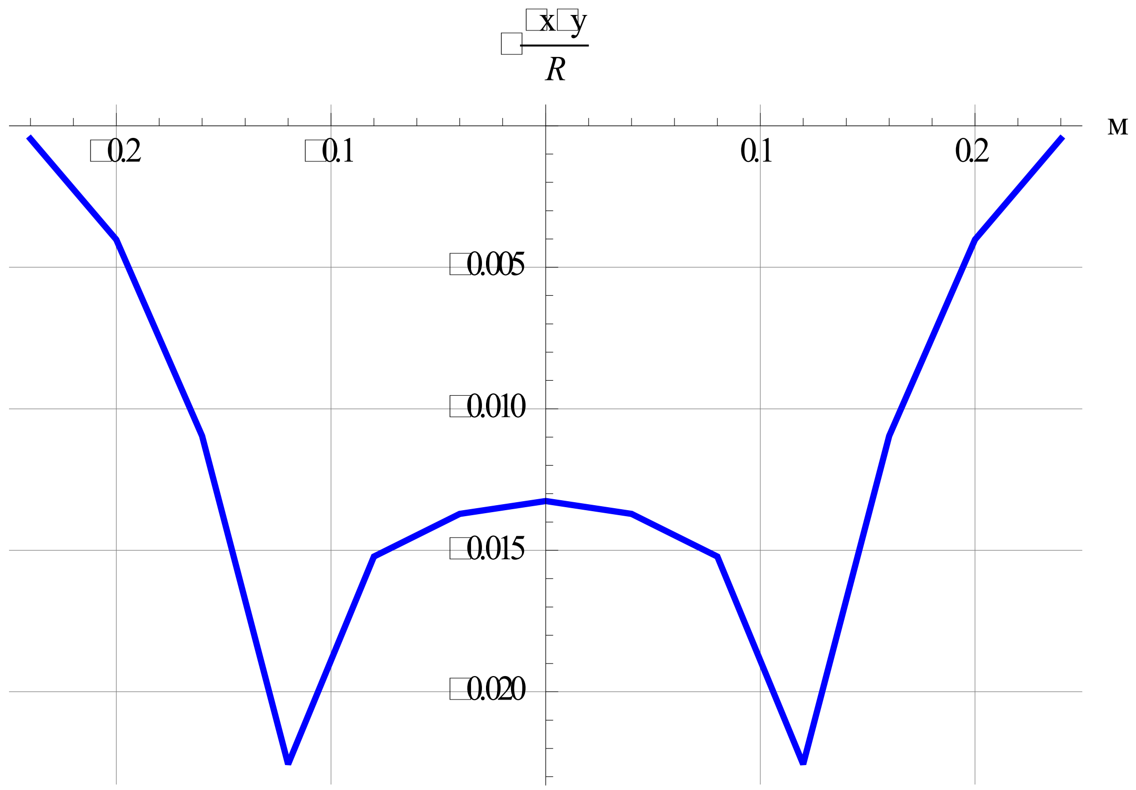


Рисунок 5 – Распределение контактных напряжений по стенке двутавра и по вертикальной оси, совпадающей с полкой двутавра

