МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

по курсу *«Математика»*

для студентов факультета
электронно-информационных систем

Дифференциальные уравнения

II семестр

Брест 2015

УДК 517.91 (076)

Настоящее методическое пособие содержит задачи и упражнения из раздела «Дифференциальные уравнения» общего курса «Математика». Представлены краткие теоретические сведения по темам и наборы заданий для аудиторных и индивидуальных работ. Пособие составлено в соответствии с действующей программой для студентов первого курса факультета электронно-информационных систем.

Составители: Каримова Т.И., доцент, к.ф.-м.н.
Лебедь С.Ф., доцент, к.ф.-м.н.
Журавель М.Г., ассистент
Гладкий И.И., доцент
Дворниченко А.В., ст. преподаватель

Рецензент: Мирская Е.И., доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Дифференциальные уравнения (ДУ) с разделяющимися переменными. Однородные ДУ первого порядка. Задача Коши

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную, функцию и ее производные или дифференциалы.

Порядком ДУ называется наивысший порядок входящей в него производной. ДУ первого порядка имеет вид

$$F(x,y,y')=0 \text{ или } y'=f(x,y).$$

Процесс нахождения решений ДУ называется *интегрированием ДУ*.

Общим решением ДУ первого порядка называется такая функция $y=\varphi(x,C)$, где C – произвольная постоянная, что:

1) $y=\varphi(x,C)$ является решением данного уравнения при любых значениях постоянной C;

2) для любого допустимого начального условия $y(x_0)=y_0$ найдется такое значение $C=C_0$, при котором функция $y=\varphi(x,C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Решение ДУ первого порядка вида $\Phi(x,y)=C$ или $\psi(x,y,C)=0$ называется *общим интегралом* уравнения.

Частным решением ДУ называется решение, полученное из общего решения при конкретном значении постоянной C.

Нахождение частного решения ДУ, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0)=y_0$, называется *решением задачи Коши.*

Уравнение вида

$$M(x)\cdot N(y)dx+P(x)\cdot Q(y)dy=0 \qquad (1)$$

называют *уравнением с разделяющимися переменными в форме дифференциалов.*

Его общее решение имеет вид

$$\int\frac{M(x)}{P(x)}dx+\int\frac{Q(y)}{N(y)}dy=C,$$

$P(x)\neq 0,\ N(y)\neq 0$.

Если решения уравнения $P(x)\cdot N(y)=0$ удовлетворяют уравнению (1) и не входят в найденное общее решение, то они являются *особыми решениями* уравнения (1).

Функция $\varphi(x,y)$ называется *однородной функцией степени n* относительно переменных *x* и *y*, если для любого $t\in$ Ў выполняется тождество $\varphi(tx,ty)=t^n\varphi(x,y)$.

Дифференциальное уравнение вида $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ называется *однородным ДУ* первого порядка, если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ –

однородные функции одной и той же степени. Однородное ДУ можно привести к виду $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Полученное уравнение с помощью подстановки $\frac{y}{x} = u(x)$ преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 1. Найти общее решение ДУ $(y^2 + xy^2) \cdot y' + x^2 - yx^2 = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$y^2(1+x)\,dy = x^2(y-1)\,dx.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив обе части уравнения на выражение $(y-1)(x+1) \neq 0$, получим уравнение

$$\frac{y^2}{y-1}dy = \frac{x^2}{x+1}dx.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения.

$$\int\left(y+1+\frac{1}{y-1}\right)dy = \int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

Получим общее решение исходного ДУ в виде:

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$$

Проверим, являются ли решениями заданного ДУ решения уравнения $(y-1)(x+1) = 0$, т.е. функции $y = 1,\ x = -1$.

При $x = -1,\ dx = d(-1) = 0$ и уравнение превращается в тождество. Значит, $x = -1$ – решение данного ДУ. При $y = 1,\ dy = d(1) = 0$ уравнение так же обращается в тождество. Таким образом, $y = 1,\ x = -1$ – особые решения, т.е. решения, которые нельзя получить из общего решения ни при каком значении константы C.

Ответ: $\frac{y^2 - x^2}{2} + x + y + \ln\left|\frac{y-1}{x+1}\right| = C$, особые решения $y = 1,\ x = -1$.

Пример 2. Найти частное решение уравнения

$$(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(2) = 1$.

Решение. Функции $f(x;y) = x^2 - 3y^2$ и $g(x;y) = 2xy$ являются однородными второй степени, т.к.

$$f(tx;ty) = (tx)^2 - 3(ty)^2 = t^2\left(x^2 - 3y^2\right) = t^2 f(x;y),$$

$$g(tx;ty) = 2tx \cdot ty = t^2 2xy = t^2 g(x;y),\ t \in \text{Ў}.$$

Преобразуем уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(3 \cdot \frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right).$$

Введем замену $\frac{y}{x} = u(x)$, тогда $y = u(x) \cdot x$; $y' = u(x) + x \cdot u'(x)$.

Подставим эти выражения в ДУ, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$x \cdot u'(x) + u = \frac{1}{2}\left(3u - \frac{1}{u}\right), \quad xu' = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right), \quad xu' = \frac{u^2 - 1}{2u},$$

$$xdu = \frac{u^2-1}{2u}dx, \quad \frac{2udu}{u^2-1} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{2udu}{u^2-1} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|u^2 - 1| = \ln|x| + \ln|C|, \quad u^2 - 1 = Cx, \quad \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 = Cx, \ C = const.$$

Общее решение имеет вид $y^2 - x^2 = Cx^3$.

Чтобы найти частное решение, определим постоянную C из условия $y(2) = 1$. Подставим эти значения в общее решение: $1 - 4 = 8C$, т.е. $C = \frac{3}{8}$.

Частное решение: $\frac{y^2}{x^2} = 1 - \frac{3}{8}x$, т.е. $y = \pm x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}$.

Ответ: $y = \pm x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}$.

Задания для аудиторной работы

1. Найти общее или частное решение следующих дифференциальных уравнений:

1) $xdx + \frac{2dy}{y+5} = 0$;

2) $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(y - x^2y\right)dy = 0$, $y(0) = 1$;

3) $xyy' = 1 - x^2$;

4) $y' \cdot \sin x = y \ln y$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$;

5) $\sin y \cdot \cos x\, dy = \cos y \cdot \sin x\, dx$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$;

6) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$;

7) $y' = -\frac{x+y}{y}$;

8) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$, $y(1) = 0$;

9) $y' = \frac{x + y - 3}{-x + y + 1}$.

2. По закону Ньютона скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела T и температурой воздуха T_0. Температура воздуха равна 20^oC, в течение 20 минут тело охлаждается от 100 до 60 градусов. Через сколько времени его температура понизится до 30 градусов?

3. Найти закон убывания лекарственного препарата в организме человека, если через 1 час после введения 10 мг препарата его масса уменьшилась вдвое. Какое количество препарата останется в организме через 2 часа?

4. Найти кривую, проходящую через точку (–1; 1), если угловой коэффициент касательной к ней в любой точке кривой равен квадрату ординаты точки касания.

Задания для индивидуальной работы

5. Найти общее или частное решения следующих дифференциальных уравнений:

1) $\left(2x+e^x\right)dx-\dfrac{dy}{y}=0$;
2) $xy'=y^2+1$;
3) $(x+xy)dy+(y-xy)dx=0,\ \ y(1)=1$;
4) $e^{x+3y}dy=xdx$;
5) $tgx\cdot\sin^2 ydx+\cos^2 x\cdot ctgydy=0$;
6) $xy'=y\ln\dfrac{x}{y}$;
7) $\left(x+2y\right)dx-xdy=0$;
8) $\left(x-y\right)dx+\left(x+y\right)dy=0$.

6. Найти общее или частное решение следующих дифференциальных уравнений:

1) $xy'-y=y^3$;
2) $\left(xy+x^3y\right)y'=1+y^2$;
3) $\left(1+e^x\right)yy'=e^x,\ \ y(0)=1$;
4) $3y'=\dfrac{y^2}{x^2}+9\dfrac{y}{x}+9$;
5) $y-xy'=x\sec\dfrac{y}{x}$;
6) $xy'=y\left(1+\ln y-\ln x\right),\ \ y\left(1\right)=e^2$;
7) $ydx+\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$;
8) $\left(2x-y+4\right)dy+\left(x-2y+5\right)dx=0$.

