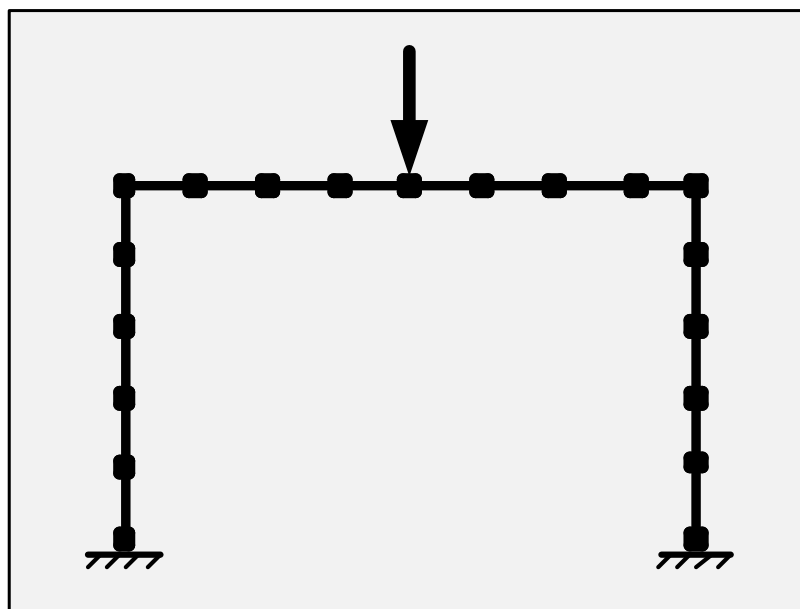


**Игнатюк В. И., Бочарова Н.В.**

---

---

# **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ**



**Брест 2015**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

# Численные методы решения задач строительной механики

*Рекомендовано Советом университета  
в качестве пособия*

*по дисциплине «Численные методы решения задач»  
для студентов специальностей*

*1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и  
1-74 04 01 «Сельское строительство и обустройство территорий»  
дневной и заочной форм обучения*

Брест 2015

УДК 518:624.04(075)  
ББК 38.112  
И 26

Рецензенты:

заместитель директора филиала УП «БелНИИС» – «Научно-технический центр», канд. техн. наук Деркач Валерий Николаевич  
заведующий кафедрой сопротивления материалов и теоретической механики, канд. техн. наук, доцент Хвисевич Виталий Михайлович

**В.И. Игнатюк, Бочарова Н.В.**

**И 26** Численные методы решения задач строительной механики : пособие. – Брест : Изд-во БрГТУ, 2015. – 100 с.

В пособии изложены основы решения численными методами задач расчета строительных конструкций и сооружений, включая расчеты с использованием общей системы уравнений равновесия и матриц влияния, численного интегрирования, матричной формы определения перемещений, численного дифференцирования, метода конечных разностей, использование в расчетах аппроксимаций функций, представлены методы решения нелинейных уравнений и основы метода конечных элементов.

Пособие предназначено для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-74 04 01 «Сельское строительство и обустройство территорий» дневной и заочной форм обучения.

УДК 518:624.04(075)  
ББК 38.112

© В.И. Игнатюк, 2015  
© Н.В. Бочарова, 2015  
© Издательство БрГТУ, 2015

## ВВЕДЕНИЕ В ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Численные методы – это методы приближенного решения математических задач, позволяющие свести решение задачи к выполнению конечного числа более простых алгебраических и арифметических действий, выполняемых как вручную, так и с помощью компьютерной техники.

Здесь будем рассматривать применение численных методов к задачам расчета сооружений, которые изучаются в строительной механике. Задачи расчета сооружений (а точнее, расчетных схем сооружений) сводятся к *математическим моделям*, описывающим выбранный метод расчета этих сооружений.

Математическая модель – это запись основных зависимостей и законов, управляющих сооружением, в форме того или иного вида уравнений.

Численные методы, по другому, – это интерпретация математической модели работы сооружений, которая доступна для реализации вручную и на компьютере.

Простейшим примером применения численного подхода в решении математической задачи является разложение функции в ряд.

Например, функцию  $\sin x$  можно вычислить, разложив ее в ряд Тейлора

$$\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!} \quad \text{или} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

Естественно мы не можем взять для вычисления бесконечное число слагаемых, а будем брать их конечное число. В связи с этим точно вычислить  $\sin x$  мы не сможем, и будет иметь место *погрешность вычислений*. Чем больше слагаемых мы возьмем, тем больше будет точность вычислений и тем меньше будет погрешность расчета. Рассматриваемая погрешность является погрешностью численного метода.

В целом погрешности разделяют на:

а) *погрешности выбора расчетной схемы*, которые обсуждаются в строительной механике, и, выбрав расчетную схему, влиять на эти погрешности мы больше уже не можем (это, собственно, неустранимые погрешности).

б) *погрешности построения математической модели* (метода расчета), определяемые тем, насколько точно мы определили зависимости, описывающие рассматриваемую задачу и метод ее решения, – эти погрешности также являются неустранимыми, так как они неизбежны в рамках данной математической модели;

следует заметить, что все методы расчета сооружений (статический, кинематический методы, метод сил, метод перемещений и т.д.), которые мы условно называем точными, основываются на определенных допущениях, и эти допущения являются источником погрешностей в сравнении с действительной работой сооружений.

в) при переходе от математической модели к численному методу возникают *погрешности численного метода*; чаще всего это погрешности дискретизации, связанные с заменой математической модели решения задачи системой конечного количества линейных алгебраических уравнений или конечного числа слагаемых – при разложении в ряд, и тому подобное. Этим типом погрешности можно управлять, регулировать его величину (как мы видим на примере вычисления  $\sin x$ ); она может быть уменьшена до заданного разумного значения путем изменения определенных параметров – например, шага численного интегрирования, числа членов ряда и т.п. Погрешность метода обычно стараются довести до величины, меньшей погрешности исходных данных (если она известна), так как дальнейшее снижение погрешности бессмысленно, и приводит только к увеличению объема вычислений, или до некоторой задаваемой величины.

г) при проведении расчетов вручную, на калькуляторе или на компьютере возникают *погрешности округления*, учитывая, что представление чисел и на калькуляторе, и в компьютере происходят не точно, а с округлением; максимальная погрешность при округлении может быть вычислена по формуле  $\delta_{\max} = 0,5\alpha^{1-k}$  [3], где  $\alpha$  – основание системы счисления,  $k$  – количество разрядов мантиссы числа, заложенных в устройство.

Имеются оценки [10], что в большинстве современных языков программирования (Java, C#, C++, Pascal и др.) при представлении чисел в двоичной системе координат и использовании типа «double» (с двойной точностью) точное представление чисел будем иметь в зоне  $2,3 \cdot 10^{-16} < |\varepsilon| < 2,3 \cdot 10^{16}$ . Меньшие числа заменяются нулем, а большие – искажаются. В MathCAD, например, точность решения систем линейных алгебраических уравнений при задании больших чисел ( $> 2,3 \cdot 10^{16}$ ) с увеличением их значений, а это несложно проверить, потихоньку исчезает.

Таким образом, погрешности разделяются по причине возникновения (погрешности расчетных схем, метода расчета, численного метода, погрешности округления) и могут быть неустраняемыми или такими, которые можно, пусть частично, регулировать (уменьшать).

Погрешности могут быть *абсолютными* и *относительными*.

