УДК 624.072.21.7

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ШАРНИРНО-СОЕДИНЕННЫХ ФИЗИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНЫХ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

О. В. Козунова

Аннотация. В работе предлагается универсальный подход для расчета системы шарнирно-соединенных железобетонных балок на упругом основании Винклера с учетом физической нелинейности материала балок, который основан на смешанном методе строительной механики и реализуется в разных основаниях методом Жемочкина с учетом функций влияния, вид которых зависит от моделирования упругой среды.

Физическая нелинейность материала балок учитывается через переменную жесткость участков Жемочкина. В результатах нелинейного расчета исследуется напряженно-деформированное состояние системы из шарнирно-соединенных балок на упругом основании: распределение контактных напряжений под балками, внутренние усилия в балках и шарнирных соединениях, а также осадки упругого основания.

Численная реализация предлагаемого подхода выполнена с использованием прикладной программы Mathematica 11. Приведен численный пример расчета системы из трех шарнирно-соединенных железобетонных балок на основании Винклера с учетом их физической нелинейности на внешнюю нагрузку.

Ключевые слова: шарнирно-соединенные балки, упругое основание Винклера, смешанный метод строительной механики, метод Жемочкина, нелинейный расчет, зависимость «момент-кривизна», физическая нелинейность, прогибы балки, осадки основания, контактные напряжения.

Annotation. A universal approach is proposed for calculating a system of articulated reinforced concrete beams on a Winkler elastic base, taking into account the physical nonlinearity of the material of the beams, which is based on the mixed method of structural mechanics and is implemented in different ways by Zhemochkina taking into account the influence functions, the form of which depends on the modeling of the elastic medium.

The physical nonlinearity of the material of the beams is taken into account through the variable stiffness of Zhemochkina. The results of a nonlinear calculation investigate the stress-strain state of a system of articulated beams on an elastic base: the distribution of contact stresses under the beams, the internal forces in the beams and articulated joints, as well as the settlement of the elastic base.

A numerical implementation of the proposed approach was performed using the Mathematica 11 application program. A numerical example of the calculation of a system of three articulated reinforced concrete beams based on Winkler based on their physical non-linearity to external load is given.

Key words: articulated beams, Winkler elastic base, mixed method of structural mechanics, Zhemochkin's method, nonlinear calculation, "moment-curvature" relationship, physical nonlinearity, beam deflections, base precipitation, contact stresses.

Введение. Обзор литературы. Из анализа научной литературы по расчету шарнирно-соединенных конструкций на упругом основании можно сделать вывод об отсутствии общего подхода к решению этой проблемы, справедливого для шарнирно-соединенных балок и плит, лежащих на любой модели упругого основания под действием произвольной внешней нагрузки.

Шарнирно-соединенные балки на упругом основании в СССР исследовали такие ученые, как Б. Г. Коренев [1], Г. Я. Попов [2], Н. И. Симвулиди [3]. Б. Г. Коренев предложил использовать угловую деформацию для описания скачка в деформациях между соседними балками. Г.Я. Попов использовал сложный математический аппарат для получения точного решения контактной задачи об изгибе шарнирно-соединенных балок на упругой полуплоскости. Н. И. Симвулиди предложил метод расчета составных (шарнирно-соединенных) балок на упругом основании, однако без учета взаимного влияния балок друг на друга. В приведенных выше работах шарнирно-соединенные балки рассматривались линейно-упругими.

В данной работе предлагается универсальный подход для расчета шарнирно-соединенных балок на упругом основании с учетом их физической нелинейности. Этот подход основан на смешанном методе строительной механики [4] с учетом функций влияния метода Жемочкина через связи в зоне контакта [5], которые в дальнейшем называются связями Жемочкина, и справедлив для балок различной длины и жесткости, на любой модели упругого основания, и действие произвольной внешней нагрузки.