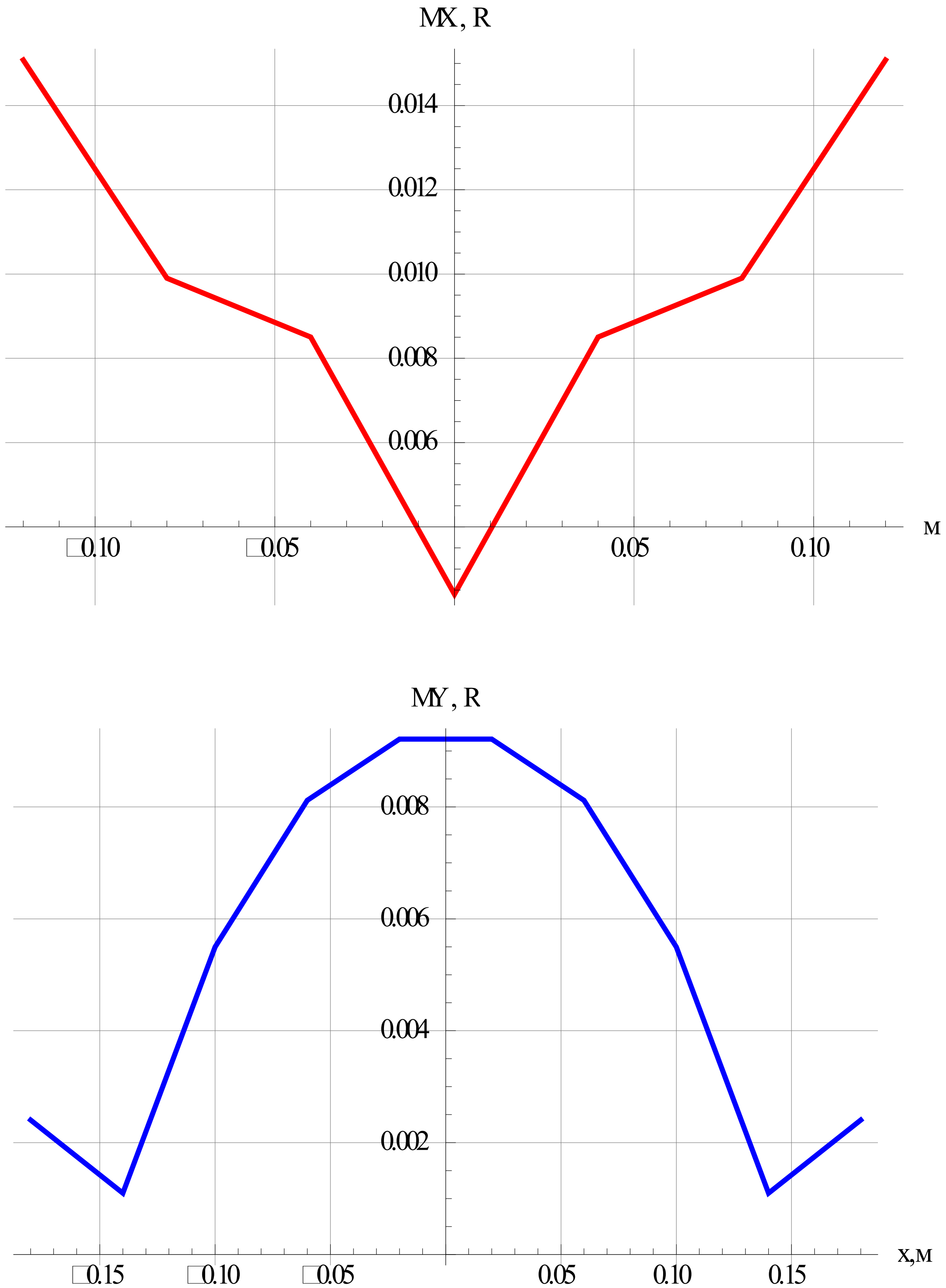


Рисунок 6 – Распределение изгибающих моментов под полкой и стенкой двутавра в пластинке