Если  $a$  – истинное значение, а  $\bar{a}$  – приближенное значение, то:

$$\Delta(a) = |a - \bar{a}| \text{ – абсолютная погрешность;}$$

$$\delta(a) = \left| \frac{\Delta a}{a} \right| = \left| \frac{a - \bar{a}}{a} \right| \text{ – относительная погрешность.}$$

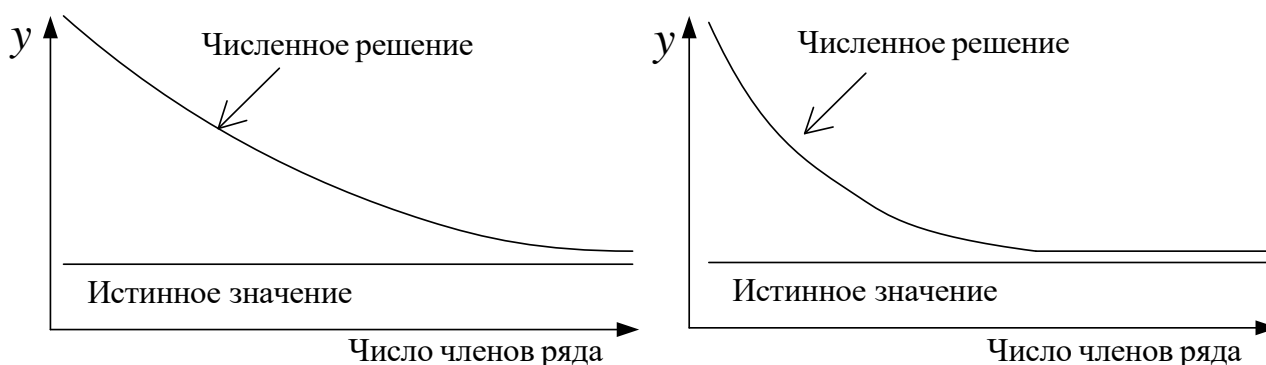
Относительную погрешность часто удобно вычислять в процентах:

$$\delta(a)\% = \delta(a) \cdot 100\%; \quad \delta(a)\% = \left| \frac{a - \bar{a}}{a} \right| \cdot 100\%.$$

Введем еще одно понятие – *сходимость численного метода*, которое означает приближение (стремление) результата численного метода к истинному решению.

Различают сходимость итерационного процесса, когда при решении задачи для нахождения искомых значений многократно повторяют какой-то процесс (выполняют последовательные итерации), получая последовательность решений (значений). Говорят, что эта последовательность сходится к точному решению, если при неограниченном возрастании числа итераций решение все ближе приближается к действительному и в пределе (при устремлении числа итераций к бесконечности) равно ему. К таким задачам относятся, например, задача нахождения корня нелинейного уравнения, задача решения системы линейных и нелинейных систем уравнений итерационными методами.

К таким задачам относится и задача вычисления  $\sin x$  при разложении его в ряд. Чем больше членов ряда мы возьмем, тем ближе его значение будет приближаться к действительному; при этом значения последних слагаемых здесь должны все более уменьшаться. Скорость этого уменьшения характеризует скорость процесса схождения итерационного процесса (см. рисунок).



а) медленно сходящийся процесс

б) быстро сходящийся процесс

Естественно, чем быстрее сходится процесс, тем лучше, потому что в этом случае для получения приемлемого результата с заданной погрешностью можно будет взять меньше членов ряда, или выполнить меньше итераций (повторений процесса), что уменьшает объем вычислений.

Другой подход к понятию сходимости используется в методах дискретизации, в которых задача с непрерывными параметрами заменяется задачей, в которой значения функции вычисляются в фиксированных точках. Такой подход используется, например, в численном интегрировании, в методе конечных разностей, в методе конечных элементов и т.п. Здесь под *сходимостью метода* понимается стремление значений решения дискретной модели к соответствующим значениям решения исходной задачи при стремлении к нулю параметра дискретизации (например, шага интегрирования, размеров конечных элементов в МКЭ и т.д.).



детерминанта) матрицы:

$$D = \det [A] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Вычисление определителя матрицы не всегда простая задача. Легко вычисляются определители невысоких порядков:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}; \quad (1.3)$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{31}a_{13}a_{22} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Определитель треугольной матрицы равен произведению ее элементов, лежащих на главной диагонали.

Для матриц более высоких порядков можно вычислять их определители путем последовательного разложения их по строке или по столбцу:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \det [A_{11}] + a_{12} \cdot \det [A_{12}] + \dots + a_{1n} \cdot \det [A_{1n}],$$

где:  $\det [A_{ik}]$  – это определитель матрицы, получаемой при вычеркивании в исходной матрице  $i$ -ой строки и  $k$ -го столбца; вычисление этого определителя можно производить опять путем разложения по строке (или по столбцу), и так до конца или до тех пор, пока не дойдем до матрицы третьего порядка, которую можно вычислить согласно выражению (1.3).

В матричной форме решение системы уравнений  $[A] \cdot \{X\} = \{B\}$  может быть записано в виде:

$$\{X\} = [A]^{-1} \cdot \{B\},$$

где  $[A]^{-1}$  – обратная матрица, вычисляемая по выражению:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.4)$$

Здесь:  $D = \det [A]$  – определитель матрицы  $[A]$ ;  $A_{ij}$  – алгебраические дополнения элементов  $a_{ij}$  в матрице  $[A]$ , вычисляемые согласно выражению:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot (\text{минор элемента } a_{ij}),$$

где минор элемента  $a_{ij}$  – это определитель матрицы, которая получается после



вычеркивания в матрице  $[A]$   $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца.

Заметим, что решение система уравнений (1.1), (1.2) имеет только в том случае, если ее определитель не равен нулю ( $D = \det[A] \neq 0$ ), то есть, если матрица  $[A]$  невырождена.

Рассмотренный подход требует большого объема трудоемких вычислений.

Широко для решения систем линейных алгебраических уравнений используется также *метод Гаусса* и его модификации. Метод основан на приведении матрицы системы к треугольному виду, что достигается последовательным исключением неизвестных из уравнений системы.

Сначала с помощью первого уравнения исключается  $x_1$  из всех последующих уравнений системы. Затем с помощью второго уравнения исключается  $x_2$  из третьего и всех последующих уравнений. Этот процесс называется прямым ходом Гаусса, и продолжается он до тех пор, пока в левой части последнего уравнения не останется лишь одно слагаемое с неизвестным  $x_n$ , то есть пока матрица системы  $[A]$  не будет приведена к треугольному виду.

Затем выполняется обратный ход Гаусса, который состоит в последовательном вычислении искомым неизвестных:

решая последнее уравнение, находим  $x_n$ , затем из предпоследнего уравнения находим  $x_{n-1}$  и так до первого уравнения, из которого находим  $x_1$ .

Рассмотрим применение метода Гаусса для системы трех уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1.5)$$

Для исключения  $x_1$  из второго и третьего уравнений умножим первое уравнение последовательно на коэффициенты  $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$  и  $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$  (в общем случае на

$\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)$ ) и сложим полученные уравнения соответственно со вторым и третьим уравнениями. В результате получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2; \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3, \end{cases} \quad (1.6)$$

где:  $a'_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}; \quad a'_{23} = a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}; \quad b'_2 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1;$

$$a'_{32} = a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12}; \quad a'_{33} = a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13}; \quad b'_3 = b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}b_1$$

или в общем виде:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \quad (i, j = 2, 3); \quad b'_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1 \quad (i = 2, 3).$$

Теперь из третьего уравнения полученной системы (1.6) нужно исключить  $x_2$ .

Поступаем аналогично. Умножаем второе уравнение на коэффициент  $\left(-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}\right)$  и

складываем полученное уравнение с третьим. Получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2; \\ a''_{33}x_3 = b''_3, \end{cases}$$

где:

$$a''_{33} = a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{23}; \quad b''_3 = b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2.$$

Матрица системы уравнений стала треугольной, на этом заканчивается прямой ход Гаусса. Заметим, что здесь везде идет деление на коэффициенты  $a_{ii}$ , то есть на главные коэффициенты системы, поэтому они не должны быть равны нулю.

Обратный ход Гаусса начинается с решения последнего (третьего) уравне-

ния:

$$x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}},$$

после чего используя это значение, находим из второго уравнения  $x_2$ :

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23}x_3}{a'_{22}} = \frac{1}{a'_{22}} \left( b'_2 - a'_{23} \frac{b''_3}{a''_{33}} \right),$$

а затем, зная  $x_2$  и  $x_3$ , аналогично из первого уравнения находим  $x_1$ .

Аналогично строится вычислительный алгоритм решений линейной системы с произвольным числом уравнений. Заметим, что метод Гаусса – это достаточно удобный и широко применяемый метод решения систем линейных алгебраических уравнений.

При большом числе уравнений и значительном расхождении коэффициентов  $a_{ij}$  в системе уравнений могут иметь место погрешности вычисления неизвестных, которые могут быть весьма значительными.

Далее рассмотрим методы, которые позволяют уточнять решения, полученные прямыми методами (методом Гаусса).

Эти методы называются *итерационными*.

Пусть мы нашли решение системы линейных алгебраических уравнений (1.1):



## 2. ОБЩАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В РАСЧЕТАХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

### 2.1. Расчет статически определимых ферм

Статически определимые фермы представляют собой шарнирно-стержневые системы, в которых стержни соединяются между собой по концам (в узлах) шарнирно и работают при узловом приложении нагрузок только на растяжение-сжатие. Рассмотрим ферму, представленную на рис. 2.1.