7. Найти общее или частное решение следующих дифференциальных уравнений:

1) $\left(4x^3-e^{-2x}\right)dx-\left(e^{2y}-\sin 3y\right)dy=0$;
2) $x\sqrt{4+y^2}dx-y\sqrt{1+x^2}dy=0$;
3) $4\left(yx^2+y\right)dy+\sqrt{5+y^2}dx=0$;
4) $\left(x^2+x\right)y'=2y+1$;
5) $y'\cos^2 x=y\ln y,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e$;
6) $xdy-(y+1)dx=0,\ \ y(2)=5$;
7) $\left(2x-\sin 4x\right)dx+\left(4y-e^{2y}\right)dy=0$;

8) $\left(e^{3x}-3x^2\right)dx-\left(\sin 2y-4y^3\right)dy=0$;

9) $(xy'-y)\,arctg\dfrac{y}{x}=x,\ \ y(1)=0$; 10) $xy'=\sqrt{y^2-x^2}$;

11) $xy'\cos\dfrac{y}{x}=y\cos\dfrac{y}{x}-x$; 12) $xy'=x\sin\dfrac{y}{x}+y,\ \ y(2)=\pi$;

13) $ydx+\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)dy=0$; 14) $\left(x^2+y^2\right)dx=2xydy,\ \ y(4)=0$;

15) $\left(y^2-2xy-x^2\right)dx+\left(x^2-2xy-y^2\right)dy=0$;

16) $(4x^2-xy+y^2)dx+(x^2-xy+4y^2)dy=0$;

17) $(x^2-3y^2)dx+2xydy=0,\ \ y(2)=1$.

8. Сосуд объемом 40 л содержит 80% азота и 20 % кислорода. В сосуд втекает каждую секунду 0,2 л азота, который непрерывно перемешивается и вытекает такое же количество смеси. Через какое время в сосуде будет 99% азота?

9. Записать уравнение кривой, проходящей через точку A (0; –2), если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен ординате этой точки, увеличенной в три раза.

10. Найти кривую, у которой длина отрезка касательной, заключенного между осями координат, равна расстоянию от точки касания до начала координат.

11. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (2; 0), если отрезок касательной к кривой между точкой касания и осью ординат имеет постоянную длину, равную 2.

Ответы: **4.** $xy=-1$. **7.** ≈ 600 с. **9.** $y=-2e^{3x}$. **10.** $y=\dfrac{C}{x},\ C=const$.

11. $y=\pm\left(\sqrt{4-x^2}+2\ln\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{|x|}\right)$.

2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x) \text{ или } A(x)y'+B(x)y+C(x)=0$$

называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка* относительно y и y'. С помощью подстановки $y=u(x)\cdot v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – неизвестные функции, данное уравнение приводится к виду

$$u'v+uv'+p(x)uv=q(x)\ \Rightarrow\ u'v+u\left(v'+p(x)v\right)=q(x).$$

Так как одна из неизвестных функций может быть выбрана произвольно, то в качестве $v(x)$ можно выбрать любое частное решение уравнения $v'+p(x)v=0$. Функция $u(x)$ определится из уравнения $u'(x)v(x)=q(x)$.

Таким образом, решение линейного уравнения сводится к последовательному решению двух уравнений с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций.

Дифференциальное уравнение вида $x'+p(y)x=q(y)$ называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно функции $x(y)$ и ее производной.

Решается с помощью подстановки $x(y)=u(y)v(y)$.

Рассмотрим уравнения вида

$$y'+p(x)y=q(x)y^n,\ n\in \text{Ў}\text{, или } x'+p(y)x=q(y)x^n,\ n\in \text{Ў}.$$

При $n=0$ получим линейные уравнения, при $n=1$ – уравнения с разделяющимися переменными, если $n\neq 0, n\neq 1$, то уравнения называются *уравнениями Бернулли*. Эти уравнения можно свести к соответствующим линейным уравнениям или применить подстановку

$$y=u(x)v(x)\ \left(x=u(y)v(y)\right).$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'+\dfrac{3y}{x}=x^2$.

Решение. Применим подстановку $y=uv$, $y'=u'v+uv'$. Получим уравнение $u'v+uv'+\dfrac{3uv}{x}=x^2$.

Сгруппируем второе и третье слагаемые $u'v+u\left(v'+\dfrac{3v}{x}\right)=x^2$.

Решим последовательно два уравнения: $v'+\dfrac{3v}{x}=0$ и $u'v=x^2$.

$$v'+\frac{3v}{x}=0;\ \Rightarrow\ \frac{dv}{dx}=-\frac{3v}{x};\ \Rightarrow\ \frac{dv}{v}=-\frac{3dx}{x};\ \Rightarrow\ \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{3dx}{x};\ \Rightarrow$$

$$\ln|v|=-3\ln|x|;\ \Rightarrow\ v=\frac{1}{x^3}.$$

$$u'v=x^2;\ \Rightarrow\ u'\cdot\frac{1}{x^3}=x^2;\ \Rightarrow\ \frac{du}{dx}=x^5;\ \Rightarrow\ du=x^5dx;\ \Rightarrow\ u=\int x^5dx=\frac{x^6}{6}+C.$$

Тогда общее решение данного уравнения

$$y=uv=\frac{1}{x^3}\left(\frac{x^6}{6}+C\right)=\frac{x^3}{6}+\frac{C}{x^3},\ \ C=const.$$

Ответ: $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{C}{x^3}$, $C=const$.

Пример 4. Решить задачу Коши: $2ydx+\left(y^2-6x\right)dy=0$, $y(6)=2$.

Решение. Заметим, что данное уравнение не является линейным относительно *y*. Разделим обе части уравнения на dy:

$$2y\frac{dx}{dy}+y^2-6x=0;\ \Rightarrow\ \frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=-\frac{y}{2}.$$

Воспользуемся подстановкой $x = u(y)v(y)$, $x' = u'v + uv'$.

Получим уравнение $u'v + u\left(v' - \dfrac{3}{y}v\right) = -\dfrac{y}{2}$.

Решим последовательно два уравнения: $v' - \dfrac{3v}{y} = 0$ и $u'v = -\dfrac{y}{2}$.

$$v' - \frac{3v}{y} = 0; \Rightarrow \frac{dv}{dy} = \frac{3v}{y}; \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{3dy}{y}; \Rightarrow \ln|v| = 3\ln|y|; \Rightarrow v = y^3.$$

Затем из уравнения $u'v = -\dfrac{y}{2}$ определяем функцию $u(y)$:

$$u'y^3 = -\frac{y}{2}; \Rightarrow u' = -\frac{1}{2y^2}; \Rightarrow du = -\frac{dy}{2y^2}; \Rightarrow u = \frac{1}{2y} + C.$$

Выпишем общее решение исходного уравнения

$$x = uv; \Rightarrow x = \left(\frac{1}{2y} + C\right)y^3 = Cy^3 + \frac{y^2}{2}.$$

Используем начальное условие $y = 2$ при $x = 6$, получим $6 = 8C + 2$. Отсюда $C = 0{,}5$.

Ответ: $x = 0{,}5\left(y^3 + y^2\right)$.

Задания для аудиторной работы

12. Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1) $y' - \dfrac{y}{x} = x$;
2) $xy' + 2y = x^2$;
3) $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$;
4) $x^2y' + 2xy = \ln x$, $y(e) = 1$;
5) $xy' + y = xy^2 \ln x$;
6) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

13. Решить ДУ, линейное относительно *x*: $\left(x - 2xy - y^2\right)y' + y^2 = 0$.

14. Указать типы ДУ и методы их решения:

1) $xy' + 2\sqrt{xy} = y$;
2) $y' = e^{2x} - e^x y$;
3) $y'\cos x = \dfrac{y}{\ln y}$;
4) $y' = \dfrac{y}{2x\ln y + y - x}$.

15. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 10 км/ч. На полном ходу ее мотор был выключен, и через 20 секунд скорость стала 6 км/ч. Найти скорость лодки через 2 минуты после остановки мотора, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости лодки.

