

РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ШАРНИРНОМ ОПИРАНИИ БАЛКИ НА ЧЕТВЕРТЬПРОСТРАНСТВО

П. Д. Скач к

Введение. В статье рассматривается решение пространственной контактной задачи для шарнирного узла опирания однопролетной балки на стены, моделируемые упругим четвертьпространством. Основная цель заключается в определении напряженного состояния области контакта балки и стен. При этом решаются задачи построения поверхностей и изолиний реактивных давлений в местах непосредственного контакта балки и стен, определения расчетного пролета балки, влияния размера зоны контакта на величину максимального изгибающего момента в середине пролета балки, определения области контакта при различных показателях гибкости, а также построения изолиний вертикальных перемещений стен.

При нагружении балки, как привило, не удастся избежать эксцентриситета приложения нагрузки, что влечет к перераспределению контактных напряжений под подошвой балки. Важно установить такой эксцентриситет приложения нагрузки, при котором происходит отрыв части подошвы балки от опоры. Данная задача об определении допустимых эксцентриситетов имеет важное с инженерной точки зрения значение.

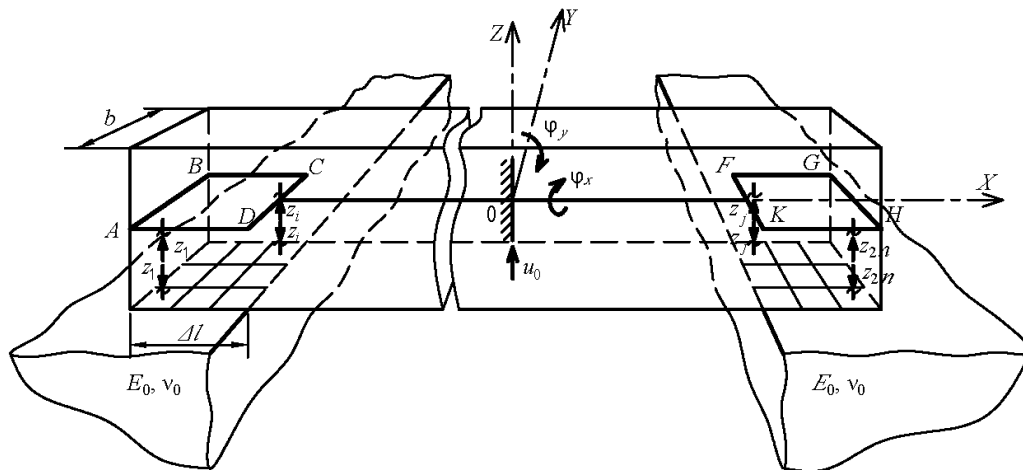
Рассматриваемая задача в области строительной механики (в широком смысле слова) есть расчет балки на упругом основании. Стремительное развитие методы расчета конструкций на упругом основании от модели Винклера до комбинированных моделей [1, 2] получили с середины XIX века и по XX век. Совершенствование моделей расчета продолжается и по сей день. Огромный вклад в расчет фундаментных конструкций внесли такие ученые как Александров В. М., Пожарский Д. А., Жемочкин Б. Н., Сеницын А. П., Маликова Т. А., Коренев Б. Г., Соломин В. И., Горбунов-Посадов М. И. и др. [3-8]/

Особенностью решения поставленной задачи является то, что стены моделируются в виде упругих четвертьпространств. Функция Грина для данного упругого основания берется согласно [1]. Расчет ведется методом Б. Н. Жемочкина. В качестве примера расчет выполняется на сосредоточенную нагрузку, приложенную в плоскости нормального к продольной оси сечения балки, проведенного через середину пролета балки.

Постановка задачи. Рассматриваются шарнирные узлы опирания балки на стену (рис. 1). Задачи расчета: определить область контакта; построить поверхности и изолинии контактных напряжений при различных показателях гибкости; установить зависимость между максимальным изгибающим моментом в балке от размеров контактной зоны; определить величину допустимого эксцентриситета приложения вертикальной нагрузки, при котором контактные напряжения полностью распределены по ширине балки.

Принимаются следующие допущения:

- для балки справедлива гипотезы изгиба [9];
- стены моделируются в виде упругого четвертьпространства;
- связи Б. Н. Жемочкина принимаются односторонними, работающими только на сжатие;
- в зоне контакта не учитываются касательные напряжения.