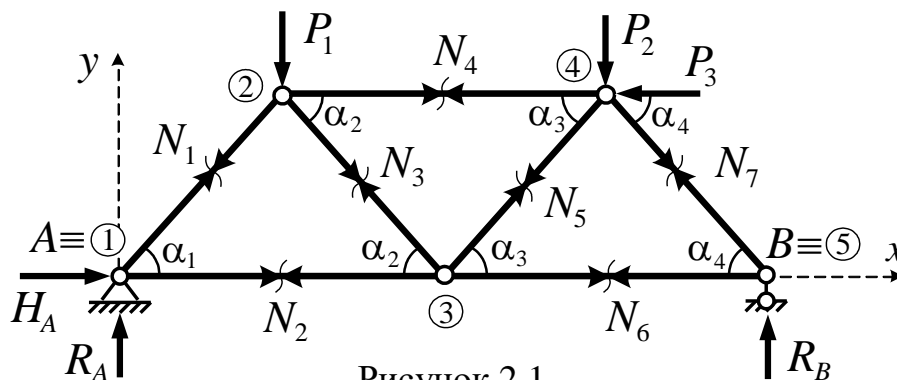


Рисунок 2.1

Как ферма в целом, так и каждый ее узел должны находиться в равновесии. Для фермы за основу удобно взять равновесие узлов. Для каждого узла можно составить (используя способ вырезания узлов) два независимых уравнения равновесия. Общее число уравнений равновесия тогда будет равняться удвоенному числу узлов. Число неизвестных равно сумме продольных сил в стержнях фермы и составляющих опорных реакций. И так как рассматриваются статически определимые системы, то число неизвестных должно равняться числу независимых уравнений равновесия.

Ферма на рис. 2.1 имеет пять узлов и соответственно для нее можно составить десять ( $5 \times 2$ ) уравнений равновесия. Неизвестными в ферме являются семь продольных сил в семи стержнях и три опорных реакции, то есть имеем десять неизвестных, число которых равно числу независимых уравнений равновесия.

Составим систему разрешающих уравнений для рассматриваемой фермы:

<u>Узел 1:</u>	$\Sigma X = 0;$	$H_A + N_1 \cos \alpha_1 + N_2 = 0;$
	$\Sigma Y = 0;$	$R_A + N_1 \sin \alpha_1 = 0;$
<u>Узел 2:</u>	$\Sigma X = 0;$	$-N_1 \cos \alpha_1 + N_3 \cos \alpha_2 + N_4 = 0;$
	$\Sigma Y = 0;$	$-N_1 \sin \alpha_1 - N_3 \sin \alpha_2 - P_1 = 0;$
<u>Узел 3:</u>	$\Sigma X = 0;$	$-N_2 - N_3 \cos \alpha_2 + N_5 \cos \alpha_3 + N_6 = 0;$
	$\Sigma Y = 0;$	$N_3 \sin \alpha_2 + N_5 \sin \alpha_3 = 0;$
<u>Узел 4:</u>	$\Sigma X = 0;$	$-N_4 - N_5 \cos \alpha_3 + N_7 \cos \alpha_4 - P_3 = 0;$
	$\Sigma Y = 0;$	$-N_5 \sin \alpha_3 - N_7 \sin \alpha_4 - P_2 = 0;$

$$\begin{aligned} \text{Узел 5:} \quad \Sigma X = 0; \quad & -N_6 - N_7 \cos \alpha_4 = 0; \\ \Sigma Y = 0; \quad & R_B + N_7 \sin \alpha_4 = 0. \end{aligned}$$

Получена линейная система алгебраических уравнений, решая которую (см. раздел 1) найдем все неизвестные – продольные силы в стержнях фермы и составляющие опорных реакций. Для проверки правильности расчета можно составить уравнения равновесия всей фермы:  $\Sigma M_A = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma X = 0$ .

## 2.2. Расчет статически определимых многопролетных балок

Многопролетной статически определимой называют балку, состоящую из простых балок, последовательно соединяющихся между собой по концам шарнирами, как правило, не совпадающими с опорами – см., например, балку на рис. 2.2.

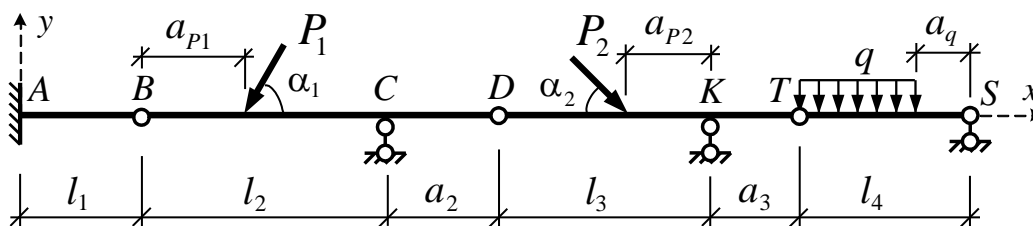


Рисунок 2.2

Каждая из простых балок – это диск, который имеет три степени свободы, равновесие которого описывается тремя уравнениями равновесия. Каждый шарнир, соединяющий балки, имеет две связи и при его разрезании в нем возникает соответственно две внутренние реактивные силы.

Рассматриваемая многопролетная балка состоит из четырех простых балок, и для них соответственно можно составить двенадцать уравнений равновесия. Разделив многопролетную балку по трем шарнирам B, D и T на простые балки, получим в качестве неизвестных шесть внутренних реактивных сил и шесть опорных реакций в опорах A (три), C, K, S (рис. 2.3) – всего 12. Число неизвестных равно числу уравнений равновесия.

Используя общий подход, следует составить уравнения равновесия для каждой из простых балок (рис. 2.3):

Балка AB:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; \quad & H_A - X_B = 0; \\ \Sigma Y = 0; \quad & R_A - Y_B = 0; \\ \Sigma M_A = 0; \quad & -M_{RA} + Y_B \cdot l_1 = 0; \end{aligned}$$

Балка BCD:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; \quad & X_B - P_1 \cos \alpha_1 - X_D = 0; \\ \Sigma Y = 0; \quad & Y_B - P_1 \sin \alpha_1 + R_C - Y_D = 0; \\ \Sigma M_B = 0; \quad & P_1 \sin \alpha_1 \cdot a_{P1} - R_C l_2 + Y_D \cdot (l_2 + a_2) = 0; \end{aligned}$$

Балка DKT:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; \quad & X_D + P_2 \cos \alpha_2 - X_T = 0; \\ \Sigma Y = 0; \quad & Y_D - P_2 \sin \alpha_2 + R_K - Y_T = 0; \\ \Sigma M_D = 0; \quad & P_2 \cos \alpha_2 \cdot (l_3 - a_{P2}) - R_K l_3 + Y_T \cdot (l_3 + a_3) = 0; \end{aligned}$$