16. Скорость распада радия пропорциональна количеству не распавшегося радия. Вычислить, через сколько лет от 1 кг радия останется 650 г, если известно, что за 1600 лет распадается половина первоначального количества.

Задания для индивидуальной работы

17. Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1) $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3$; 2) $xy' - 3y = x^4 e^x$;

3) $xy' + y - e^x = 0,\ y(a) = b$; 4) $y^2 dx - (2xy + 3)dy = 0$;

5) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = -xy^2$; 6) $y^2 dx = \left(x + ye^{-\frac{1}{y}}\right)dy,\ y(0) = -3$.

18. Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1) $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ y(0) = 2$; 2) $y' + \dfrac{6y}{x} = x^3,\ y(1) = 3$;

3) $2xy\dfrac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$; 4) $y' + 3y = e^{2x}y^2,\ y(0) = 1$;

5) $y' - \dfrac{y}{x-3} = \dfrac{y^2}{x-3},\ y(1) = -2$; 6) $y' = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$.

19. Указать типы ДУ и методы их решения:

1) $\left(1 + e^{2x}\right)y^2 dy - e^x dx = 0$; 2) $xy' + y - y^2 = 0$;

3) $2x\cos^2 y dx + \left(2y - x^2 \sin 2y\right)dy = 0$; 4) $y^2 + x^2 y' = xyy'$.

20. Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = e^x (x+1)^2$; 2) $y' - \dfrac{4y}{x} = 3 + 2x - x^2,\ y(1) = 4$;

3) $y' + \dfrac{4y}{x} = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^4}$; 4) $xy' - 3y = x^4 - 2x^3 + 5x$;

5) $xy' + 2y = 2 + 3x + x^2,\ y(1) = 3$; 6) $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{4x - 5}{x^2}$;

7) $y' + ytgx = \dfrac{1}{\cos x},\ y(\pi) = 5$; 8) $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$;

9) $\left(1 + x^2\right)y' = xy + x^2 y^2$; 10) $2xydx + \left(y - x^2\right)dy = 0$;

11) $y' - 7y = e^{3x}y^2,\ y(0) = 2$; 12) $xdy = \left(e^{-x} - y\right)dx,\ y(1) = 1$;

13) $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}$; 14) $x^2 y' + 2x^3 y = y^2\left(1 + 2x^2\right)$;

15) $2\sin x \cdot y' + y\cos x = y^3 (x\cos x - \sin x)$; 16) $y' + \dfrac{y}{x+1} = \dfrac{1}{2}(x+1)^3 y^3$.

21. Корабль замедляет свой ход под действием силы сопротивления воды, которая пропорциональна скорости корабля. Начальная скорость корабля 10 м/с, а его скорость через 5 секунд равна 8 м/с. Определить время, когда скорость корабля уменьшится до 1 м/с.

22. Найти уравнения кривых, для которых площадь треугольника, образованного осью *Ox*, касательной и радиус-вектором точки касания, постоянна и равна *a*.

Ответы: **12.** 3) $y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{C}{x^3}$, $y_ч=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}$. **13.** $x=y^2+Cy^2e^{\frac{1}{y}}$. **15.** 0,467 км/ч. **16.** через 1000 лет. **22.** $xy=Cy^2+a^2$.

3. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка. Краевые задачи для ДУ 2-го порядка

Рассмотрим некоторые типы уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка.

1. Уравнения вида $y^{(n)}=f(x)$.

Общее решение находим методом *n*-кратного интегрирования.

Умножим обе части исходного уравнения на *dx* и проинтегрируем полученное равенство, получим уравнение $(n-1)$-го порядка:

$$y^{(n-1)}=\int y^{(n)}dx=\int f(x)dx=\varphi_1(x)+C_1.$$

Умножим обе части полученного уравнения на *dx* и проинтегрируем его, получим уравнение $(n-2)$-го порядка:

$$y^{(n-2)}=\int(\varphi_1(x)+C_1)dx=\varphi_2(x)+C_1x+C_2.$$

После *n*-кратного интегрирования получим общее решение уравнения:

$$y=\varphi_n(x)+\bar{C}_1x^{n-1}+\bar{C}_2x^{n-2}+\ldots+\bar{C}_{n-1}x+\bar{C}_n,$$

где $\bar{C}_i$ $(i=\overline{1,n})$ – константы, связанные определенным образом с произвольными постоянными $C_1,C_2,\ldots,C_n$.

Следующие случаи уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка, рассмотрим на примере дифференциального уравнения второго порядка. Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид $y''=f(x,y,y')$.

2. Уравнение явно не содержит функции y: $y''=f(x,y')$.

С помощью замены $y'=p(x)$, $y''=p'(x)$, получим ДУ первого порядка $p'(x)=f(x,p)$. Решение этого уравнения зависит от его типа.

Запишем общее решение в виде $p=\varphi(x,C_1)$.

Подставим вместо найденной функции $p(x) = y'(x)$ и решим ДУ с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1); \Rightarrow dy = \varphi(x, C_1)dx; \Rightarrow y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

3. Уравнение явно не содержит переменную x: $y'' = f(y, y')$,

Полагая, что $y' = p(y)$, $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p = p'p$, понизим порядок исходного уравнения на единицу.

Пример 5*.* Найти частное решение уравнения

$$xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}, \; y(1) = e, \; y'(1) = e^2.$$

Решение. Данное дифференциальное уравнение является уравнением второго порядка, которое явно не содержит переменную *y*. Понизим порядок уравнения с помощью замены $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$. Исходное уравнение превращается в однородное ДУ первого порядка относительно искомой функции $p(x)$: $xp' = p \ln \frac{p}{x} \Rightarrow p' = \frac{p}{x} \ln \frac{p}{x}$.

Решаем его известным способом:

$$\frac{p(x)}{x} = u(x), \; p(x) = x \cdot u(x), \; p' = u + xu'; \Rightarrow u + xu' = u \ln u.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}; \Rightarrow \ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln|C|; \Rightarrow |\ln u - 1| = |Cx|; \Rightarrow$$

$$\ln u - 1 = \pm Cx; \; \pm C = C_1 \Rightarrow \ln u - 1 = C_1 x; \Rightarrow$$

$$u = e^{1 + C_1 x} \Rightarrow p = xe^{1 + C_1 x} \Rightarrow y' = xe^{1 + C_1 x}.$$

Воспользуемся начальным условием $y'(1) = e^2$ или $p(1) = e^2$. Тогда:

$$e^2 = 1 \cdot e^{1 + C_1}; \; 2 = 1 + C_1; \; C_1 = 1.$$

Следовательно, получаем уравнение:

$$y' = xe^{x+1}; \Rightarrow y = \int xe^{x+1} dx = xe^{x+1} - e^{x+1} + C_2.$$

Из начального условия $y(1) = e$ находим значение постоянной C_2:

$$e = e^2 - e^2 + C_2; \Rightarrow C_2 = e.$$

Итак, частным решением исходного уравнения является функция

$$y = (x - 1)e^{x+1} + e.$$

Ответ: $y = (x - 1)e^{x+1} + e.$

Краевая задача – задача об отыскании решения заданного дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений), удовлетворяющего *краевым* (граничным) условиям на концах интервала или на границе области. Отличие краевой задачи от задачи Коши (задачи с начальными условиями) состоит в том, что решение дифференциального уравнения должно удовлетворять граничным условиям, связывающим значения искомой функции более чем в одной точке.

Простейшим представителем краевой задачи является двухточечная граничная задача, для которой граничные условия задаются в двух точках, как правило, на концах интервала, на котором ищется решение. Двухточечные граничные задачи встречаются во всех областях науки и техники.