*ABCD и KFGH – элементы срединной плоскости балки; XOY – система координат, начало которой совпадает с серединой пролета балки, ось X – направлена вдоль продольной оси балки; ось Y – горизонтальная ось, перпендикулярная оси X ; ось Z – вертикальная ось, перпендикулярная оси X ; b – ширина балки; Δl – глубина опирания балки; E_0, ν_0 – модуль деформаций и коэффициент Пуассона упругого четвертьпространства; $u_0, \varphi_x, \varphi_y$ – вертикальное и угловые перемещения середины балки относительно осей X и Y соответственно; z_i – усилие в связи Б. Н. Жемочкина; n – количество участков Б. Н. Жемочкина в одном узле
Рисунок 1 – Расчетная схема балки*

На расчетной схеме балка изображается ее продольной осью. В местах контакта со стенами балка заменяется срединными плоскостями $ABCD$ и $KFGH$, жесткость которых в направлении оси Y принимается бесконечной. Расчет выполняется методом Б. Н. Жемочкина [4, 5].

Детальное описание метода Б. Н. Жемочкина применительно к поставленной задаче приводится в статье [10].

По расчетной схеме составляется система линейных алгебраических уравнений (1) смешанного метода строительной механики

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{1,1}z_1 + \dots + \delta_{1,n}z_n + u_0 + \varphi_x \cdot y_1 + \varphi_y \cdot x_1 + \Delta_{1,F} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n,1}z_1 + \dots + \delta_{n,n}z_n + u_0 + \varphi_x \cdot y_n + \varphi_y \cdot x_n + \Delta_{n,F} = 0 \\ \delta_{n+1,n+1}z_{n+1} + \dots + \delta_{n+1,2n}z_{2n} + u_0 + \varphi_x \cdot y_{n+1} + \varphi_y \cdot x_{n+1} + \Delta_{n+1,F} = 0, \\ \dots \\ \delta_{2n,n+1}z_{n+1} + \dots + \delta_{2n,2n}z_{2n} + u_0 + \varphi_x \cdot y_{2n} + \varphi_y \cdot x_{2n} + \Delta_{2n,F} = 0 \\ -\sum_{i=1}^{2n} z_i + R_F = 0; -\sum_{i=1}^{2n} z_i \cdot y_i + M_{xF} = 0; -\sum_{i=1}^{2n} z_i \cdot x_i + M_{yF} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\delta_{i,j}$ – перемещение точки i от действия единичной силы, приложенной в точке j ; z_i – неизвестное усилие в связи i Б. Н. Жемочкина; $u_0, \varphi_x, \varphi_y$ – неизвестные вертикальное и угловые перемещения во введенном защемлении; (x_i, y_i) – координаты центра тяжести участка Б. Н. Жемочкина с номером i ;

$\Delta_{i,F}$ – перемещение точки i от действия внешней нагрузки F ; R_F – реакция во введенном заземлении от действия внешней нагрузки F ; M_{xF} , M_{yF} – реактивные моменты относительно осей X и Y от действия внешней нагрузки F , соответственно; n – количество участков Б. Н. Жемочкина в одном узле.

Коэффициенты при неизвестных $\delta_{i,j}$ в уравнениях СЛАУ определяются по формуле (2)

$$\delta_{i,j} = \lambda W_{i,j} + \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} V_{i,j}, \quad (2)$$

где λ – показатель гибкости [3, 4] – безразмерная величина, зависящая от соотношения жесткостей упругого четвертьпространства и опираемой балки (3); $W_{i,j}$ – вертикальное перемещение точки i срединной плоскости балки от действия единичной силы, приложенной в точке j (определяется известными методами строительной механики [14]); E_0 , ν_0 – модуль деформаций и коэффициент Пуассона упругого основания; $V_{i,j}$ – вертикальное перемещение точки i поверхности упругого четвертьпространства от действия единичной силы, приложенной в точке j .

Показатель гибкости [4]

$$\lambda = \frac{\pi E_0 b \Delta l^3}{(1 - \nu_0^2) EI}, \quad (3)$$

где E_0 , ν_0 – модуль деформаций и коэффициент Пуассона упругого четвертьпространства; EI – изгибная жесткость балки.

