УДК 539.3

Босаков С.В., Семенюк Я.Д.

РАСЧЕТ СИСТЕМЫ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК НА ДВУХСЛОЙНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

ВВЕДЕНИЕ

Расчетные схемы фундаментов под здания чаще всего представляют в виде системы перекрестных балок на упругом основании. При этом расчет таких систем в большинстве случаев сводится к расчету одиночных балок на упругом основании [1], либо к расчету системы перекрестных балок без учета кручения в узлах, поэтому эти подходы дают приближенное решение рассматриваемой проблемы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Будем считать, что система перекрестных балок представляет совокупности жестко соединенных между собой стержней, находящихся на упругом основании (рис. 1).

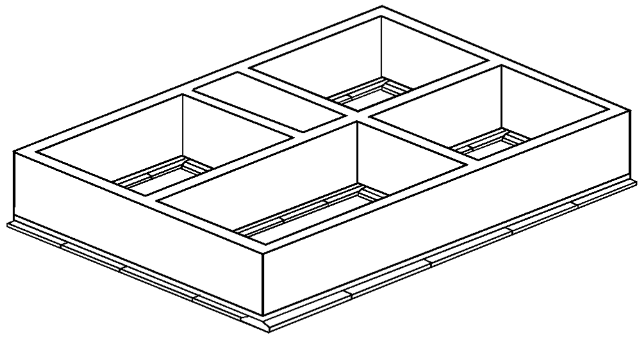

Рис. 1. Пространственный железобетонный фундамент в виде системы перекрестных балок на упругом основании

Здесь рассматривается расчет системы перекрестных балок с жестким соединением элементов в узлах на упругом основании способом Б.Н.Жемочкина [2] с использованием для определения постоянных коэффициентов аппроксимирующей функции метода Ритца. Принимается, что реактивные касательные давления в контактной зоне стержней не учитывают; распределение нормальных реактивных давлений по ширине каждого стержня считают постоянным [1]; на контакте системы перекрестных балок с упругим основанием могут возникать как сжимающие, так и растягивающие реактивные давления. Внешняя нагрузка действует перпендикулярно плоскости осей стержней, образующих систему перекрестных балок.

С этой целью каждый стержень системы разобьем на прямоугольные участки. В центре каждого участка поставим абсолютно жесткие связи, через которые осуществляется контакт системы с упругим основанием. Будем считать, что усилие в каждой связи вызывает равномерное распределение реактивных давлений в пределах участка. Полученную многократно статически неопределимую систему рассчитываем смешанным методом строительной механики, приняв за неизвестные усилия в связях Б.Н. Жемочкина, линейное и угловые перемещения введенного защемления на краю системы перекрестных балок.

Система канонических уравнений способа Б.Н. Жемочкина для нахождения неизвестных имеет вид

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{k=1}^{N} \delta_{ik} X_k + n_0 + \varphi_{ox} y_i + \varphi_{oy} x_i + \Delta_{ip} = 0 \\ -\sum\limits_{k=1}^{N} X_k y_k + M_{px} = 0 \\ -\sum\limits_{k=1}^{N} X_k x_k + M_{py} = 0 \\ -\sum\limits_{k=1}^{N} X_k + R = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где δ_{ik} – взаимное вертикальное перемещение концов i-ой разрезанной связи Б.Н.Жемочкина от единичных сил, приложенных к k-ой связи основной системе; Δ_{ip} – прогиб центра i-ого участка основной системы от внешней нагрузки; u_o, φ_{ox}, φ_{oy} – линейное и угловые перемещения введенного защемления на краю основной системы; X_i – усилие в i-ой связи Б.Н.Жемочкина; R, M_{px}, M_{py} – равнодействующая внешних сил, приложенных к системе перекрестных балок, и моменты равнодействующей относительно осей Ox и Oy; N – число участков Б.Н.Жемочкина на системе перекрестных балок.

Коэффициенты при неизвестных усилиях в связях Б.Н. Жемочкина δ_{ik} зависят от осадок упругого основания W_{ik} и прогибов основной системы Z_{ik}:

$$\delta_{ik} = W_{ik} + Z_{ik};$$

где:

$$W_{ik} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 h}\left(F_{ik}^0 + F_{ik}^1\right); \qquad (2)$$

здесь W_{ik} – перемещение центра i-го участка Б.Н.Жемочкина на поверхности упругого основания от действия единичной силы, распределенной по k-му участку; E_0, ν_0, h – модуль деформации, коэффициент Пуассона и линейный размер (например, толщина слоя) для упругого основания; F_{ik}^0 – характеризует осадку упругого однородного изотропного полупространства, F_{ik}^1 – корректирует F_{ik}^0 для данной модели упругого основания [3].

2. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК С ЗАЩЕМЛЕННОЙ ТОЧКОЙ

Определение прогибов Z_{ik} основной системы под действием сосредоточенной вертикальной единичной силы (функция Грина) представляет сложную задачу, не решенную до настоящего времени в общем виде. Предлагается эту задачу решать следующим образом.

Как известно [4], прогибы прямолинейного стержня с защемлением в начале координат под действием сосредоточенной силы описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^4 Z}{dx^4} = 0, \qquad (3)$$

Босаков Сергей Викторович. *Профессор, доктор технических наук, кафедры строительной механики Белорусской государственной политехнической академии (БГПА). Беларусь, г. Минск, пр. Ф. Скарины, 65*

Семенюк Ярослав Денисович. *Кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой строительных конструкций Могилевского машиностроительного института. Беларусь, г. Могилев, ул. Ленинская, 70.*

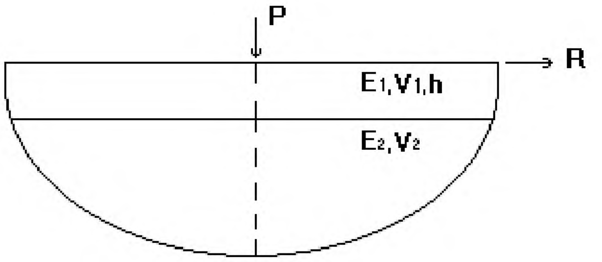

Рис. 2. Двухслойное основание

то есть кубической параболой. На основании этого для рассматриваемой расчетной системы, с учетом кинематических граничных условий в начале координат, учитывая кручение задаемся функцией Грина в виде тринадцатичленного полинома.

$$
\begin{aligned}
Z(x_1 y) = {} & a_{11}\frac{xy}{ab} + a_{20}\frac{x^2}{a^2} + a_{30}\frac{x^3}{a^3} + a_{21}\frac{x^2 y}{a^2 b} + \\
& + a_{31}\frac{x^3 y}{a^3 b} + a_{22}\frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} + a_{32}\frac{x^3 y^2}{a^3 b^2} + a_{02}\frac{y^2}{b^2} + \\
& + a_{03}\frac{y^3}{b^3} + a_{12}\frac{xy^2}{ab^2} + a_{13}\frac{xy^3}{ab^3} + a_{23}\frac{x^2 y^3}{a^2 b^3} + \\
& + a_{33}\frac{x^3 y^3}{a^3 b^3}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где *a*, *b* – характерные размеры системы перекрестных балок; a_{ik} - неизвестные постоянные коэффициенты.

Коэффициенты a_{ik} в формуле (4) найдем методом Ритца [5]. Функционал полной энергии системы перекрестных балок с защемленной точкой (рис. 2) под действием единичной силы, приложенной к точке с координатами x_p и y_p имеет вид

$$
\begin{aligned}
Э = {} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i} EI_i \frac{d^2 Z(x, y_i)}{dx^2}dx + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_0^{l_k} EI_k \frac{d^2 Z(x_k, y)}{dy^2}dy + \\
& + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i} GT_i \frac{d^2 Z(x, y_i)}{\partial x \partial y}dx + + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_0^{l_k} GT_k \frac{d^2 Z(x_k, y)}{\partial x \partial y}dy - \\
& - Z(x_p, y_p),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $l_i, l_k, EI_i, EI_k, GT_i, GT_k$ - длины, изгибная и крутильная жесткости стержней, образующих систему перекрестных балок. *n, m* - число стержней системы, параллельных осям OX и OY соответственно.

Поэтому в формуле (5) суммирование распространяется по всем стержням системы, параллельным соответствующим осям координат.