Пример 6. Для дифференциального уравнения решить краевую задачу, т.е. найти решение, удовлетворяющее краевым условиям:

$$yy' + y'^2 + yy'' = 0,\ y = 1 \text{ при } x = 0,\ y = 0 \text{ при } x = -1.$$

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка, в котором явно отсутствует переменная x. Понизим порядок уравнения заменой $y' = p(y)$, $y'' = p'p$. Получим уравнение первого порядка:

$$yp + p^2 + ypp' = 0;\ \Rightarrow\ p(yp' + p + y) = 0;\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = 0, \\ yp' + p + y = 0. \end{array}\right.$$

В данном случае $p = 0$ не подходит из-за краевых условий. Решаем однородное ДУ первого порядка известным способом:

$$p' = -\frac{p}{y} - 1;\ \Rightarrow\ \frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y} - 1.$$

Замена $\dfrac{p}{y} = u(y)$, $p = yu$, $p' = u + yu'$

$$u + yu' = -u - 1;\ \Rightarrow\ yu' = -2u - 1;\ \Rightarrow\ ydu = -(2u+1)dy;\ \Rightarrow$$

$$\frac{du}{2u+1} = -\frac{dy}{y};\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\ln|2u+1| = -\ln|y| + \frac{1}{2}\ln|C|;\ \Rightarrow\ 2u + 1 = \frac{C_1}{y^2}.$$

Пользуясь тем, что $u(y) = \dfrac{p}{y}$, получим уравнение:

$$2\frac{p}{y} = \frac{C_1}{y^2} - 1;\ \Rightarrow\ 2\frac{dy}{dx} = \frac{C_1 - y^2}{y};\ \Rightarrow\ \frac{2ydy}{C_1 - y^2} = dx;\ \Rightarrow -\ln|C_1 - y^2| = x - C_2;\ \Rightarrow$$

$$C_1 - y^2 = e^{C_2 - x};\ \Rightarrow\ C_1 - y^2 = \bar{C}_2 e^{-x},\quad \text{где } \bar{C}_2 = e^{C_2},\ \ C_1, \bar{C}_2 - \forall\ const$$

Подберем постоянные так, чтобы выполнялись краевые условия $y(0) = 1$, $y(-1) = 0$.

$$\begin{cases} C_1 - 1 = \bar{C}_2 e^0, \\ C_1 - 0 = \bar{C}_2 e^1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \bar{C}_2 + 1, \\ C_1 = \bar{C}_2 e, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{C}_2 = \dfrac{1}{e-1}, \\ C_1 = \dfrac{1}{e-1} + 1 = \dfrac{e}{e-1}. \end{cases}$$

Подставляя значения постоянных в общий интеграл, получим решение данной краевой задачи:

$$\frac{e}{e-1}-y^2=\frac{1}{e-1}e^{-x} \text{ или } y^2=\frac{e-e^{-x}}{e-1}.$$

Ответ: $y^2=\dfrac{e-e^{-x}}{e-1}$.

Замечание. Отметим, что краевая задача не всегда разрешима.

Задания для аудиторной работы

23. Проинтегрировать следующие уравнения:

1) $y'''=x+\cos x$; 2) $y^{IV}=\dfrac{y'''}{x}$; 3) $x^2y''+xy'=1$; 4) $yy''+y'^2=1$.

24. Найти частное решение уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

1) $y'''=\dfrac{x}{(x+2)^5}$, $y(1)=y'(1)=y''(1)=0$;

2) $(x+1)y''+xy'^2=y'$, $y(1)=-2$, $y'(1)=4$;

3) $2yy''=(y')^2$, $y(-1)=4$, $y'(-1)=1$.

25. Материальная точка массы m падает на землю с высоты h. Найти закон движения точки, если сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости.

Задания для индивидуальной работы

26. Проинтегрировать следующие ДУ:

1) $y'''=x+\cos x$; 2) $x^2y'''=(y'')^2$;

3) $xy''=y'(\ln y'-\ln x)$; 4) $y''tgy=2(y')^2$.

27. Проинтегрировать следующие ДУ:

1) $y'''=x^2-\sin x$; 2) $y'''=(y'')^2$;

3) $xy''-y'=x^2e^x$; 4) $2yy''=3y'^2+4y^2$.

28. Проинтегрировать следующие ДУ:

1) $y''=x\sin x$; 2) $y'''=xe^x$;

3) $(1+x^2)y''-2xy'=0$; 4) $xy''+y'=(y')^2$.

29. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

1) $y''=\dfrac{\ln x}{x^2}$, $y(1)=3$, $y'(1)=1$;

2) $xy''' - y'' = x^2 + 1,\ y(-1) = 0,\ y'(-1) = 1,\ y''(-1) = 0$;

3) $y'' = e^{2y},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

30. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

1) $xy''' = 2,\ y(1) = 0{,}5,\ y'(1) = y''(1) = 0$;

2) $y''\left(x^2 + 1\right) = 2xy',\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$;

3) $y^3 y'' + 1 = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0$.

31. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

1) $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'},\ y(2) = 0,\ y'(2) = 4$;

2) $x^2 y''' = y''^2,\ y(1) = \dfrac{7}{6},\ y'(1) = 2,\ y''(1) = 1$;

3) $y'' = y'^2 - y,\ y(1) = -\dfrac{1}{4},\ y'(1) = \dfrac{1}{2}$;

4) $2y'' = 3y^2,\ y(2) = 1,\ y'(2) = -1$;

5) $2(y')^2 = (y-1)y'',\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

32. Автомобиль движется по горизонтальному участку пути со скоростью 90 км/час. В некоторый момент времени он начинает тормозить. Сила торможения равна 0,3 от веса автомобиля. В течение какого промежутка времени он будет двигаться от начала торможения до полной остановки и какой путь пройдет за это время (какова длина тормозного пути)?

33. Если тело не слишком быстро погружается в жидкость, то сопротивление приблизительно пропорционально скорости. Найти закон движения тяжелой материальной точки, погружающейся в жидкость без начальной скорости.

Ответы: **27.** 4) $y\cos^2(x + C_1) = C_2$. **30.** 2) $y = x^3 + 3x + 1$. **32.** 8,5 с; 106,3 м. **33.** $y = \dfrac{gm^2}{k^2}\left(e^{-\frac{kt}{m}} - 1\right) + \dfrac{gm}{k}t$.

4. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0$$

называется *линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ)* второго порядка с постоянными коэффициентами p и q.

После замены $y = e^{kx}$ получим *характеристическое уравнение*

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Пусть $k_1,\ k_2$ – корни характеристического уравнения.

Общее решение исходного уравнения имеет вид:

1) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, если $k_1 \neq k_2,\ \ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$;

2) $y = e^{k_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right)$, если $k_1 = k_2,\ \ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$;

3) $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$, если $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$.

ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Общим решением уравнения является функция

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – частные линейно независимые решения данного ЛОДУ.

Частные решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ этого уравнения ищут в виде $y = e^{kx}$. Для определения k составляют характеристическое уравнение

$$k^n + a_{n-1} k^{n-1} + a_{n-2} k^{n-2} + \ldots + a_1 k + a_0 = 0.$$

Каждому действительному корню k характеристического уравнения соответствует одно частное решение ДУ вида e^{kx}.

Каждому действительному корню k кратности m соответствует m линейно независимых частных решений ДУ:

$y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}, \ldots, y_m = x^m e^{kx}$.

Если $\alpha \pm i\beta$ – пара комплексных корней характеристического уравнения кратности m, то ей соответствует $2m$ линейно независимых решений ДУ: $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$; $xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$; ..., $x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Пример 7. Найти общие решения ЛОДУ:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$; 2) $y'' + 8y' + 16y = 0$; 3) $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Решение. Для каждого случая составляем характеристическое уравнение, находим его корни, выписываем соответствующие линейно независимые решения ДУ и их общее решение:

1) $k^2 - 5k + 6 = 0,\ k_1 = 2,\ k_2 = 3;\ y_1 = e^{2x},\ y_2 = e^{3x};\ y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

2) $k^2 + 8k + 16 = 0,\ k_1 = -4,\ k_2 = -4;\ y_1 = e^{-4x},\ y_2 = xe^{-4x};\ y = e^{-4x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

3) $k^2 - 6k + 13 = 0,\ k_1 = 3 - 2i,\ k_2 = 3 + 2i;\ y_1 = e^{3x}\cos 2x,\ y_2 = e^{3x}\sin 2x$;

$$y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Ответ:

1) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$; 2) $y = e^{-4x}\left(C_1 + C_2 x\right)$; 3) $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Пример 8. Найти общее решение для ЛОДУ высших порядков:

1) $y''' - 3y'' - 10y' + 24y = 0$; 2) $y^{IV} + 3y'' - 4y = 0$; 3) $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

Решение. Действуем по вышеизложенному плану:

1) $k^3 - 3k^2 - 10k + 24 = 0,\ k_1 = 2,\ k_2 = -3,\ k_3 = 4;\ \ y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + C_3e^{4x}$;

2) $k^4 + 3k^2 - 4 = 0,\quad (k^2 - 1)(k^2 + 4) = 0,\quad k_1 = -1,\ k_2 = 1,\ k_3 = -2i,\ k_4 = 2i;$
$y = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$;

3) $k^4 + 2k^2 + 1 = 0,\ \ (k^2 + 1)^2 = 0,\ \ k_{1,2} = \pm i,\ \ k_{3,4} = \pm i;\ y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x,$;
$y_3 = x\cos x,\quad y_4 = x\sin x;\ \ y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x$.