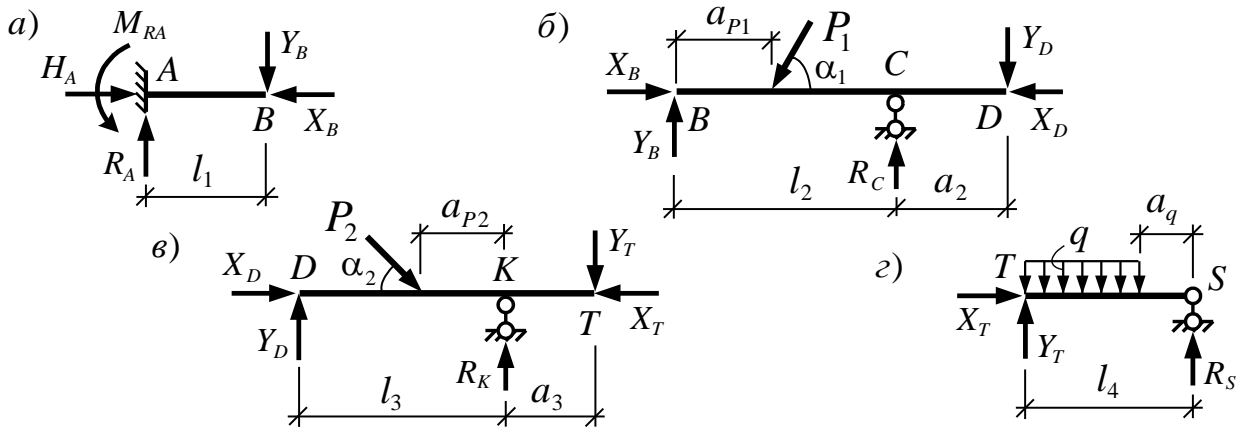


Рисунок 2.3. Расчетные схемы простых балок, составляющих многопролетную

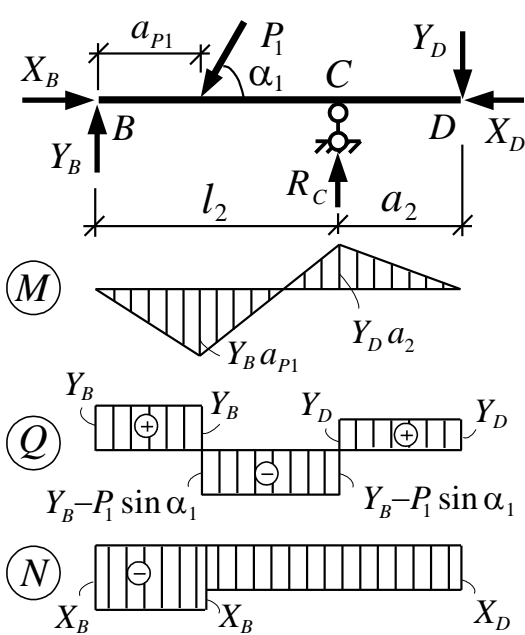


Рисунок 2.4

Балка TS:  $\sum X = 0; \quad X_T = 0;$   
 $\sum Y = 0; \quad Y_T - q(l_4 - a_q) + R_S = 0;$   
 $\sum M_T = 0; \quad 0,5q(l_4 - a_q)^2 - R_S \cdot l_4 = 0.$

Получаем систему 12 уравнений, решая которую, найдем все опорные реакции и внутренние силы в шарнирах. В качестве проверки следует использовать уравнения равновесия многопролетной балки в целом:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum X = 0.$$

Теперь можно рассмотреть каждую балку отдельно с приложенными внешними нагрузками, опорными реакциями и усилиями между соседними балками (в шарнирах) и построить в каждой из них эпюры внутренних сил  $M$ ,  $Q$  и  $N$ . Например, для балки  $BCD$  эти эпюры могут иметь вид, показанный на рис. 2.4.

Совместив эпюры усилий во всех простых балках на одной схеме, получим эпюры внутренних сил  $M$ ,  $Q$  и  $N$  для многопролетной балки.

Все расчеты и вычисления, представленные здесь, можно выполнять в среде MathCad, где также можно получить эпюры усилий в графическом виде.

### 2.3. Расчет статически определимых рам

Подобный подход применим и к расчету статически определимых рам. При этом будем разбивать раму на более мелкие части, на простые элементы, по аналогии с тем, как это делается в методе конечных элементов, – будем разделять раму на прямолинейные стержни так, чтобы распределенная нагрузка, если она есть, действовала на всей их длине, либо в пределах длины таких стержней не было никаких нагрузок. Точками разбивки (узлами) рамы в этом случае будут являться точки излома и разветвления стержней, точки приложения опорных связей и сосредоточенных нагрузок, точки начала и конца распре-

деленных нагрузок, точки шарнирного соединения элементов.

Например, раму, представленную на рис. 2.5, разобьем на семь стержней (рис. 2.6, 2.7).

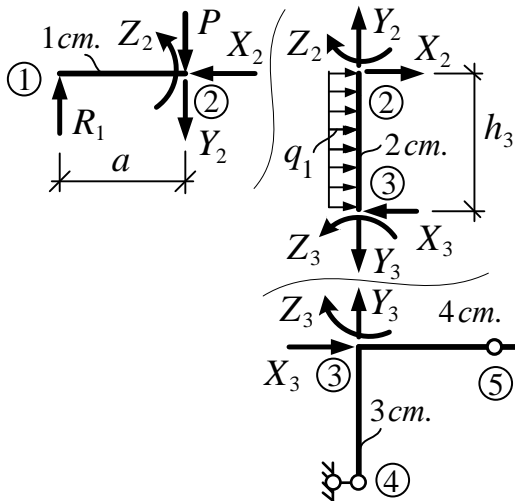


Рисунок 2.6

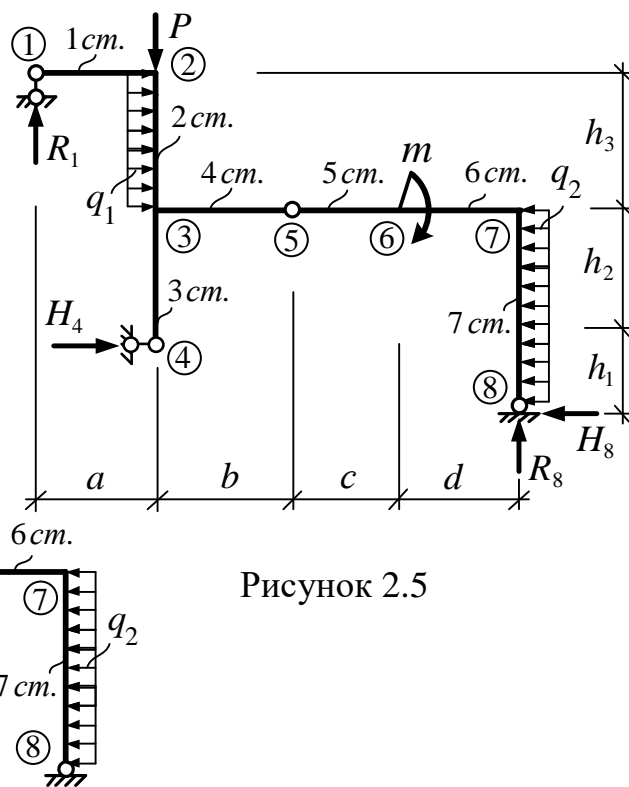


Рисунок 2.5

Соединение элементов (стержней) между собой в узлах может быть жестким либо шарнирным. При разрезании жестких соединений к стержням с той и другой стороны необходимо прикладывать составляющие реактивных сил (по две взаимно перпендикулярные силы) и изгибающие моменты, действующие в противоположных направлениях (рис. 2.6, 2.7). При разрезании шарнирных соединений к стержням с той и другой стороны прикладываются только составляющие реактивных сил.

Применим для сил взаимодействия стержней в узлах следующее правило знаков: в началах стержней составляющие сил будем направлять по направлениям, совпадающим с направлениями осей  $x$  и  $y$ , на концах стержней – соответственно в направлениях, противоположных направлениям осей  $x$ ,  $y$ ; моменты в началах стержней направим по часовой стрелке, на концах стержней – против часовой стрелки.

В узле 3 соединяется три стержня (такой узел будем называть двойным), поэтому сначала отрезаем один из стержней – стержень 2 (рис. 2.6) с появлением усилий  $X_3$ ,  $Y_3$  и  $Z_3$  между концом стержня 2 и нижней частью рамы; а затем разрезаем узел соединения между стержнями 3 и 4 с появлением усилий  $X'_3$ ,  $Y'_3$ ,  $Z'_3$  (рис. 2.7).

В результате разделяем раму на семь простых прямолинейных стержней, для каждого из которых, как для плоских дисков, можно составить по три уравнения равновесия, и всего, следовательно, будем иметь 21 уравнение. Общее число неизвестных сил, включающее опорные реакции и силы взаимодействия между стержнями  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , в рассматриваемой раме также равно 21. Следова-

тельно, задача представлена корректно, и система уравнений решается.