Перемещения точек поверхности упругого четвертьпространства $V_{i,j}$ определяются по формуле (4) [1], записанной в декартовой системе координат

$$\begin{aligned} V_{i,j} = & \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} + \frac{1 + a_0}{\sqrt{(x_i - x_j + 2m)^2 + (y_i - y_j)^2}} + \\ & \frac{2a_0}{\pi \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}}{2\sqrt{(x_i - x_j + m)m}} + \\ & + a_1 \frac{(x_i - x_j + m)m}{\left(\sqrt{(x_i - x_j + 2m)^2 + (y_i - y_j)^2}\right)^3} + \\ & + \frac{a_1}{\pi} \left(\frac{\sqrt{(x_i - x_j + m)m}}{\left(\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}\right)^2} - \right. \\ & \left. - 2 \frac{(x_i - x_j + m)m}{\left(\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}\right)^3} \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}}{2\sqrt{(x_i - x_j + m)m}} \right), \quad (4) \end{aligned}$$

где (x_i, y_i) – координаты точки i поверхности упругого четвертьпространства, в которой определяется вертикальное перемещение; (x_j, y_j) – координаты точки j приложения единичной силы z_j ; m – расстояние от точки приложения силы до ребра упругого четвертьпространства; $a_0 = \frac{4}{\pi^2 - 4}$ [1], $a_1 = 2,1$ [1] – коэффициенты.

После вычисления коэффициентов $\delta_{i,j}$ и свободных членов формируется матрица и вектор-столбец свободных членов системы уравнений (1). Далее решается СЛАУ (1) матричным методом. В результате имеем найденный вектор-столбец неизвестных \bar{z} , в котором первые $2n$ компонент – усилия в связях Б. Н. Жемочкина, а оставшиеся три компоненты – перемещения во введенном заземлении.

На нулевой итерации (первое полученное решение) среди первых $2n$ компонент будут как положительные, так и отрицательные. Первые свидетельствуют о том, что усилие в связи Б. Н. Жемочкина – усилие сжатия, вторые – усилие в связи Б. Н. Жемочкина – усилие растяжения. Наличие «отрицательных» связей служит признаком начала итерационного процесса, который состоит в последовательном «выключении» из работы «отрицательных» связей с пересчетом вектора-столбца неизвестных \bar{z} на каждой итерации. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока первые $2n$ компонент вектора \bar{z} не примут неотрицательные значения и на границе отрыва не будут тождественно равняться нулю.

При определении допустимого эксцентриситета задаемся начальной координатой $y = 0$ точки приложения сосредоточенной силы. Выполняем весь описанный выше алгоритм. Далее проверяем усилия в связях Б. Н. Жемочкина, расположенных в крайнем ряду, параллельном оси X . Если усилия в указанных связях не равны нулю, то, увеличивая координату y на некоторую величину с необходимой степенью точности, проводим весь расчет сначала. Этот процесс продолжается до тех пор, пока усилия в означенных связях не будут равны нулю. Соответствующая координата y точки приложения силы и принимается за допустимый эксцентриситет приложения нагрузки.

По картине оставшихся связей Б. Н. Жемочкина судят о фактической области контакта балки и стен. Для построения поверхности напряжений равномерно распределяют найденные усилия по соответствующему участку Б. Н. Жемочкина.

Численное решение поставленной задачи. Принимаем железобетонную балку БСП6.1 по серии 1.146.2 – 10/93 «Балки стропильные железобетонные для покрытий зданий пролетами 6 и 9 м» вып.1 (рис. 3).