Ответ: 1) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + C_3e^{4x}$;

2) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$;

3) $y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x$.

Задания для аудиторной работы

34. Найти общее решение следующих уравнений:

1) $y'' + y' - 2y = 0$; 2) $y'' - 9y = 0$; 3) $y'' - 2y' + y = 0$;
4) $y'' - 10y' + 25y = 0$; 5) $y'' + 6y' + 13y = 0$; 6) $y'' + 36y = 0$.

35. Найти частное решение следующих уравнений:

1) $y'' - 4y' + 3y = 0,\ \ y(0) = 6,\ \ y'(0) = 10$;

2) $y'' + 4y' + 29y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 15$.

36. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$, проходящую через точку (0; 2) и касающуюся в этой точке прямой $y = x + 2$.

37. Зная корни характеристического уравнения, записать общее решение однородного уравнения:

1) $\lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = 0;\ \lambda_{3,4} = 5$; 2) 1) $\lambda_{1,2} = 2 \pm i;\ \lambda_{3,4} = -1 \pm 3i$.

38. Найти общее решение следующих уравнений:

1) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$; 2) $y''' - 2y'' + 2y' = 0$; 3) $y^{VI} + 2y^{V} + 2y^{IV} = 0$.

39. Найти частное решение уравнения:

$y''' + y'' - 5y' + 3y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1,\ y''(0) = -2$.

40. Материальная точка массы 1 *г* отталкивается вдоль прямой от некоторого центра с силой, пропорциональной ее расстоянию от этого центра (коэффициент пропорциональности равен 4). Сопротивление среды пропорционально скорости движения (коэффициент пропорциональности равен 3). В начале движения расстояние от центра равно 1 *см*, а скорость – нулю. Найти закон движения материальной точки.

Задания для индивидуальной работы

41. Найти общее решение следующих уравнений:

1) $y'' + 2y' - 8y = 0$; 2) $y'' + 3y' = 0$; 3) $y'' - 6y' + 34y = 0$;

4) $4y'' + 9y = 0$; 5) $y'' + 6y' + 9y = 0$.

42. Найти общее решение следующих уравнений:

1) $y'' - y' = 0$; 2) $y'' - 4y' + 13y = 0$; 3) $y'' - 4y' = 0$;

4) $y'' + 16y = 0$; 5) $y'' + 8y' + 16y = 0$; 6) $y'' - 10y' + 29y = 0$;

7) $y'' - 2y' - 15y = 0$; 8) $y'' - 12y' + 36y = 0$; 9) $y'' + 8y' + 25y = 0$.

43. Найти частное решение следующих уравнений:

1) $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$;

2) $y'' + 3y' = 0, y(0) = 0, y(3) = 0$;

3) $4y'' + 4y' + y = 0,\ \ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$.

44. Найти общее решение следующих уравнений:

1) $y''' - 5y'' + 16y' - 12y = 0$; 2) $y^{IV} - 8y'' + 7y = 0$;

3) $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$; 4) $y^{VI} - 3y^{V} + 3y^{IV} = 0$.

45. Найти общее решение следующих уравнений:

1) $y^{IV} + 4y'' = 0$; 2) $y^{IV} - 4y''' + 4y'' = 0$;

3) $y^{IV} + 8y' = 0$; 4) $y^{IV} - 6y'' + 9y = 0$.

46. Найти частное решение уравнения:

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3$.

47. Частица массы 1 *г* движется по прямой к точке *A* под действием некоторой силы притяжения, пропорциональной расстоянию ее от точки *A*. На расстоянии 1 *см* действует сила 10^{-6} *Н*. Сопротивление среды пропорционально скорости движения и равно $4 \cdot 10^{-6}$ *Н* при скорости 1 *см/с*. В момент $t = 0$ частица расположена на расстоянии 10 *см* от точки *A* и скорость ее равна нулю. Найти зависимость расстояния от времени и вычислить это расстояние для $t = 3\,c$.

Ответы: **35.** 1) $y = 2e^{3x} + 4e^{x}$; 2) $y = 3e^{-2x}\sin 5x$. **36.** $y = -\frac{1}{2}e^{3x} + \frac{5}{2}e^{x}$.

39. $y = \frac{1}{4}e^{x} - 4e^{-3x}$. **40.** $y = \frac{1}{5}\left(4e^{t} + e^{-4t}\right)$. **43.** $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(2 + x\right)$.

47. $s = e^{-0,2t}\left(10\cos 0,245t + 8,16\sin 0,245t\right),\ s(3) \approx 7,07$ *см*.

5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f\left(x\right)$$

называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) с постоянными коэффициентами.

Общее решение ЛНДУ можно записать в виде суммы

$$y = \bar{y} + y_*,$$

где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, а y_* – частное решение данного уравнения. Его можно получить *методом неопределенных коэффициентов*.

Пусть правая часть уравнения представлена следующими функциями:

1) $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени *n*.

Частное решение в этом случае будем искать в виде $y_* = x^r Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени *n* с неопределенными коэффициентами. Число *r* равно кратности числа α по отношению к корням характеристического уравнения.

2) $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right)$.

Частное решение в этом случае будем искать в виде

$$y_* = x^r e^{\alpha x}\left(S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx\right),$$

где $S_N(x), T_N(x)$ – многочлены степени $N = \max\{n, m\}$. Число *r* равно кратности чисел $\alpha \pm i\beta$ по отношению к корням характеристического уравнения.

Пример 9. Найти общее решение ЛНДУ $y'' - y' - 2y = 4xe^x$.

Решение. $y = \bar{y} + y_*$.

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $\bar{y}$.

$$y'' - y' - 2y = 0, \quad k^2 - k - 2 = 0, \; k_1 = -1, \; k_2 = 2; \; \bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Правая часть заданного уравнения $f(x) = 4xe^x$, значит $\alpha = 1$, $r = 0$. Поэтому частное решение будем искать в виде: $y_* = (Ax + B)e^x$. Методом неопределенных коэффициентов найдем частное решение данного уравнения y_*. Дифференцируя y_* два раза и подставляя производные в исходное уравнение, получим:

$$2Ae^x + (Ax + B)e^x - Ae^x - (Ax + B)e^x - 2(Ax + B)e^x = 4xe^x.$$

Сокращаем обе части равенства на e^x, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим:

$$A - 2Ax - 2B = 4x, \quad -2A = 4, \quad A - 2B = 0; \quad A = -2, \; B = -1.$$

Т.о, частное решение неоднородного уравнения $y_* = -(2x + 1)e^x$.

Тогда общее решение уравнения $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - (2x + 1)e^x$.

Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - (2x + 1)e^x$.