После вычисления функционала по формуле (5) дифференцированием полученного выражения по каждому из неизвестных a_{ik} получаем систему линейных алгебраических уравнений 13 порядка, решение которой позволяет определить функцию Грина для системы перекрестных балок с защемленной точкой.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Вычисление функционала полной энергии Э по формуле (5) и его дифференцирование по каждому из неизвестных коэффициентов a_{ik} производили в общем виде с помощью пакета компьютерной алгебры “Mathematica - 3”[6].

В качестве упругого основания принималось двухслойное основание (рис. 2). В работе [7] приведено выражение для функции Грина этой модели в виде несобственного интеграла от специальных функций. Исследование асимптотических

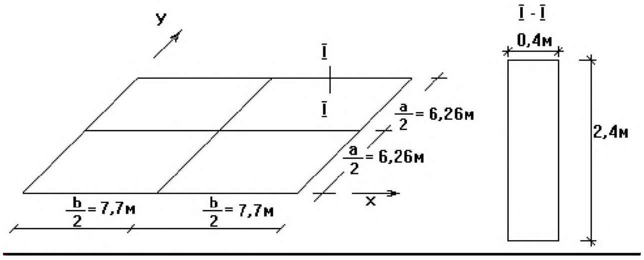

Рис. 3. Система перекрестных балок к расчету модели железобетонного пространственного фундамента

свойств подинтегральной функции позволило авторам впервые получить формулу для осадок поверхности двухслойного основания от сосредоточенной силы P в следующем виде:

$$
W(x, y) = \frac{P(1 - \nu_0^2)}{\pi E_1 h}\left[\frac{h}{R} + \sum_{k=0}^{2} A_k \frac{\partial(k+1)}{\left(4 + \frac{R^2}{h^2}\right)^{\frac{k+1}{2}}} P_k\left(\frac{2}{\sqrt{4 + \frac{R^2}{h^2}}}\right)\right], \tag{6}
$$

где:

$R = \sqrt{x^2 + y^2};$

$L = (1 - g)(3 - 3g - 4\nu_1 + 4g\nu_2);$

$M = (3 + g - 4\nu_1)(4g\nu_2 - 1 - 3g);$

$N = (1 - g)(1 + 3g - 4g\nu_2);$

$S = 2[(1 - g)(5 + 3g) + 4\nu_1(g - 3 + 2\nu\ ) + 4g\nu_2(1 + g - 2\nu_1)];$

здесь: $g = \dfrac{E_2(1 + \nu_1)}{E_1(1 + \nu_2)}$; $A_0 = \dfrac{M + L}{M - L - S} - 1;$

$$A_1 = 2A_0 + \frac{2L(S - 2N) - 2M(S - 2N) - 4(2LM + NS)}{(L - M + S)^2};$$

$$
\begin{aligned}
A_2 = {} & -2A_0 + 2A_1 - \\
& - 2\frac{(S - 2N)(M^2 - L^2) + (8LM + 2NS + S^2)(L + M)}{(L - M + S)^2};
\end{aligned}
$$

$\Gamma(\kappa)$ – гамма функция [8]; $P_k(z)$ – полином Лежандра[8].

Была рассчитана система перекрестных балок, изображенная на рис. 3. Поперечное сечение всех балок принимали постоянным. Класс бетона по прочности при сжатии принят B12.5. При расчете систему разбивали на 168 прямоугольных и 9 квадратных участков Б.Н. Жемочкина. Это соответствовало 180 неизвестным способа Б.Н. Жемочкина. Результаты расчета для принятых характеристик основания $E_1 = 20$ МПа; $\nu_1 = 0,3$; $h_1 = 3$ м; $E_2 = 20$ МПа; $\nu_2 = 0,3$ при действии на систему равномерно распределенной нагрузки $q = 22$ кН/м приведены на рис. 4. Из условия двойной симметрии, эпюры приведены для четверти системы перекрестных балок. При определении изгибающих моментов использовали формулы численного дифференцирования найденных осадок центров участков Б.Н.Жемочкина. Значения крутящих моментов находили из равновесия узлов системы перекрестных балок.

Полученные значения изгибающих моментов в сечениях стержней рассматриваемой системы перекрестных балок говорят о том, что каждый из них при изгибе обладает постоянной кривизной. По видимому, этот факт, впервые отмеченный в работе, связан с действием равномерно распределенной нагрузки на систему с двумя осями симметрии в рассматриваемой задаче.