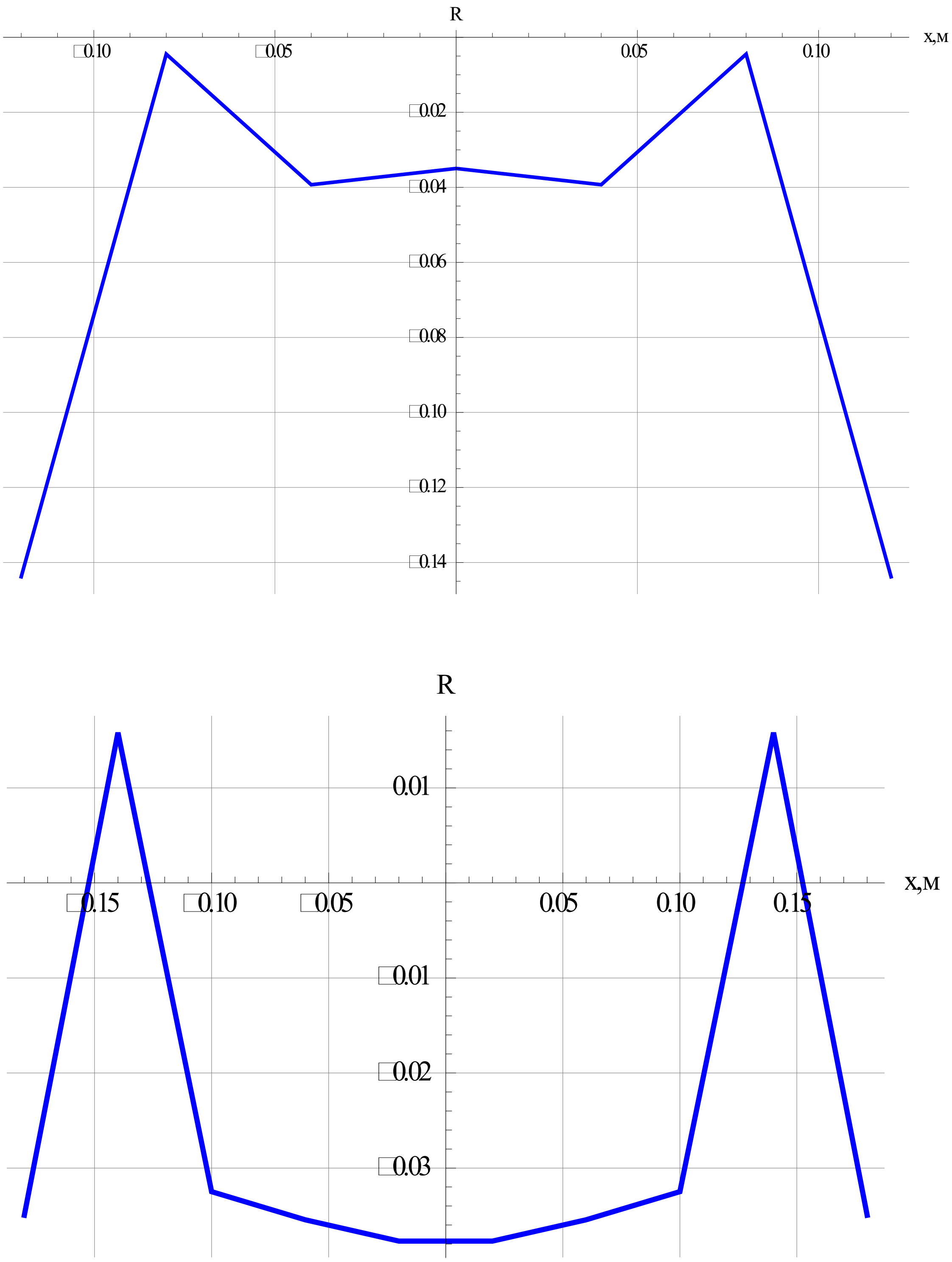


Рисунок 7 – Распределение сил давления двутавра на пластинку по характерным сечениям пластинки (в долях от R)

Выводы

- Изложен несложный подход, основанный на способе Жемочкина для решения контактных задач для пластинки на упругом основании при условии нахождения части пластинки в горизонтальной плоскости.

- Этот подход легко обобщается для пластинки на упругом основании, часть которой находится в наклонной плоскости. Это выполняется, например, при внецентренном сжатии металлической колонны или расчетах плитных фундаментов высотных сооружений на ветровую нагрузку [5].

- Предлагаемый подход позволяет найти вертикальные перемещения пластинки, распределение контактных напряжений и силы, возникающие на контакте между пластинкой и опираемой на нее конструкцией.

Список использованных источников

1. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности: учеб. для строит. спец. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990. – 400.
2. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. – 2-е издание, перераб. и дополн. – М.: Стройиздат, 1962. – 239 с.
3. Ржаницын, А. Р. Строительная механика: учебное пособие для строит. спец. вузов. – 2 изд., перераб. – М.: Высшая школа, 1991. – 439 с.
4. Босако,в С. В. Статические расчеты плит на упругом основании. – Минск, БНТУ, 2002. – 128 с.
5. Маликова, Т. А. Анализ натурных осадок плитных и коробчатых фундаментов многоэтажных зданий // Основания, фундаменты и механика грунтов. – № 2. – 1972. –С. 17-21.