Пример 10. Найти общее решение уравнения $y'' + y = x \sin x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k = \pm i$, тогда общим решением однородного уравнения будет функция

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Частное решение y_* будем искать в виде

$$y_* = x\left((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\right).$$

Найдем производные y'_*, y''_*.

$$y_* = \left(Ax^2+Bx\right)\cos x + \left(Cx^2+Dx\right)\sin x;$$

$$y'_* = \left(2Ax+B\right)\cos x - \left(Ax^2+Bx\right)\sin x + \left(2Cx+D\right)\sin x + \left(Cx^2+Dx\right)\cos x;$$

$$y''_* = 2A\cos x - 2\left(2Ax+B\right)\sin x - \left(Ax^2+Bx\right)\cos x + 2C\sin x +$$

$$+2\left(2Cx+D\right)\cos x - \left(Cx^2+Dx\right)\sin x.$$

Подставим их в заданное уравнение:

$$2A\cos x - 2(2Ax+B)\sin x + 2C\sin x + 2(2Cx+D)\cos x = x\sin x$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$, $x\sin x$. Получим четыре уравнения:

$$2A+2D=0;\quad 4C=0;\quad -2B+2C=0;\quad -4A=1.$$

Из которых $A=-\dfrac{1}{4}, D=\dfrac{1}{4}, B=C=0.$

Отсюда:

$$y_* = -\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x \text{ и } y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x.$$

Ответ: $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{x^2}{4}\cos x + \dfrac{x}{4}\sin x.$

Задания для аудиторной работы

48. Найти общее решение следующих уравнений:

1) $y''-3y'+2y = \begin{cases} xe^{-x}; \\ (2x+3)e^x; \\ e^{2x}; \end{cases}$ 2) $y''-10y' = \begin{cases} 10x^2+18x+8; \\ (3x-4)e^{5x}; \end{cases}$

3) $y''+9y = \begin{cases} 3\sin x + 6\cos x; \\ 2\sin 3x - 4\cos 3x; \end{cases}$ 4) $y^{IV} - y = \begin{cases} 3xe^x; \\ \sin x. \end{cases}$

49. Найти общее решение уравнения $y''-2y'+y = \sin x + e^{-x}$.

50. Найти частное решение следующих уравнений:

1) $y''+y = 2\cos x,\ \ y(0)=1,\ y'(0)=0;$

2) $y''+4y = 4(\cos 2x + \sin 2x),\ \ y(\pi)=2\pi,\ y'(\pi)=2\pi.$

51. Определить и записать структуру частного решения:

1) $y''-8y'+16y = e^{4x}\left(1-x\right);$

2) $y''+16y = x\sin 4x;$ 3) $y''-4y' = 2\cos^2 4x.$

Задания для индивидуальной работы

52. Найти общее решение следующих уравнений:

1) $y'' + 8y' = 8x$; 2) $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$;

3) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}\left(x^2 + x\right)$; 4) $y''' + y'' - 2y' = x^2 + x$.

53. Найти общее решение следующих уравнений:

1) $y'' - 5y' = x + 5$; 2) $y'' + 6y' + 9y = \begin{cases} 10\sin x - 3\cos x, \\ x\cos x. \end{cases}$

3) $y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x}$; 4) $y''' + y'' = 6x$.

54. Найти общее решение следующих уравнений:

1) $y'' + 2y' + 2y = 4e^{x}\cos x$; 2) $y'' + 4y = 4\left(\sin 2x + \cos 2x\right)$;

3) $y'' + 4y = \cos^2 x$; 4) $y''' - y'' + y' - y = x^2 e^{-x}$;

5) $y^{V} - y^{IV} = 2xe^{x}$; 6) $y^{IV} + y'' = x^2 - 6x + 8$.

55. Найти частное решение следующих уравнений:

1) $y'' + y = 4\sin x - 6\cos x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 18$;

2) $y'' + 9y = 2\cos 4x - 3\sin 4x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 12$.

56. Определить и записать структуру частного решения:

1) $y'' - 3y' = e^{3x} - 28x$; 2) $y'' - 7y' = \left(x - 1\right)^2$;

3) $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}\left(x^2\cos 3x + \sin 3x\right)$.

6. Метод вариации произвольных постоянных для неоднородных ЛДУ

Рассмотрим линейное неоднородное ДУ вида

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x).$$

Запишем соответствующее однородное уравнение

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0.$$

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) применяется для отыскания частного решения уравнения ЛНДУ в случаях, когда правая часть этого уравнения имеет общий вид. Суть метода: находим общее решение соответствующего однородного уравнения $\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x)$, $C_1, C_2, C_3 - \forall\, const$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ – частные линейно независимые решения однородного уравнения.

Тогда частное решение уравнения

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x)$$

будем искать в виде $y_* = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + C_3(x) y_3(x)$.

Функции $C_i(x)$ $(i=1,2,3)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'y_1(x)+C_2'y_2(x)+C_3'y_3(x)=0, \\ C_1'y_1'(x)+C_2'y_2'(x)+C_3'y_3'(x)=0, \\ C_1'y_1''(x)+C_2'y_2''(x)+C_3'y_3''(x)=f(x). \end{cases}$$

Пример 11. Решить уравнение $y''+4y=\dfrac{1}{\sin 2x}$.

Решение. Выпишем соответствующее однородное уравнение, составим характеристическое уравнение и получим общее решение однородного уравнения.

$$y''+4y=0,\quad k^2+4=0,\quad k=\pm 2i,\quad \bar{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

Т.е. $y_1(x)=\cos 2x$, $y_2(x)=\sin 2x$, тогда $y_1'(x)=-2\sin 2x$, $y_2'(x)=2\cos 2x$.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_*=C_1(x)\cos 2x+C_2(x)\sin 2x$.

Для определения неизвестных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x+C_2'(x)\sin 2x=0, \\ -2C_1'(x)\sin 2x+2C_2'(x)\cos 2x=\dfrac{1}{\sin 2x}. \end{cases}$$

Решим систему с помощью формул Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}=2\cos^2 2x+2\sin^2 2x=2.$$

Тогда:

$$C_1'(x)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\sin 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix}=-\frac{1}{2},\quad C_2'(x)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{1}{\sin 2x} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}ctg 2x.$$

Интегрируя последние два равенства, получим

$C_1(x)=-\dfrac{1}{2}x$, $C_2(x)=\dfrac{1}{4}\ln|\sin 2x|$.

Общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x)=\bar{y}(x)+y_*(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\ln|\sin 2x|.$$

Ответ: $y(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\dfrac{1}{2}x\cos 2x+\dfrac{1}{4}\sin 2x\ln|\sin 2x|$.

Задания для аудиторной работы

57. Применяя метод вариации произвольных постоянных, решить уравн.:

1) $y''-4y'+5y=\dfrac{e^{2x}}{\cos x}$; 2) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$;

3) $y''+y+ctg^2 x=0$; 4) $y'''+y'=tgx\cdot\dfrac{1}{\cos x}$.

Задания для индивидуальной работы

58. Применяя метод вариации произвольных постоянных, решить уравнения:

1) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$; 2) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$;

3) $y''' + y' = tgx$; 4) $y'' - 2tgx \cdot y' = 1$.

59. Применяя метод вариации произвольных постоянных, решить уравнения:

1) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$; 2) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$;

3) $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$; 4) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;

5) $y''' + y' = tgx \sec x$; 6) $x \ln x \cdot y'' - y' = \ln^2 x$;

7) $y'' + 2ctgx \cdot y' = 1$; 8) $xy'' + (2x - 1)y' = -4x^2$.

7. Системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим нормальную систему двух ДУ первого порядка, т.е. систему вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y,z), \\ \dfrac{dz}{dx} = g(x,y,z). \end{cases}$$

Решение системы, разрешенной относительно производных от двух искомых функций $y(x)$ и $z(x)$, м*етодом исключения* сводится к решению одного дифференциального уравнения второго порядка относительно одной из функций. Рассмотрим процесс сведения на примере.

Пример 12. Решить систему $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -2y - 4z + 4x + 1, \\ \dfrac{dz}{dx} = -y + z + \dfrac{3}{2}x^2. \end{cases}$

Решение. Запишем систему в виде $\begin{cases} y' = -2y - 4z + 4x + 1, \\ z' = -y + z + 1{,}5x^2. \end{cases}$

Продифференцируем первое уравнение по переменной x:

$y'' = -2y' - 4z' + 4$ и в это уравнение подставим z' из второго уравнения системы, получим выражение

$$y'' = -2y' - 4\left(-y + z + 1{,}5x^2\right) + 4.$$

Из первого уравнения системы выразим переменную z и подставим в полученное уравнение, получим ДУ второго порядка относительно функции $y(x)$.