Постановка задачи и алгоритм линейного расчета. Рассмотрим систему шарнирно-соединенных балок на упругом основании под действием внешней нагрузки (рисунок 1). Требуется: определить распределение контактных напряжений под балками, усилия в балках и осадки упругого основания. На контакте балки с основанием [6] действуют только нормальные напряжения, которые по ширине балки распределены равномерно. Для балок справедливы гипотезы теории изгиба, шарниры между балками являются цилиндрическими.

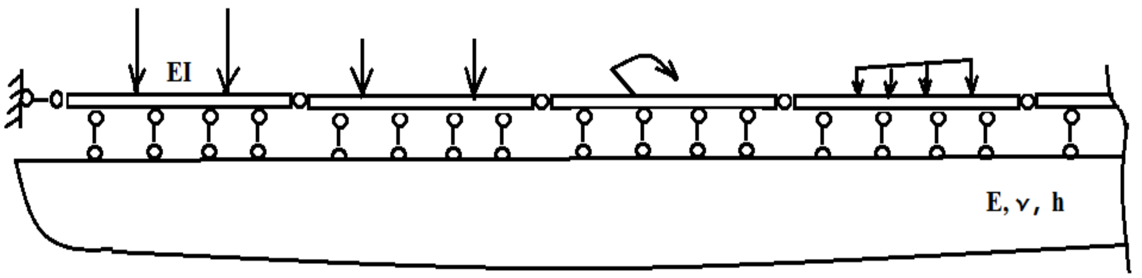

Рисунок 1 - Система шарнирно-соединенных балок на упругом основании. Связи Жемочкина

Разобьем каждую балку на участки равной длины и в центре каждого участка поставим вертикальную связь, через которую осуществляется контакт балки с упругим основанием (см. рисунок 1), в дальнейшем – связь Жемочкина. Полученную многократно статически неопределимую систему решаем смешанным методом [4], приняв за неизвестные усилия X_k в связях Жемочкина на контакте балок и основания, линейные и угловые перемещения u_k, φ_k во введенных на краях балок защемления и поперечные силы Q_k в разрезанных промежуточных шарнирах.

Основная система смешанного метода приведена на рисунке 2.

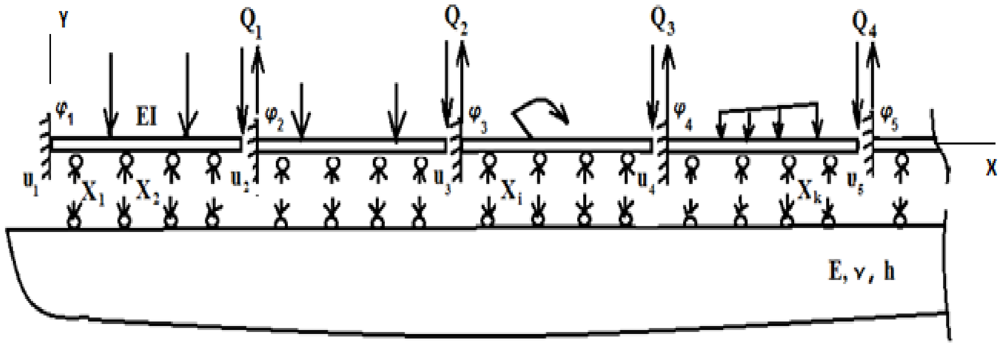

Рисунок 2 - Основная система смешанного метода

Система канонических уравнений смешанного метода для расчета одной балки с номером i имеет следующий вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + ... + \delta_{1m}X_m + u_i - \phi_i\ x_1 - \delta_{1Q}Q_i + \Delta_{1p} = 0 \\ ... \\ \delta_{m1}X_1 + ... + \delta_{mm}X_m + u_i - \phi_i x_m - \delta_{mQ}Q_i + \Delta_{mp} = 0 \\ -\sum_{k=1}^{m} X_k + Q_{i,1} + R = 0 \\ \sum_{k=1}^{m} X_k x_k - \ell\, Q_{i,1} - M = 0 \\ \sum_{k=1}^{m} \delta_{k,Q}X_k - \delta_{i,Q}Q_i - u_i + \ell\ \phi + \Delta_{Q,p} + u_{i+1} = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где m – число участков Жемочкина на одной балке;

u_i, φ_i – неизвестные линейное и угловое перемещения введенного защемления на балке с номером i;

R, M – равнодействующая внешних сил и момент равнодействующей относительно введенного защемления на балке с номером i;

Q_i – поперечная сила в разрезанном шарнире по правую сторону балки с номером i;

X_k – усилие в связи Жемочкина с номером k.