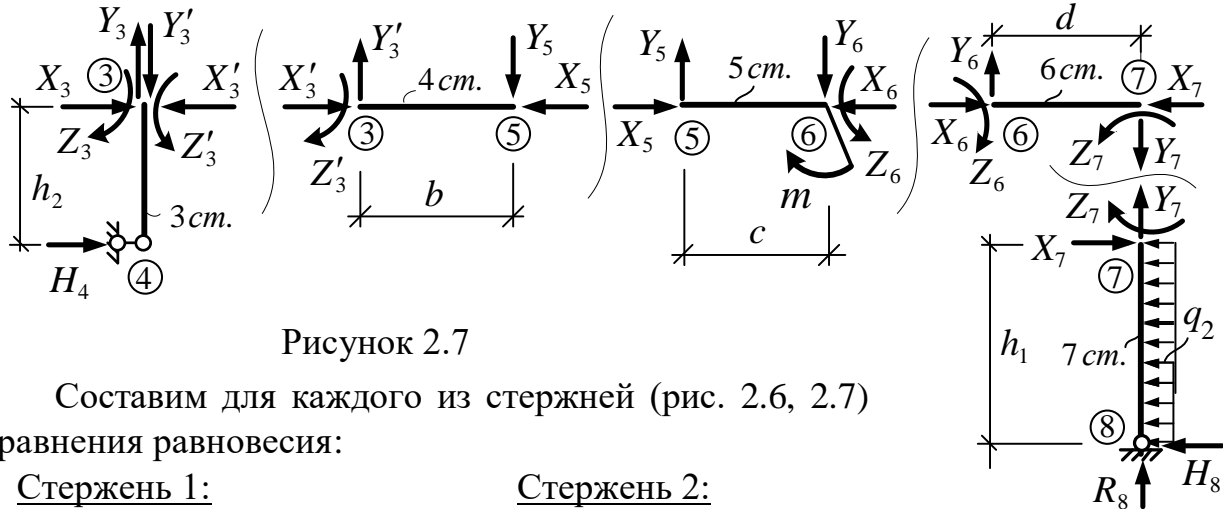


Рисунок 2.7

Составим для каждого из стержней (рис. 2.6, 2.7) уравнения равновесия:

Стержень 1:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; & \quad -X_2 = 0; \\ \Sigma Y = 0; & \quad R_1 - P - Y_2 = 0; \\ \Sigma M_1 = 0; & \quad -Z_2 + (P + Y_2) \cdot a = 0; \end{aligned}$$

Стержень 2:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; & \quad X_2 - X_3 = 0; \\ \Sigma Y = 0; & \quad Y_2 - Y_3 = 0; \\ \Sigma M_2 = 0; & \quad Z_2 - (q_1 h_3) \cdot (h_3/2) + X_3 \cdot h_3 - Z_3 = 0; \end{aligned}$$

Стержень 3:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; & \quad X_3 - X'_3 + H_4 = 0; \\ \Sigma Y = 0; & \quad Y_3 - Y'_3 = 0; \\ \Sigma M_3 = 0; & \quad Z_3 - Z'_3 - H_4 \cdot h_2 = 0; \end{aligned}$$

Стержень 4:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; & \quad X'_3 - X_5 = 0; \\ \Sigma Y = 0; & \quad Y'_3 - Y_5 = 0; \\ \Sigma M_3 = 0; & \quad Z'_3 + Y_5 \cdot b = 0; \end{aligned}$$

Стержень 5:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; & \quad X_5 - X_6 = 0; \\ \Sigma Y = 0; & \quad Y_5 - Y_6 = 0; \\ \Sigma M_5 = 0; & \quad m + Y_6 \cdot c - Z_6 = 0; \end{aligned}$$

Стержень 6:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; & \quad X_6 - X_7 = 0; \\ \Sigma Y = 0; & \quad Y_6 - Y_7 = 0; \\ \Sigma M_6 = 0; & \quad Z_6 + Y_7 \cdot d - Z_7 = 0; \end{aligned}$$

Стержень 7:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; & \quad X_7 - q_2 \cdot h_1 - H_8 = 0; \\ \Sigma Y = 0; & \quad Y_7 + R_8 = 0; \\ \Sigma M_7 = 0; & \quad Z_7 + (q_2 h_1) \cdot (h_1/2) + H_8 \cdot h_1 = 0. \end{aligned}$$

После определения опорных реакций и реакций во внутренних связях можно построить для каждого из стержней эпюры внутренних сил  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ . Например, для стержня 6 эпюры усилий показаны на рис. 2.8,а.

Если на участке действует распределенная нагрузка, как на стержнях 2 и 7, то к линейной эпюре, полученной как для стержня 6, нужно подвесить балочную эпюру изгибающих моментов, полученную для стержня, преобразованного в простую двухопорную балку (рис. 2.8,б), от действия распределенной нагрузки. Например, для стержня 2 эпюра  $M$  представлена на рис. 2.8,в.

Перенеся в конце эпюры усилий для отдельных стержней на общую схему рамы, получим эпюры внутренних сил  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  для рамы в целом.



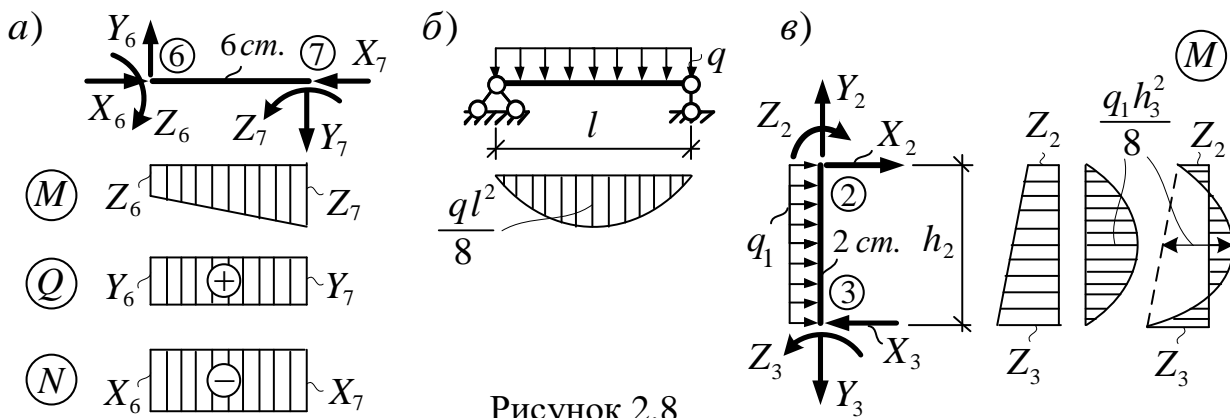


Рисунок 2.8

Расчет многопролетной балки (рис. 2.2) также можно выполнять, разбивая ее аналогично раме – на простые стержни, в пределах длин которых нет сосредоточенных нагрузок; при этом, конечно, число разрешающих уравнений существенно увеличивается в сравнении с вышеизложенным подходом (раздел 2.2), однако проще строятся эпюры внутренних сил  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЦ ВЛИЯНИЯ

В ряде случаев расчеты конструкций и сооружений удобно производить в матричной форме, которая позволяет более компактно записывать формулы и уравнения и, главное, удобна для компьютерных расчетов.

Рассмотрим *принципы определения усилий от сосредоточенных сил*. Пусть на систему действует система сил  $F_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), от действия которой требуется найти усилие  $S$  в заранее выбранных сечениях  $k=1, 2, \dots, m$ .

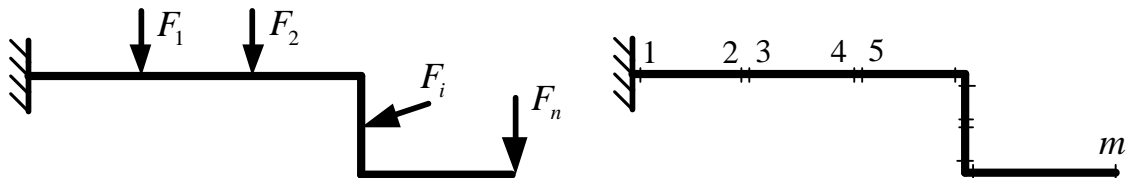


Рисунок 3.1

На основании принципа независимости действия сил выражения для определения интересующих нас усилий можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 S_1 &= s_{11}F_1 + s_{12}F_2 + \dots + s_{1i}F_i + \dots + s_{1n}F_n; \\
 S_2 &= s_{21}F_1 + s_{22}F_2 + \dots + s_{2i}F_i + \dots + s_{2n}F_n; \\
 &\dots \\
 S_k &= s_{k1}F_1 + s_{k2}F_2 + \dots + s_{ki}F_i + \dots + s_{kn}F_n; \\
 &\dots \\
 S_m &= s_{m1}F_1 + s_{m2}F_2 + \dots + s_{mi}F_i + \dots + s_{mn}F_n.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Здесь  $s_{ki}$  – силовой фактор в сечении  $k$ , вызванный единичной силой, приложенной по направлению  $F_i$  (рис. 3.1), то есть первый индекс ( $k$ ) показывает, где вычисляется усилие, второй индекс ( $i$ ) – от чего (от какого воздействия).