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 4y + 4z = 4 - 6x^2, \\ z = \frac{1}{4}(1 + 4x - y' - 2y), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z = 1 + 4x - y' - 2y, \\ y'' + 2y' - 4y + 1 + 4x - y' - 2y = 4 - 6x^2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4z = 1 + 4x - y' - 2y, \\ y'' + y' - 6y = 3 - 4x - 6x^2. \end{cases}$$

Решим неоднородное уравнение относительно функции $y(x)$:

$$k^2 + k - 6 = 0, \ (k+3)(k-2) = 0, \ k_1 = -3, \ k_2 = 2 \ \Rightarrow \ \bar{y} = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x};$$

$$y_* = ax^2 + bx + c, \ y'_* = 2ax + b, \ y''_* = 2a,$$

$$2a + 2ax + b - 6ax^2 - 6bx - 6c = 3 - 4x - 6x^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим систему для определения коэффициентов *a,b,c.*

$$\begin{cases} -6a = -6, \\ 2a - 6b = -4, \\ 2a + b - 6c = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ 6b = 2a + 4 = 6, \\ 6c = 2a + b - 3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 1, \\ c = 0. \end{cases}$$

Тогда, $y_* = x^2 + x$; $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + x^2 + x$.

Найдем функцию $z(x)$.

$$4z = 1 + 4x - y' - 2y = 1 + 4x + 3C_1e^{-3x} - 2C_2e^{2x} - 2x - 1 - 2C_1e^{-3x} - 2C_2e^{2x} -$$

$$-2x^2 - 2x = C_1e^{-3x} - 4C_2e^{2x} - 2x^2.$$

Общее решение системы:

$$\begin{cases} y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + x^2 + x, \\ z = 0{,}25\, C_1e^{-3x} - C_2e^{2x} - 0{,}5\, x^2. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + x^2 + x, \\ z = 0{,}25\, C_1e^{-3x} - C_2e^{2x} - 0{,}5x^2. \end{cases}$

Аналогично поступают при решении систем дифференциальных уравнений с большим числом уравнений.

Метод Эйлера решения линейных однородных систем ДУ с постоянными коэффициентами. Рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными функциями:

$$\begin{cases} x'(t) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y'(t) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z'(t) = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases}$$

Будем искать неизвестные функции в виде
$x = \alpha \cdot e^{kt}$, $y = \beta \cdot e^{kt}$, $z = \gamma \cdot e^{kt}$.

Подставим эти выражения в систему и преобразуем ее к виду

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0. \end{cases}$$

Получили систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно α, β и γ. Система имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю. Получим уравнение для определения числа *k.*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0,$$

которое называется *характеристическим уравнением* исходной системы ДУ. Решая его, найдем значения *k*. Для каждого найденного значения определяем α, β и γ, после чего выписываем линейно независимые решения по каждой искомой функции и составляем общее решение системы.

Пример 13. Решить систему по методу Эйлера $\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y. \end{cases}$

Решение. Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 & 1 \\ 1 & 1-k & -1 \\ 2 & -1 & -k \end{vmatrix} = 0, \quad (1-k)^2(-k) - 1 + 2 - 2(1-k) - (1-k) - k = 0,$$

$$-k(1-k)^2 - 2(1-k) = 0, \quad (k-1)(k-2)(k+1) = 0, \quad k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = -1.$$

Соответствующие значения α, β, γ для каждого найденного *k* найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} (1-k)\alpha - \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + (1-k)\beta - \gamma = 0, \\ 2\alpha - \beta - k\gamma = 0. \end{cases}$$

Подставим в систему $k = 1$.

$$\begin{cases} -\beta + \gamma = 0, \\ \alpha - \gamma = 0, \\ 2\alpha - \beta - \gamma = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \gamma, \\ \alpha = \gamma, \\ 0 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta = 1, \\ \gamma = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = e^t, \\ y_1 = e^t, \\ z_1 = e^t. \end{cases}$$

Если $k=2$, то система примет вид:

$$\begin{cases} -\alpha-\beta+\gamma=0, \\ \alpha-\beta-\gamma=0, \\ 2\alpha-\beta-2\gamma=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta=0, \\ \alpha=\gamma, \\ 0=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1, \\ \beta=0, \\ \gamma=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=e^{2t}, \\ y_2=0, \\ z_2=e^{2t}. \end{cases}$$

Найдем частное решение исходной системы ДУ для $k=-1$.

$$\begin{cases} 2\alpha-\beta+\gamma=0, \\ \alpha+2\beta-\gamma=0, \\ 2\alpha-\beta+\gamma=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta+\gamma=0, \\ 3\alpha+\beta=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=-3\alpha, \\ \gamma=-5\alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1, \\ \beta=-3, \\ \gamma=-5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=e^{-t}, \\ y_3=-3e^{-t}, \\ z_3=-5e^{-t}. \end{cases}$$

Выпишем общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x(t)=C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3, \\ y(t)=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3, \\ z(t)=C_1z_1+C_2z_2+C_3z_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t}, \\ y=C_1e^t-3C_3e^{-t}, \\ z=C_1e^t+C_2e^{2t}-5C_3e^{-t}. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t}, \\ y=C_1e^t-3C_3e^{-t}, \\ z=C_1e^t+C_2e^{2t}-5C_3e^{-t}. \end{cases}$

Задания для аудиторной работы

60. Найти общее решение каждой из следующих систем:

1) $\begin{cases} y'=-7y+z; \\ z'=-2y-5z; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y'=-5y+2z+e^x; \\ z'=y-6z+e^{-2x}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y''+2y+4z=0; \\ z''-y-3z=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y'=\dfrac{y^2}{z}; \\ z'=0,5y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}=z; \\ \dfrac{d^2z}{dx^2}=y; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x'(t)=5x+2y-3z; \\ y'(t)=4x+5y-4z; \\ z'(t)=6x+4y-4z. \end{cases}$

61. Найти частное решение системы

$$\begin{cases} x'(t)=4x+y-36t; \\ y'(t)=-2x+y-2e^t; \end{cases} x(0)=0,\ y(0)=1.$$

Задания для индивидуальной работы

62. Найти общее решение каждой из следующих систем:

1) $\begin{cases} x' = 5x + 3y; \\ y' = -3x - y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 + x; \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x'(t) = x - 4y - z; \\ y'(t) = x + y; \\ z'(t) = 3x + z. \end{cases}$

63. Найти общее решение каждой из следующих систем:

1) $\begin{cases} x' = 2x + y; \\ y' = 3x + 4y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + x; \\ y_2' = -4y_1 - 3y_2 + 2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x'(t) = 3x - 4y + e^{-2t}; \\ y'(t) = x - 2y - 3e^{-2t}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

64. Найти общее решение каждой из следующих систем:

1) $\begin{cases} x'(t) = 2x + y + e^{t}; \\ y'(t) = x + 2y - 3e^{4t}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3; \\ y_2' = y_1 + y_3; \\ y_3' = y_1 + y_2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x'(t) = 4x - 3y + \sin t; \\ y'(t) = 2x - y - 2\cos t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x'(t) = x - y + 8t; \\ y'(t) = 5x - y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x'(t) = -3x + 4y - 2z; \\ y'(t) = x + z; \\ z'(t) = 6x - 6y + 5z; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x'(t) = 3x - y + z; \\ y'(t) = x + y + z; \\ z'(t) = 4x - y + 4z; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x'(t) = x - 4y - z; \\ y'(t) = x + y; \\ z'(t) = 3x + z; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x'(t) = x - 2y - z; \\ y'(t) = -x + y + z; \\ z'(t) = x - z. \end{cases}$

Ответы: **62.** 1) $x = (C_1 + C_2 t)e^{2t}$; $y = \left(-C_1 + \dfrac{C_2}{3} - C_2 t\right)e^{2t}$.

63. 1) $x = C_1 e^{t} + C_2 e^{5t}$; $y = -C_1 e^{t} + 3C_2 e^{5t}$.