Коэффициенты при неизвестных системы канонических уравнений смешанного метода (1) имеют следующий вид (2,3):

1) для основания Винклера (2)

$$\delta_{i,k} = \frac{1}{K\,bc} + \frac{\ell^3}{3EJ} w_{i,k}, \quad i = k;$$

$$\delta_{i,k} = \frac{\ell^3}{3EJ} w_{i,k}, \quad i \neq k, \qquad (2)$$

где K– коэффициент постели упругого основания; EJ – изгибная жесткость изолированной балки;

2) для упругого полупространства, с модулем упругости E_0 и коэффициентом Пуассона ν_0, (3)

$$\delta_{i,k} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 c} F_{i,k} + \frac{\ell^3}{3EJ} w_{i,k}, \tag{3}$$

где безразмерная функция $F_{i,k}$ для определения коэффициентов при неизвестных по формуле (3) определяется следующими соотношениями (4) из [7]

$$F_{i,i} = 2\frac{c}{b}\left[\ell n\frac{b}{c} + \frac{b}{c}\ell n\left(\frac{c}{b} + \sqrt{\frac{c^2}{b^2}+1}\right) + \ell n\left(1 + \sqrt{\frac{c^2}{b^2}+1}\right)\right];$$

$$F_{i,k} = \frac{1}{|x_i - x_k|}, \tag{4}$$

где b и c − размеры участка Жемочкина на балке (b-ширина балки).

Безразмерные прогибы балки с защемлением на краю балки в основной системе смешанного метода для вычисления формул (2,3) определяются по формуле (5) из [7]

$$\begin{aligned} w_{i,k} &= \frac{x_i^2}{\ell^2}\left(3\frac{x_k}{\ell} - \frac{x_i}{\ell}\right), \quad x_k > x_i; \\ w_{i,k} &= \frac{x_k^2}{\ell^2}\left(3\frac{x_i}{\ell} - \frac{x_i}{\ell}\right), \quad x_k < x_i. \end{aligned} \tag{5}$$

Свободные члены системы (1) зависят от вида внешней нагрузки и определяются с использованием формул (5). Отметим, что последнее уравнение в (1) выражает условие отсутствия взаимного вертикального перемещения в промежуточном шарнире между соседними балками.

Если для расчета системы составных (шарнирно-соединенных) балок обозначить число этих балок через N, то общее число неизвестных усилий N_{us} в связях Жемочкина, линейных и угловых перемещений введенных защемлений на балках и поперечных сил в промежуточных шарнирах (отметим, что индекс “*us*” в переводе с англ. “*unknown solution*“ − неизвестные решения) выразится формулой (6), а именно

$$N_{us} = N(m+2) + N - 1. \tag{6}$$

Структура системы разрешающих уравнений для системы балок представлена на рисунке 3. Блоки по главной диагонали D_{11},…, D_{nn} образованы по системе (1), побочные блоки D_{12},…, D_{1n} образуют ленточные горизонтали структуры системы разрешающих уравнений. Они являются нулевыми в случае основания Винклера; в случае упругого полупространства побочные блоки D_{12},…, D_{1n} характеризуют взаимное влияние балок и определяются с использованием формул (4).