В матричной форме выражения (3.1) записываются в виде:

$$\{S\} = [L_S] \cdot \{F\}, \quad (3.2)$$

где  $\{S\}$  – вектор искомых внутренних сил;  $\{F\}$  – вектор внешних сил;  $[L_S]$  – матрица влияния фактора  $S$  порядка  $m \times n$ :

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_k \\ \dots \\ S_m \end{Bmatrix}; \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_i \\ \dots \\ F_m \end{Bmatrix}; \quad [L_S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1i} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2i} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k1} & s_{k2} & \dots & s_{ki} & \dots & s_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mi} & \dots & s_{mn} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

В общем случае  $m \neq n$ , и матрица  $[L_S]$  несимметрична. Если отыскиваются изгибающие моменты в сечениях балки или рамы, то  $S = M$ , и матрица  $[L_S] = [L_M]$  называется *матрицей влияния изгибающих моментов*; при определении усилий в стержнях фермы  $S = N$ , и матрица  $[L_S] = [L_N]$  становится *матрицей влияния продольных сил*.

Матрицы влияния позволяют получить усилия в искомых сечениях от действия различных вариантов нагрузок.

Рассмотрим *принципы формирования матриц влияния*. Любой  $i$ -ый столбец матрицы влияния  $[L_S]$  может быть получен (при силах  $F_1, F_2, \dots, F_n$  любых направлений) как значения усилия  $S$  от единичной силы, приложенной в точке  $i$ .

Всякая  $k$ -ая строка матрицы влияния  $[L_S]$  может быть получена (при силах  $F_1, F_2, \dots, F_n$  одного направления) через линию влияния усилия  $S$  в сечении  $k$  (л.в.  $S_k$ ), построенную от единичного груза  $F = 1$ , параллельного данным силам.

Следовательно, каждый столбец матрицы является дискретным аналогом соответствующей единичной эпюры (при внешних силах любых направлений); каждая строка – аналогом соответствующей линии влияния (при внешних силах одного направления):

$$[L_S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1i} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2i} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k1} & s_{k2} & \dots & s_{ki} & \dots & s_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mi} & \dots & s_{mn} \end{bmatrix}$$

Ординаты  
линии  
влияния  $S_k$

Ординаты единичной эпюры  $\bar{s}$

На практике часто встречается загрузка конструкции вертикальными сосредоточенными силами. При этом матрицу влияния, как отмечено выше, можно сформировать двумя способами:

- 1) *по столбцам* – с помощью единичных эпюр;
- 2) *по строкам* – с помощью линий влияния.

Рассмотрим эти способы на примере балки, представленной на рис. 3.2, для которой нас интересуют эпюры изгибающих моментов от различных вариантов нагружения балки сосредоточенными силами в точках 1, 2, 3, 4.

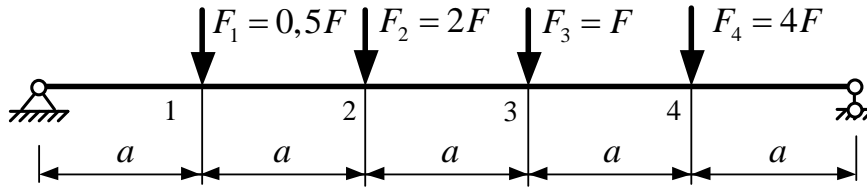


Рисунок 3.2

Матрица влияния изгибающих моментов  $[L_M]$ . Учитывая, что эпюра  $M$  изменяется на участках между точками приложения сил линейно, сечения 1, 2, 3, 4 будут расчетными для получения эпюр  $M$ , и матрица влияния (3.3) будет квадратной.

Способ 1. Последовательно загружаем балку неподвижными единичными силами в точках 1, 2, 3, 4 и строим от их действия (рис. 3.3) единичные эпюры моментов. Из их ординат по столбцам формируем матрицу влияния (3.4). При этом для ординат эпюры  $M$  следует принять определенное правило знаков, которое должно согласовываться с правилом знаков для ординат линий влияния. Здесь это соответствует знаку «плюс» для растянутых волокон снизу (рис. 3.3).

$$[L_M] = \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & \bar{m}_{12} & \bar{m}_{13} & \bar{m}_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8a & 0,6a & 0,4a & 0,2a \\ 0,6a & 1,2a & 0,8a & 0,4a \\ 0,4a & 0,8a & 1,2a & 0,6a \\ 0,2a & 0,4a & 0,6a & 0,8a \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Эпюры  $\bar{M}_1$     $\bar{M}_2$     $\bar{M}_3$     $\bar{M}_4$

Способ 2. Строим линии влияния изгибающих моментов в расчетных сечениях 1, 2, 3, 4 от единичной силы, пробегающих всю балку (рис. 3.4). Из их ординат по строкам формируем матрицу влияния  $[L_M]$ :

$$[L_M] = \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & \bar{m}_{12} & \bar{m}_{13} & \bar{m}_{14} \\ \bar{m}_{21} & \bar{m}_{22} & \bar{m}_{23} & \bar{m}_{24} \\ \bar{m}_{31} & \bar{m}_{32} & \bar{m}_{33} & \bar{m}_{34} \\ \bar{m}_{41} & \bar{m}_{42} & \bar{m}_{43} & \bar{m}_{44} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Л. в. } M_1 \\ \text{Л. в. } M_2 \\ \text{Л. в. } M_3 \\ \text{Л. в. } M_4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0,8a & 0,6a & 0,4a & 0,2a \\ 0,6a & 1,2a & 0,8a & 0,4a \\ 0,4a & 0,8a & 1,2a & 0,6a \\ 0,2a & 0,4a & 0,6a & 0,8a \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,5F \\ 2F \\ F \\ 4F \end{Bmatrix}.$$

Образуем вектор внешних вертикальных сил:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,5F \\ 2F \\ F \\ 4F \end{Bmatrix}.$$

Определим изгибающие моменты. Заменяв в выражении (3.3)  $S$  на  $M$ , найдем изгибающие моменты в сечениях 1–4:

$$\{M\} = [L_M] \cdot \{F\}; \quad \{M\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8a & 0,6a & 0,4a & 0,2a \\ 0,6a & 1,2a & 0,8a & 0,4a \\ 0,4a & 0,8a & 1,2a & 0,6a \\ 0,2a & 0,4a & 0,6a & 0,8a \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0,5F \\ 2F \\ F \\ 4F \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,8a \cdot 0,5F + 0,6a \cdot 2F + 0,4a \cdot F + 0,2a \cdot 4F \\ 0,6a \cdot 0,5F + 1,2a \cdot 2F + 0,8a \cdot F + 0,4a \cdot 4F \\ 0,4a \cdot 0,5F + 0,8a \cdot 2F + 1,2a \cdot F + 0,6a \cdot 4F \\ 0,2a \cdot 0,5F + 0,4a \cdot 2F + 0,6a \cdot F + 0,8a \cdot 4F \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,8Fa \\ 5,1Fa \\ 5,4Fa \\ 4,7Fa \end{Bmatrix}.$$