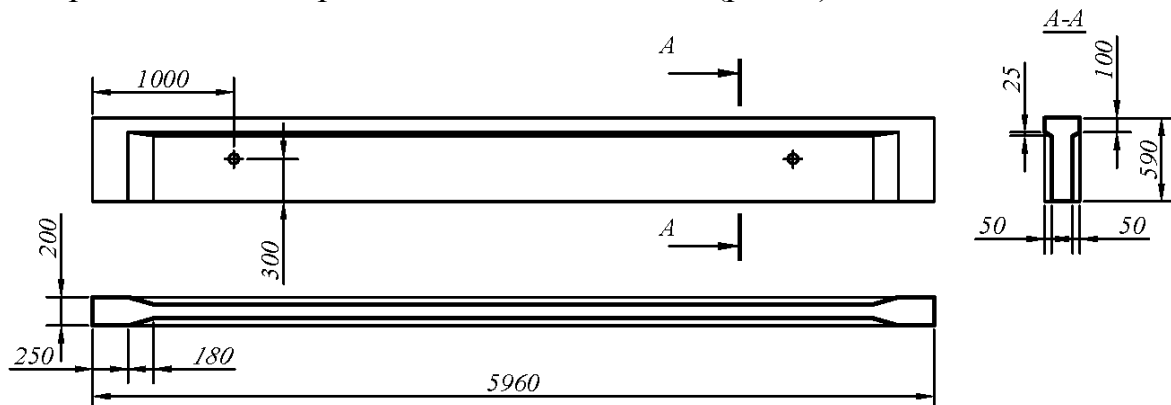


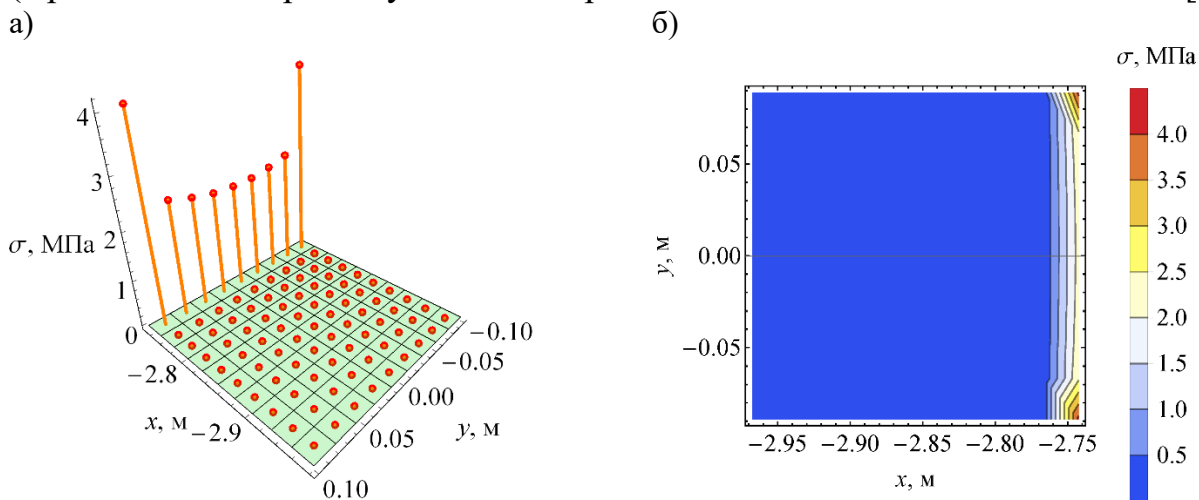
Рисунок 2 – Схема стропильной балки БСП6.1

Балку считаем на действие сосредоточенной силы F , приложенной в середине пролета балки в плоскости XOZ . Исходные данные для выполнения расчетов сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Параметр, ед. изм.	Значение
Конструктивная длина балки l , м	5,96
Ширина балки b , м	0,2
Высота балки h , м	0,59
Глубина опирания балки Δl , м	0,25
Модуль упругости бетона балки E , ГПа	31
Модуль деформаций упругого четвертьпространства E_0 , ГПа	29
Коэффициент Пуассона упругого четвертьпространства ν_0	0,18
Сосредоточенная сила F , кН	27
Показатель гибкости λ	2,77