ВЫВОДЫ

1. Впервые приведено решение контактной задачи для системы перекрестных балок на произвольном упругом основании с учетом кручения.
2. Предлагаемый подход, основанный на синтезе способа Б.Н.Жемочкина и метода Ритца, позволяет рассчитывать любые системы перекрестных балок на произвольном упругом основании.
3. Уточнено выражение функции Грина для двухслойного основания. Как частные случаи, из полученной формулы следуют решения для упругого слоя и упругого полупространства.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Горбунов-Посадов М.И., Малинова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. М., Стройиздат, 1984. 679 с.
2. Жемочкин Б.Н., Синицын А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. М., Стройиздат, 1962. 260 с.
3. Босаков С.В. Изгиб сжатой прямоугольной пластинки на упругом основании любого типа. МТИ, т.2, № 2, с. 93-95.
4. Федосьев В.И. Сопротивление материалов. М., Наука, 1974. 560 с.
5. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., ФМ, 1963. 636 с.
6. Дьяконов В.П. Системы символьной математики. Mathematica 2 и Mathematica3. М., СК Пресс, 1998. 328 с.
7. Коган Б.И. Напряжение и деформации многослойных оснований. Труды ХАДИ, вып.14, 1953. с. 33-46
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ФМ, 1963. 1100с.

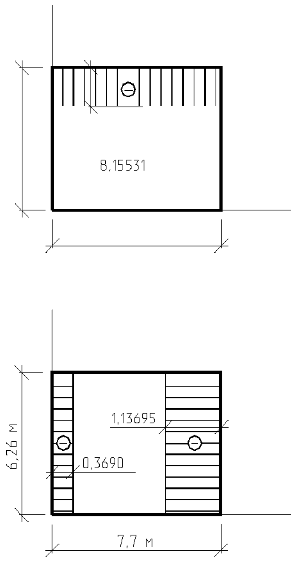

Рис. 4. Распределение осадок, изгибающих и крутящих моментов в системе перекрестных балок при действии равномерно распределенной нагрузки

УДК 624.015

Босаков С.В., Тарасевич А.Н., Тур В.В.

РАСЧЕТ САМОНАПРЯЖЕННЫХ ПЛИТ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА

ВВЕДЕНИЕ

Обладая повышенными эксплуатационными свойствами (трещиностойкостью, термоморозостойкостью, стойкостью к агрессивным воздействиям, низкой истираемостью и т.д.), а как следствие и высокой долговечностью, конструкции из напрягающего бетона привлекают все большее внимание специалистов строительной отрасли. Главным отличием напрягающего бетона от традиционного бетона на портландцементе является его способность к расширению при твердении. Физико-химические основы расширения напрягающего цемента и бетонов на его основе детально рассмотрены в работе [1]. Расширение напрягающего бетона в связанных условиях приводит к появлению в его структуре сжимающих напряжений (самонапряжений).

Одной из областей эффективного применения напрягающего бетона в конструкциях следует считать фундаментные балки и плиты, для которых создание предварительного напряжения в построечных условиях сопряжено с целым рядом сложностей конструктивно-технологического характера.

Однако методы расчета самонапряженных фундаментных балок и плит с учетом исходного напряженно-деформированного состояния конструкции от расширения напрягающего бетона разработаны в недостаточной степени.

В настоящей статье изложены основные положения метода, касающиеся расчета самонапряженной балочной плиты на произвольном упругом основании с распределительными свойствами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим балочную плиту из напрягающего бетона на упругом основании под действием внешней нагрузки (рис. 1). Целью расчета является определение ее осадок, распределения реактивных давлений на контакте плиты с основанием, внутренних усилий в ее сечениях.

При расчете приняты следующие предпосылки:

– не учитывают касательные напряжения, действую-

Босаков Сергей Викторович. *Профессор, доктор технических наук, кафедры строительной механики Белорусской государственной политехнической академии (БГПА). Беларусь, г. Минск, пр. Ф. Скарины, 65*

Тарасевич Алексей Николаевич. *Старший преподаватель кафедры оснований и фундаментов Брестского политехнического института (БПИ), Беларусь, г. Брест, ул. Московская, 267.*

Тур Виктор Владимирович. *Доктор технических наук, зав. кафедрой технологии бетона и строительных материалов Брестского политехнического института (БПИ), Беларусь, г. Брест, ул. Московская, 267.*