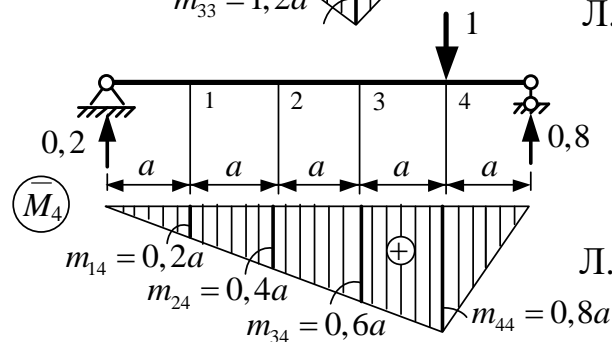
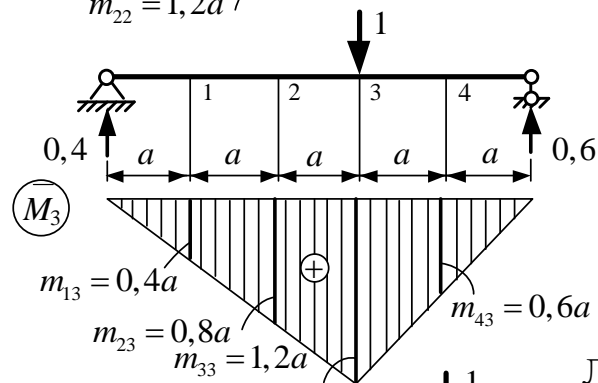
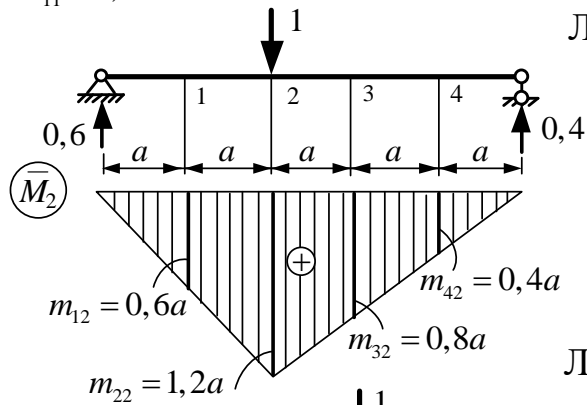
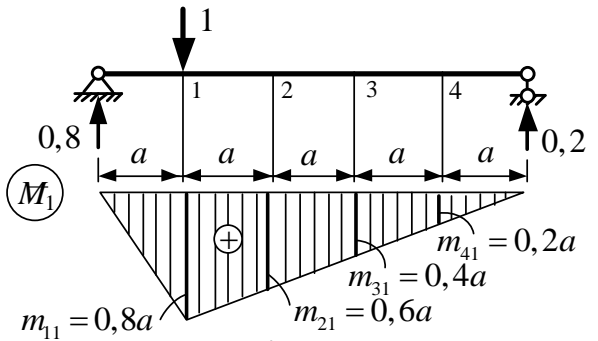
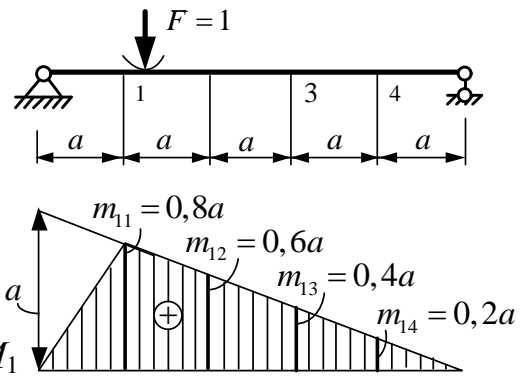
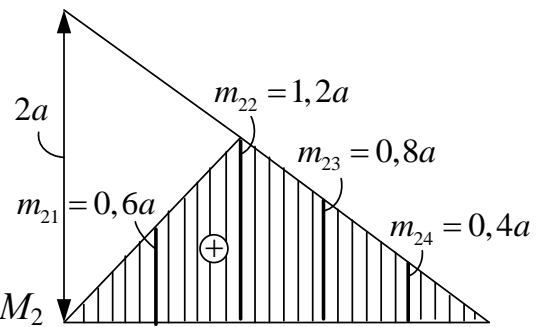


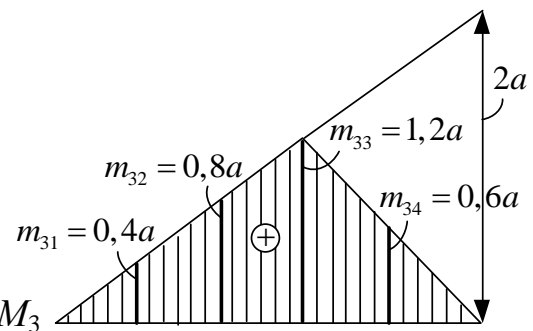
Рисунок 3.3



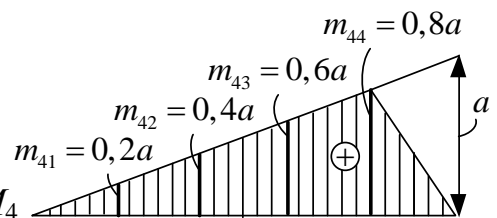
Л.В.  $M_1$



Л.В.  $M_2$



Л.В.  $M_3$



Л.В.  $M_4$

Рисунок 3.4

Строим эпюру изгибающих моментов  $M$  от рассматриваемой нагрузки (рис. 3.5).

Заметим, что матричная форма расчета особенно удобна при исследовании нескольких вариантов загрузки одной и той же системы. Если значения внешних сил изменяется, новые значения внутренних сил легко найти, умножив матрицу влияния  $[L_S]$  на новый вектор  $\{F\}$ .

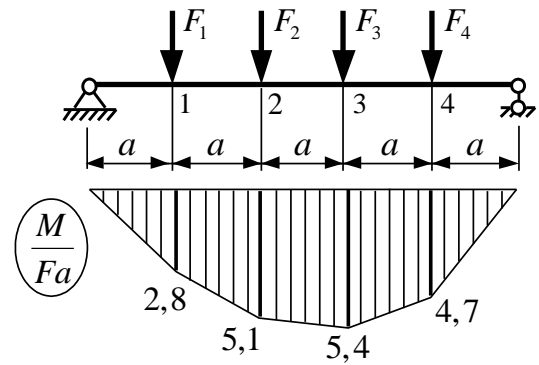


Рисунок 3.5

Покажем применение матриц влияния для расчета ферм (рис. 3.6), на которые по их структуре нагрузки прикладываются дискретно – только в шарнирные узлы. Поэтому для ферм будем всегда иметь конечное число точек приложения нагрузок, которые соответствуют их реальному действию.

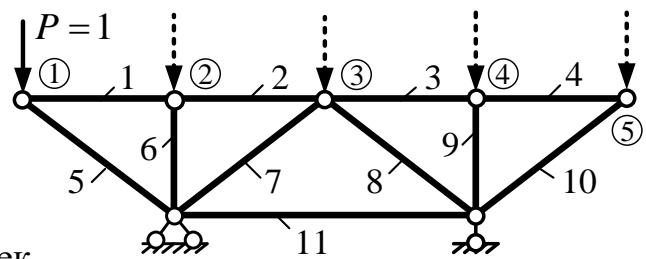


Рисунок 3.6

Для получения матриц влияния необходимо последовательно прикладывать единичную силу в каждую из точек, в которых могут действовать нагрузки, и от ее действия определять усилия (продольные силы) во всех стержнях системы. Полученные значения усилий для каждой из отдельно приложенных нагрузок (от 1-ой до  $n$ -ой) записываются последовательно в столбцы матрицы. В результате для фермы на рис. 3.6 получим матрицу влияния в виде:

$$[L_N] = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & \dots & n_{15} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & \dots & n_{25} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & \dots & n_{35} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{11,1} & n_{11,2} & n_{11,3} & \dots & n_{11,5} \end{bmatrix},$$

где  $n_{ik}$  – продольное усилие в  $i$ -ом стержне от действия единичной силы, приложенной в  $k$ -ом узле (рис. 3.6).

Строки матрицы влияния отвечают ординатам линий влияния усилий, соответствующих первому номеру в индексах элементов ( $i$ ), то есть элементы  $n_{11}, n_{12}, \dots, n_{1k}, \dots, n_{15}$  являются ординатами линии влияния продольной силы в стержне 1 (усилия  $N_1$ ), элементы  $n_{21}, n_{22}, \dots, n_{2k}, \dots, n_{25}$  являются ординатами линии влияния продольной силы в стержне 2 (усилия  $N_2$ ) и т. д.

#### 4. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК

Трехшарнирные арки – это системы, состоящие из двух криволинейных стержней, соединенных между собой шарниром, каждый из которых опирается на основание с помощью шарнирно неподвижной опоры (рис. 4.1).

Трехшарнирные арки статически определимы и относятся к распорным системам, в которых при действии только вертикальных нагрузок возникают и горизонтальные опорные реакции (горизонтальные составляющие опорных реакций), называемые распором.

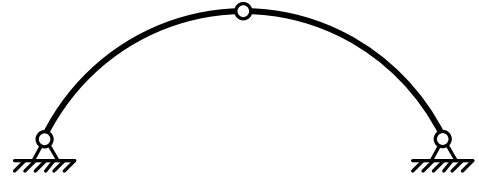


Рисунок 4.1

Принцип образования трехшарнирных арок соответствует первому принципу геометрической неизменяемости (три диска соединяются тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой).