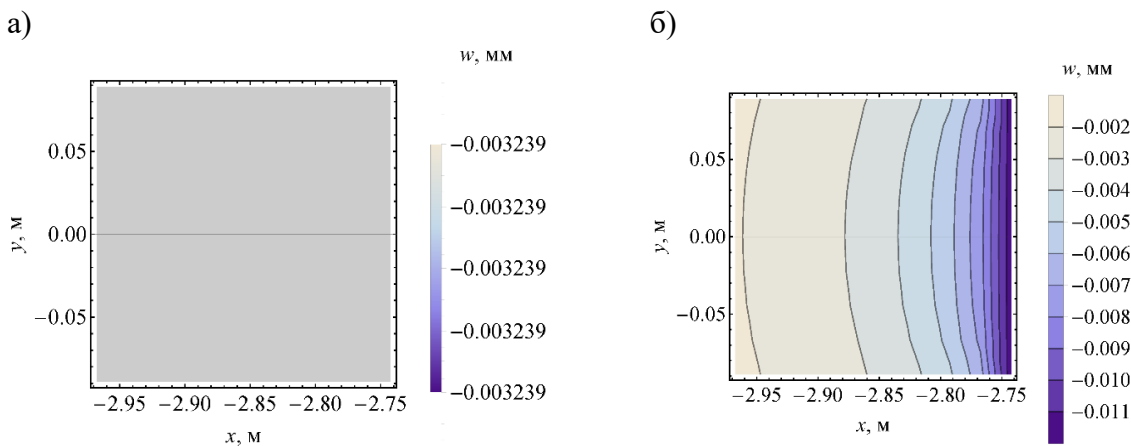
Поскольку балку считаем на действие сосредоточенной силы, приложенной в плоскости нормального сечения, проходящего через середину пролета балки, то распределения контактных напряжений для левого и правого узлов балки будет симметрично относительно вертикальной плоскости YOZ (рис. 1). Далее рассматриваем только левый узел. Количество участков Б. Н. Жемочкина в зоне контакта в направлении оси X принимаем $n_x = 10$, а в направлении оси Y – $n_y = 9$. Решение с учетом итерационного процесса показано на рисунке 3 (с решением на промежуточных итерациях можно ознакомиться в статье [10]).



а – совокупность реактивных давлений; б – изолинии реактивных давлений
Рисунок 3 – Решение на последней итерации

Из рисунка 3 видно, что при опирании железобетонной балки на бетонную стену ($\lambda = 2,77$) контактная область сводиться к двум рядам участков Б.Н. Жемочкина, параллельным оси Y и ближайшим к ребру упругого четвертьпространства. При этом, максимальные контактные напряжения возникают у краев поперечного сечения балки, что подтверждается общеизвестным фактом [8].

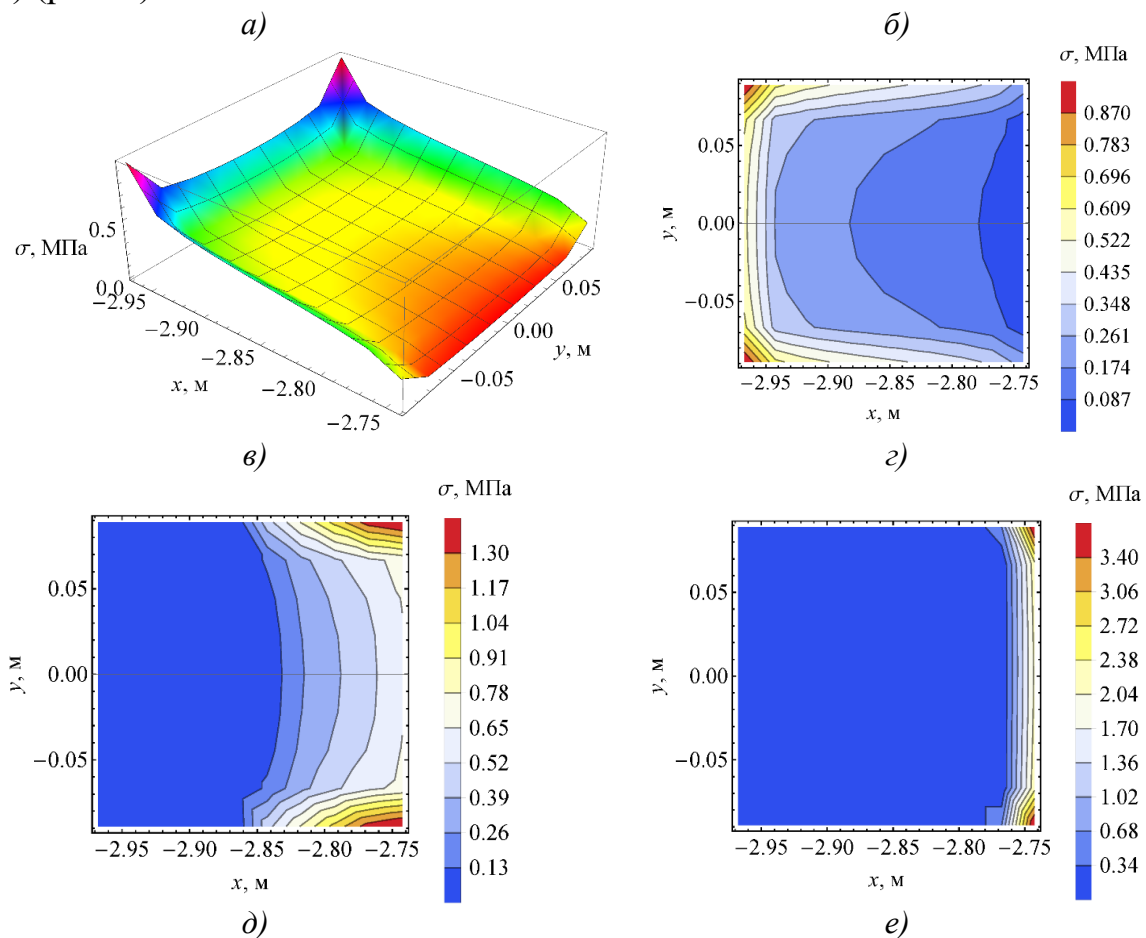
На следующем рисунке 4 построены изолинии вертикальных перемещений поверхности упругого четвертьпространства.