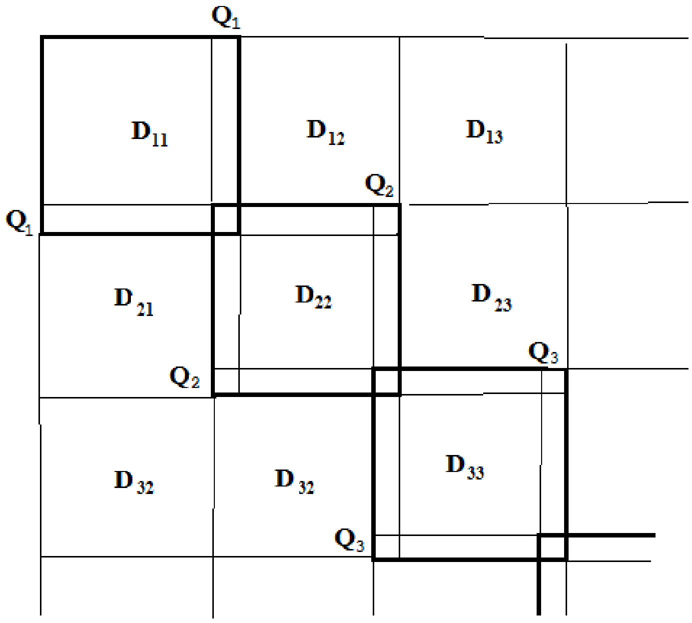

Рисунок 3 - Структура системы разрешающих уравнений

Алгоритм нелинейного расчета. После определения усилий в связях Жемочкина на контакте каждой балки с упругим основанием в результате линейного расчета определяются величины изгибающих моментов в каждом сечении каждой балки известными методами строительной механики [4]. По вычисленным значениям моментов определяется касательная жесткость для каждого участка Жемочкина на балках по формуле принятой зависимости «момент-кривизна» для сечений балки. В работе она принята в виде гиперболического тангенса [7]. Поэтому

$$B_i^{(1)} = \frac{B_0}{Cosh^2\left(\dfrac{B_0}{M\lim}\chi_i^{(0)}\right)}, \tag{7}$$

где B_0 – начальная изгибная жесткость участка Жемочкина с номером i по упругому расчету (нулевая итерация);

$M\lim$ – предельный момент, воспринимаемый сечением балки. В работе определялся по программе Бета [8];

$\chi_i^{(0)}$ – кривизна на участке Жемочкина с номером i, определяемая после упругого расчета по формуле конечных разностей [6].

$$\chi_i^{(0)} = \frac{y_{i+1}^{(0)} - 2y_i^{(0)} + y_{i-1}^{(0)}}{c^2}, \tag{8}$$

где $y_i^{(0)}$ – вертикальное перемещение в центре участка Жемочкина с номером i по упругому расчету. Определяется по известным усилиям в связях Жемочкина

$$y_i^{(0)} = \frac{X_i^{(0)}}{k} \text{ – для упругого основания Винклера;} \tag{9}$$

$$y_i^{(0)} = \frac{1-\nu_0^{\;2}}{\pi E_0 \Delta x} \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} F_{i,n} X_n^{(0)} -$$ для упругого полупространства.

В дальнейшем расчете необходимо определить коэффициенты канонических уравнений $\delta_{i,k}^{(1)}$ и $\Delta_{i,p}^{(1)}$ как для балки переменной жесткости. Для этого используем представление интеграла Мора [5] в виде суммы

$$\delta_{i,k}^{(1)} = \sum_{n=1}^{m} \frac{M_i^{\;n} M_k^{\;n}}{B_n^{(1)}} \Delta x \cdot \qquad (10)$$

Аналогичным образом определяются свободные члены $\Delta_{i,p}^{(1)}$ системы (1). Перемножение эпюр для балки переменной жесткости приведено на рисунке 4.

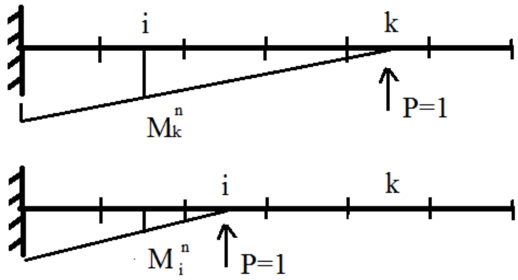

Рисунок 4 - Перемножение эпюр для балки переменной жесткости

По вычисленным значениям $\delta_{i,k}^{(1)}$ и $\Delta_{i,p}^{(1)}$ снова решается система (1) и определяются новые значения $X_i^{(1)}$ в связях Жемочкина. Для определения скорректированных величин жесткости $B_i^{(2)}$ на каждом участке Жемочкина повторяются вычисления (7)-(10). Далее снова определяются $\delta_{i,k}^{(2)}$ и $\Delta_{i,p}^{(2)}$, решается система (1), определяются $X_i^{(2)}$ и т. д. Итерационный процесс заканчивается, когда разность