Задания для подготовки к контрольной работе по теме «Дифференциальные уравнения»

65. Найти общие решения дифференциальных уравнений, а там где заданы начальные условия, определить частное решение:

1) $y' = \dfrac{2xy}{1+x^2},\ y(2) = 5$;

2) $(3x-1)dy + y^2dx = 0$;

3) $(x+2y)dx - xdy = 0$;

4) $y' = 2x\left(x^2+y\right),\ y(0) = 0$;

5) $(4y-3x-5)y' + 7x - 3y + 2 = 0$;

6) $xy' + y = y^2\ln x$;

7) $y'' = x - \ln x,\ y(1) = -\dfrac{5}{12},\ y'(1) = \dfrac{3}{2}$;

8) $y'' + 2xy'^2 = 0$;

9) $y'' = 2 - y,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2$;

10) $9y'' - 6y' + y = 0$;

11) $y'' + 12y' + 37y = 0$;

12) $y'' - 2y' = 0$;

13) $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$;

14) $y^{V} - 9y''' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 0,\ y^{IV}(0) = 0$;

15) $y'' + 4y = tg\,2x$.

16) Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 8y_2; \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2. \end{cases}$

17) Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(4;\,1)$ и обладающей свойством: отрезок, который касательная в любой точке кривой отсекает на оси Oy, равен квадрату абсциссы точки касания.

18) Через сколько времени тело, нагретое до 100°, охладится до 25° в комнате с температурой 20°, если до 60° оно охлаждается за 10 мин? (По закону Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур.)

66. Найти общие решения дифференциальных уравнений, а там, где заданы начальные условия, определить частное решение:

1) $xy' = \dfrac{y}{\ln x},\ y(e) = 1$;

2) $ye^{2x}dx - \left(1+e^{2x}\right)dy = 0$;

3) $y' = \dfrac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$;

4) $x^2y' = 2xy + 3,\ y(1) = -1$;

5) $(2x+y)dx + (3y-5x-11)dy = 0$;

6) $y' + 2xy = 2x^3y^3$;

7) $y'' = \dfrac{1}{x^2},\ y(1) = 3,\ y'(1) = 1$;

8) $y'''x\ln x = y''$;

9) $2y'^2 = (y-1)y'',\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2$;

10) $y'' - 10y' + 21y = 0$;

11) $y'' - 2y' + 2y = 0$;

12) $y'' + 4y' = 0$;

13) $y'' + y = 2\cos x - (4x+4)\sin x$;

14) $y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 8$;

15) $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\sin^2 x}$;

16) Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2; \\ y_2' = 8y_1 + y_2. \end{cases}$

17) Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(0;\ 4)$, если известно, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат касательной, проведенной в любой точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат.

18) Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 5 м/сек. На полном ходу ее мотор выключается, и через 40 сек после этого скорость лодки уменьшается до 2 м/сек. Определить скорость лодки через 2 мин после остановки мотора, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки.

***Ответы:* 65.** 1) $y = x^2 + 1$; 2) $y = \dfrac{1}{\ln C\sqrt[3]{|3x-1|}}$; 3) $y = Cx^2 - x$;

4) $y = -x^2 - 1 + e^{x^2}$; 5) $2y^2 - 3xy + \dfrac{7}{2}x^2 + 2x - 5y = C$; 6) $y = \dfrac{1}{\ln x + 1 + Cx}$;

8) $y = \dfrac{1}{2C_1}\ln\left|\dfrac{x - C_1}{x + C_1}\right| + C_2$; 9) $y = 2\sin x + 2$; 13) $y = C_1e^{6x} + C_2xe^{6x} + 7x^2e^{6x}$;

14) $y = 1 - x$; 15) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \dfrac{1}{4}\ln\left|tg\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|\cos 2x$;

16) $y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{9x}$; $y_2 = -\dfrac{3C_1}{4}e^{-x} + \dfrac{C_2}{2}e^{9x}$; 17) $y = \dfrac{17}{4}x - x^2$; 18) *40 мин.*

66. 1) $y = \ln x$; 2) $y = C\sqrt{1 + e^{2x}}$; 3) $y = xe^{Cx}$; 4) $y = -\dfrac{1}{x}$;

5) $C(3y - 2x + 1)^3(y - x - 1)^2 = 0$;

6) $2 = Cy^2e^{2x^2} + 2x^2y^2 + y^2$;

8) $y = C_1x^2\dfrac{2\ln x - 3}{4} + C_2x + C_3$; 9) $y = 1 + \dfrac{1}{1 - 2x}$, $y = 2$;

13) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \left(x^2 + 2x\right)\cos x$;

14) $y = 2e^{-x} - 4xe^{-x} - 4x^2e^{-x} - 2e^x$;

15) $y = \left(\ln\left(ctg\dfrac{x}{2}\right) + C_1\right)e^x\cos x + \left(\dfrac{1}{\sin x} + C_2\right)e^x\sin x$;

16) $y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{5x}$; $y_2 = -4C_1e^{-x} + 2C_2e^{5x}$; 17) $y = -\dfrac{x^2}{16} + 4$;

18) $v \approx 0{,}32$ м/сек.

Литература

1. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. − М.: Наука, 1981. − 448 с.
2. Власов, В.Г. Конспект лекций по высшей математике / В.Г. Власов. − М.: АйрисПресс, 1997. − 288 с.

18 Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. − М.: Астрель: АСТ, 2005. − 991 с.

3. Высшая математика для инженеров: в 2-х томах / С.А. Минюк [и др.]; под общ. ред. Н.А. Микулина. − Минск: ООО «Элайда», 2004. − Т.1. − 464 с., Т.2. − 592 с.
4. Герасимович, А.И. Математический анализ: Справочное пособие в 2-х частях / А.И. Герасимович [и др.]. − Мн.: Выш. шк., 1990. − 272 с.
5. Гусак, А.А. Высшая математика: в 2-х частях / А.А. Гусак. − Мн.: ТетраСистемс, 2000-2001. − Т.1. − 544 с., Т.2. − 442 с.
6. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х частях / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. − Мн.: Высш. шк., 1997. − Ч.1. − 304 с., Ч.2. − 416 с.
7. Жевняк, Р.М. Высшая математика, ч.I-IV / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. − Мн.: Выш. шк., 1984-1996 и все последующие издания.
8. Задачи и упражнения по курсу «Высшая математика» для студентов электронно-информационных специальностей. II семестр / Т.А. Тузик, А.И. Тузик, М.Г. Журавель. − Брест: Изд-во БрГТУ, 2007. − 103 с.
9. Индивидуальные задания по высшей математике / Под ред. А.П. Рябушко, I-IIIч. − Мн.: Выш. шк., 2004-2008. − Ч.1 304 с., Ч.2. − 367 с., Ч.3. − 367 с.
10. Лудерер, Б. Высшая математика в экономике, технике, информатике: справочник: пер. с нем. / Б. Лудерер, Ф. Наллау, К. Феттерс; под ред. А.В. Самусенко, В.В. Казаченок. − Мн.: Выш. шк., 2005. − 279 с.
11. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2-х томах / Н.С. Пискунов. − М.: Наука, 1985. − Т.1. − 432 с., Т.2. − 560 с.
12. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Ч.1 / Д.Т. Письменный. − М.: АйрисПресс, 2004. − 288 с.
13. Руководство к решению задач по высшей математике: в 2-х частях / Е.И. Гурский. − Мн.: Выш. шк., 1990. − Ч.1. − 304 с., Ч.2. − 400 с.
14. Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. − М.: Айрис-Пресс, 2003. − 576 с.
15. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике: в 2-х частях / Т.А. Сухая, В.Ф. Бубнов. − Мн.: Выш. шк., 1993. − Ч.1. − 416 с., Ч.2. − 304 с.
16. Тер-Крикоров, А.М. Курс математического анализа / А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин. − М.: Изд-во МФТИ, 2000. − 720 с.

Оглавление

Учебное издание

Составители:
Каримова Татьяна Ивановна
Лебедь Светлана Федоровна
Журавель Мария Григорьевна
Гладкий Иван Иванович
Дворниченко Александр Валерьевич

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

по курсу *«Математика»*
для студентов факультета
электронно-информационных систем

Дифференциальные уравнения

II семестр

Ответственный за выпуск: Каримова Т.И.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная верстка: Кармаш Е.Л.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 10.12.2015 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Усл. п. л. 1,86.
Уч.-изд. л. 2,0. Заказ № 1262. Тираж 70 экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.