*а – при $\lambda = 0$, б – при реальном $\lambda = 2,77$
Рисунок 4 – Изолинии вертикальных перемещений*

При $\lambda = 0$, что соответствует опиранию на стену абсолютно жесткой балки, конструкция перемещается поступательно, что соответствует вдавливанию жесткого штампа в упругое четвертьпространство [8]. Максимальные перемещения – у края упругого четвертьпространства.

Контактные напряжения и размеры области контакта зависят от соотношения жесткостей опираемых конструкций, т. е. зависят от показателя гибкости λ (3) (рис. 5).



а – поверхность реактивных давлений при $\lambda = 0$; б, в, г, – изолинии контактных напряжений при $\lambda = \{0; 0,2; 1\}$ соответственно

Рисунок 5 – Влияние показателя гибкости λ на решение контактной задачи

На рисунках 5а, б показано решение при показателе гибкости $\lambda = 0$, что соответствует, как отмечалось выше, опиранию абсолютно жесткой балки. Максимальные контактные напряжения возникают у границ области контакта, соответствующих краям балки. Минимальные напряжения – у ребра упругого четвертьпространства.

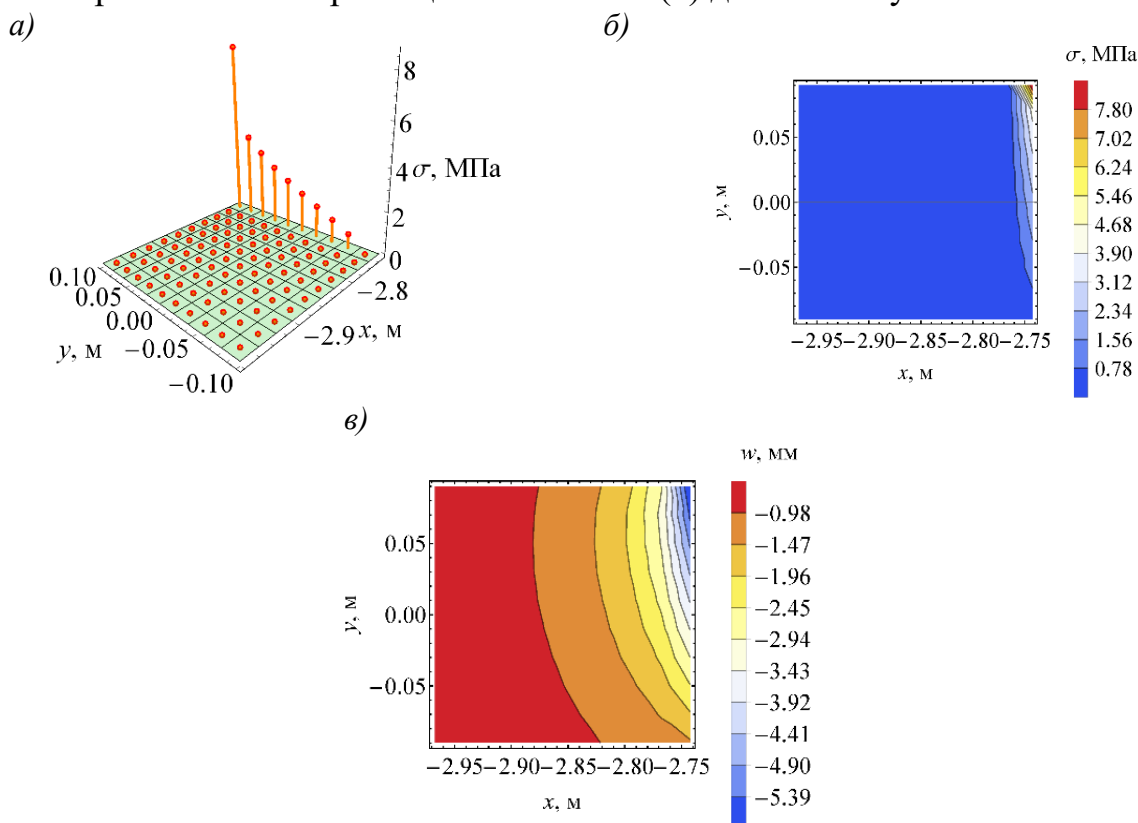
От размеров контактной зоны также зависит расчетный пролет балки и максимальный изгибающий момент в середине пролета балки. Для рассмотренной выше балки данная зависимость представлена в таблице 2.