$$\left| M_i^{(r)} - M_i^{(r-1)} \right| \le \varepsilon, \qquad (11)$$

где $\varepsilon -$заданная величина погрешности.

Численные результаты. Рассмотрим систему из 3 шарнирно-соединенных балок одинаковой длины $\ell = 5$ м и сечением 1.2м x 0.4м из тяжелого бетона класса $C^{20/25}$ на упругом основании Винклера с коэффициентом постели $K = 2000$ кН/м^3.

Средняя балка нагружена равномерно-распределенной нагрузкой q=120 кН/м. При расчете каждая балка разбивалась на 21 участок Жемочкина.

В таблице 1 приведены численные значения для контактного напряжения, осадки, момента и жесткости в середине средней балки для первых двух итераций. Поперечные силы в двух промежуточных шарнирах после последней итерации равны 97.04 кН.

Таблица 1 – Результаты нелинейного расчета

Номер итерации	0 (упругий расчет)	1 (первая итерация)	2 (вторая итерация)
Контактные напряжения, кПа	82.57	82.41	82.41
Осадка, мм	9.806	9.810	9.810
Максимальный изгибающий момент в средней балке, кН·м	118.959	118.897	118.894
Жесткость в середине средней балки, кН·м^2	185920	182070	181171

Анализ численных результатов таблицы 1 подтверждает известный факт, что при расчете железобетонных изгибаемых балок с учетом физической нелинейности прогибы балок растут, а усилия в ней уменьшаются. Надо отметить, что в одиночной балке на основании Винклера под действием равномерно – распределенной нагрузки изгибающие моменты отсутствуют. В приведенном примере такого не наблюдается.

Заключение. В численных результатах нелинейного расчета исследуется напряженно-деформированное состояние системы из нескольких шарнирно-соединенных физически-нелинейных балок на линейно-упругом основании Винклера: распределение контактных напряжений под балками, внутренние усилия в железобетонных балках и шарнирных соединениях, а также осадки упругого основания.

Физическая нелинейность материала балок учитывается через переменную жесткость участков Жемочкина. Численная реализация предлагаемого подхода выполнена с использованием прикладной программы Mathematica 11.

Список использованных источников

1. Коренев, Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании / Б. Г. Коренев. − М.: Стройиздат, 1954. − 127 с.

2. Попов, Г.Я. О расчете неограниченной шарнирно-разрезной балочной плиты, лежащей на упругом полупространстве / Г.Я. Попов // Изв. Вузов, Строительство и архитектура. − № 3. − 1959. − С. 25-33.

3. Симвулиди, И.А. Составные балки на упругом основании / И.А. Симвулиди. − М.: Высшая школа, 1961. −204 с.

4. Ржаницин, А.Р. Строительная механика / А.Р. Ржаницын. − М.: Высшая школа, 1991. – 439 с.

5. Жемочкин, Б.Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б.Н. Жемочкин, А.П. Синицын. − М.: Стройиздат, 196.2 – 239 с.

6. Горбунов–Посадов, М.И. Расчет конструкций на упругом основании / М.И. Горбунов-Посадов, Т.А Маликова, В.И. Соломин. − М.: Стройиздат, 1984. – 679 с.

7. Козунова, О.В. Применение МКР в нелинейных расчетах балок на однородном упругом слое / О.В. Козунова // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: международный сборник научных статей. – Ровно, Украина, 2008. – Вып.17. – 447 с. – С. 373–381.

8. ПК «Радуга». Версия 2. Руководство пользователя. Сост. О.Н. Лешкевич. – Новополоцк: Изд. ПГУ.– 31 с.