Таблица 2

Показатель гибкости λ	Пролет балки l_{eff} , мм			Максимальный изгибающий момент M_{max} , кНм		
	Расчетный	о [11]	Отклонение, %	Расчетный	о [11]	Отклонение, %
0	5781	5710	1,24	39,02	8,54	1,24
0,1	5616		1,65	37,91		1,65
0,2	5554		2,73	37,49		2,73
0,5	5507		3,56	37,17		3,56
1	5488		3,89	37,04		3,89
2	5485		3,94	37,02		3,94

С увеличением показателя гибкости λ уменьшаются расчетный пролет балки и максимальный изгибающий момент в середине пролета балки.

При указанных параметрах балки и четвертьпространства (таблица 1) допустимый эксцентриситет составил $e = 44$ мм. На рисунке 6 изображены сжатые связи Б. Н. Жемочкина (а), изолинии контактных напряжений σ (б) и изолинии вертикальных перемещений w стены (в) для левого узла.



а – сжатые связи Б.Н. Жемочкина; б – изолинии контактных напряжений σ ;
в – изолинии вертикальных перемещений стены w

Рисунок 6 – Решение контактной задачи при $\lambda = 2,77$ и $e = 44$ мм

На рисунке 3а видно, что, прикладывая нагрузку в точке с координатами (0;44) мм, связи Б. Н. Жемочкина крайнего ряда, параллельного оси X , имеют нулевые усилия.

Контактная область и возникающие в ней контактные напряжения зависят от соотношения жесткостей опираемых конструкций, т. е. от показателя гибкости λ (3). Следовательно, от показателя гибкости λ зависит и допустимый эксцентриситет приложения вертикальной нагрузки e (рисунок 7).

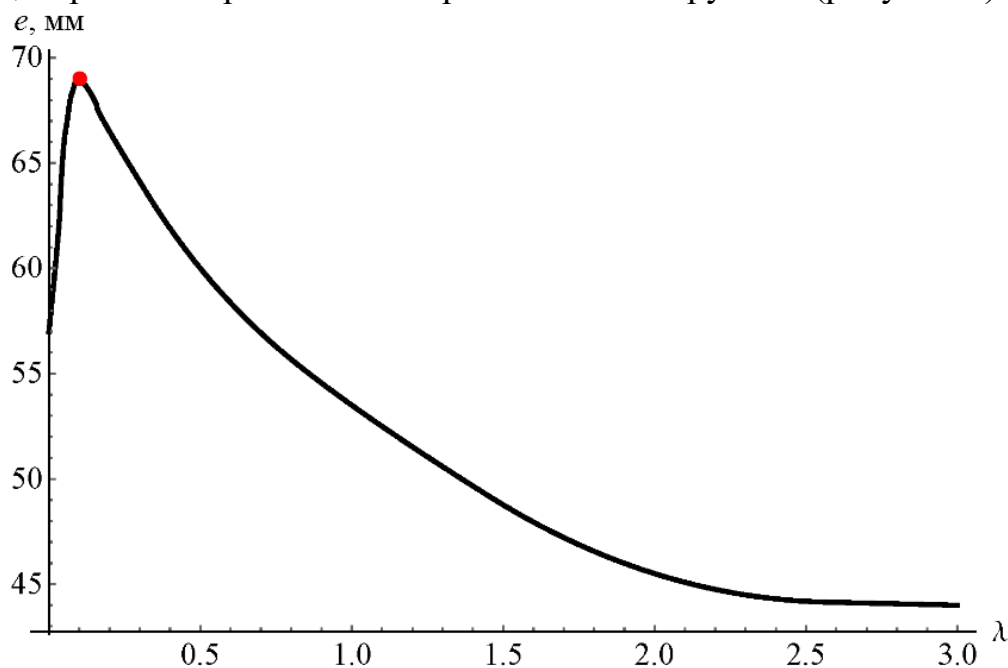


Рисунок 7 – Зависимость эксцентриситета приложения нагрузки от показателя гибкости

При изменении показателя гибкости λ от 0 до 0,1 эксцентриситет e увеличивается от 57 мм до 69 мм, а при изменении λ от 0,1 до 3, эксцентриситет e уменьшается от 69 мм до 44 мм. Это объясняется тем, что в зависимости от показателя гибкости изменяется характер распределения контактных напряжений по области контакта и изменяются размеры области контакта.

Выводы. 1. Предложено решение контактной задачи для шарнирного узла опирания железобетонной балки на стену, которая моделируется упругим четвертьпространством, методом Б. Н. Жемочкина с установкой жестких односторонних связей.

2. Получены решения контактной задачи при различных показателях гибкости λ и установлено, что с увеличением данного показателя фактическая область контакта опираемых конструкций уменьшается.

3. Численно установлено влияние размеров области контакта на величины расчетного пролета балки и максимального изгибающего момента.

4. Построены изолинии вертикальных перемещений точек поверхности упругого четвертьпространства. Установлено, что в предельном случае при $\lambda=0$ решение соответствует вдавливанию жесткого штампа в упругое четвертьпространство.

5. Определен допустимый эксцентриситет e приложения вертикальной сосредоточенной силы F в плоскости YOZ .

6. Установлена зависимость допустимого эксцентриситета e от показателя гибкости λ , причем наблюдается как его увеличение, так и уменьшения в зависимости от характера распределения контактных напряжений по области контакта.

Список использованных источников

1. Босаков, С.В. Действие сосредоточенной силы на упругое четвертьпространство / С.В. Босаков // Теорет. и прикл. механика: междунар. научно-техн. сб. / БПИ. – Минск: Вышэйшая школа, 1988. – Выпуск 15. – С. 100-108.
2. Босаков, С.В. Статические расчеты плит на упругом основании / С.В. Босаков. – Минск: БНТУ, 2002. – 128 с.
3. Горбунов-Посадов, М.И. Балки и плиты на упругом основании / М.И. Горбунов-Посадов. – М.: Машстройиздат, 1949. – 238 с.
4. Горбунов-Посадов, М.И. Расчет конструкций на упругом основании / М.И. Горбунов-Посадов, Т.А. Маликова, В.И. Соломин. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1984. – 680 с.
5. Жемочкин, Б.Н. Практические методы расчетов фундаментных балок и плит на упругом основании / Б.Н. Жемочкин, А.П. Сеницын. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Госстройиздат, 1962. – 240 с.
6. Клепиков, С.Н. Расчет конструкций на упругом основании / С.Н. Клепиков. – Киев: Будівельник, 1967. – 184 с.
7. Коренев, Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании / Б.Г. Коренев. – М.: Госстройиздат, 1954. – 231 с.
8. Штаерман, И.Я. Контактная задача теории упругости / И.Я. Штаерман. – М.: Гостехиздат, 1949. – 270 с.
9. Борисевич, А.А. Строительная механика: учебное пособие для вузов / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – 2-е изд., перераб. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.
10. Босаков, С. В. Решение пространственной контактной задачи для шарнирного узла опирания однопролетной балки / С. В. Босаков, П. Д. Скачѣк // Строительная механика и расчет сооружений. – 2019. – №4 (285). – С. 10-19.
11. Еврокод 2. Проектирование ЖБК. Часть 1-1. Общие правила и правила для зданий: ТКП EN 1992-1-1-2009*. – Введ. 10.12.2009. – Минск: Мин-во арх-ры и стр-ва РБ, 2010. – 191 с.