Получим выражение для определения опорных реакций и внутренних сил в сечениях арки; при этом будем сравнивать все эти усилия с соответствующими усилиями в простой двухопорной балке, имеющей такой же пролет и нагруженной такой же нагрузкой.

Рассмотрим расчет трехшарнирных арок на действие вертикальных нагрузок на примере симметричной арки с опорами в одном уровне (рис. 4.2,а). В арке неизвестны четыре составляющие опорных реакций. Обозначим вертикальные составляющие через  $R_A$ ,  $R_B$ , а горизонтальные, соответственно, через  $H_A$  и  $H_B$ . Для определения этих реакций воспользуемся условием равновесия плоской системы сил.

Вертикальные составляющие реакций определим из уравнений равновесия арки в виде сумм моментов всех сил относительно опорных точек  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad -R_B l + \sum_{i=1}^{n_F} F_i a_{F_i} = 0; \quad R_B &= \frac{\sum_{i=1}^{n_F} F_i a_{F_i}}{l}; \\ \sum M_B = 0; \quad R_A l - \sum_{i=1}^{n_F} F_i b_{F_i} = 0; \quad R_A &= \frac{\sum_{i=1}^{n_F} F_i b_{F_i}}{l}. \end{aligned}$$

где:  $l$  – пролет арки;  $n_F$  – число сил, действующих на арку.

Нетрудно заметить, что реакции  $R_A$  и  $R_B$  в опорах арки определяются аналогично опорным реакциям в простой двухопорной балке, нагруженной той же нагрузкой (рис. 4.2,б). Получаем, что

$$R_A = R_A^0; \quad R_B = R_B^0, \quad (4.1)$$

где  $R_A^0$  и  $R_B^0$  – опорные реакции соответствующей двухопорной балки.

Для определения горизонтальных составляющих опорных реакций  $H_A$  и  $H_B$  (распора арки) рассмотрим равновесие полуарок  $AC$  и  $CB$ . Составив уравнения равновесия сил, действующих соответственно на левую и правую полу-

арки, в виде сумм моментов их относительно шарнира  $C$ , получим:

$$\sum M_C^{лев} = 0; \quad R_A \frac{l}{2} - \sum_{i=1}^{n_F^{лев}} F_i \left( \frac{l}{2} - a_{F_i} \right) - H_A f = 0; \quad H_A = \frac{R_A \frac{l}{2} - \sum_{i=1}^{n_F^{лев}} F_i \left( \frac{l}{2} - a_{F_i} \right)}{f}; \quad (4.2)$$

$$\sum M_C^{прав} = 0; \quad -R_B \frac{l}{2} + \sum_{i=1}^{n_F^{прав}} F_i \left( \frac{l}{2} - b_{F_i} \right) + H_B f = 0; \quad H_B = \frac{R_B \frac{l}{2} - \sum_{i=1}^{n_F^{прав}} F_i \left( \frac{l}{2} - b_{F_i} \right)}{f},$$

где:  $f$  – стрела подъема арки.

Если арка находится под действием только вертикальных нагрузок, как в рассматриваемом случае (рис. 4.2,а), то из уравнения проекций сил на горизонтальную ось ( $\sum X = 0$ ) получим, что горизонтальные составляющие опорных реакций для левой и правой опор одинаковы:  $H_A = H_B = H$ .

Числители в выражениях (4.2) представляют собой изгибающий момент в сечении  $C$  соответствующей двухопорной балки. Поэтому выражение для определения распора можно записать в виде

$$H = \frac{M_C^0}{f}, \quad (4.3)$$

где  $M_C^0$  – изгибающий момент в ключевом сечении  $C$  соответствующей двухопорной балки.

Из формулы (4.3) видно, что чем больше стрела подъема арки  $f$ , тем меньше распор. Следует помнить, что данная формула справедлива при действии на арку только вертикальных нагрузок.

Для определения внутренних сил в арке воспользуемся методом сечений.

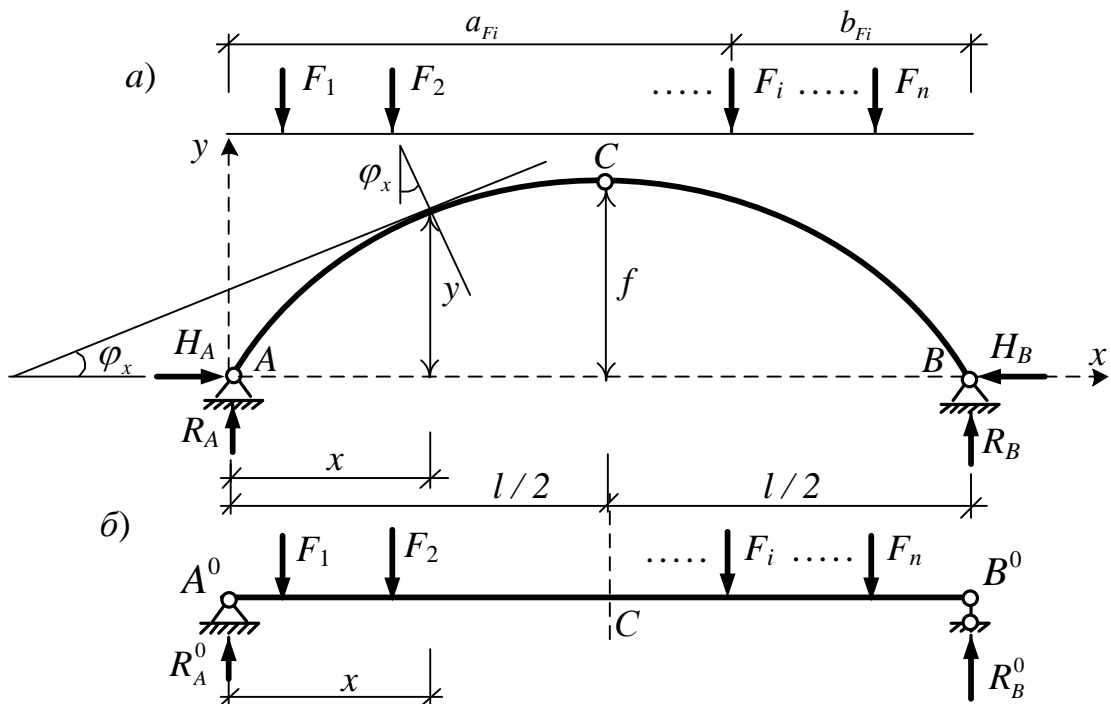


Рисунок 4.2

Рассекаем арку в месте определения усилий и рассматриваем одну из ее частей. Действие второй части на рассматриваемую часть учтем через внутренние силы в сечении – изгибающий момент, поперечную и продольную силы, которые приложим к рассматриваемой части арки в месте разреза. По отношению к рассматриваемой части арки указанные усилия будут выступать в качестве внешних сил. Рассмотрев теперь равновесие отсеченной части, найдем внутренние силы  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  в сечении арки.

Обозначим координаты центра тяжести произвольного сечения  $x$  в арке через  $x$  и  $y$ , а угол наклона касательной к оси арки (и соответственно угол между нормалью к оси арки и вертикалью) в сечении  $x$  через  $\varphi_x$  (рис. 4.2,а).

Из уравнения равновесия левой части арки получим, что изгибающий момент в сечении будет равен алгебраической сумме моментов всех сил, действующих на эту часть относительно центра тяжести данного сечения:

$$M_x = M_x^{лев} = R_A x - \sum_{i=1}^{n_F^{лев}} F_i (x - a_{Fi}) - H_A y. \quad (4.4)$$

Два первых слагаемых этого выражения представляют собой изгибающий момент в сечении  $x$  соответствующей двухопорной балки (рис. 4.2,б), который будем называть балочным. Тогда выражение (4.4) получим в виде

$$M_x = M_x^0 - H y. \quad (4.5)$$

Видно, что изгибающие моменты в арке при действии вертикальных нагрузок одного направления будут меньше изгибающих моментов в соответствующей двухопорной балке на значения изгибающих моментов, вызываемых в сечениях распором  $H$ . Следует заметить, что разгружающее влияние распора в арках достаточно велико, и именно в этом состоит преимущество арочных систем в сравнении с балками.

Из (4.5) следует, что эпюра изгибающих моментов в арке может быть построена сложением двух эпюр, одна из которых является эпюрой изгибающих моментов в соответствующей двухопорной балке ( $M^0$ ), а вторая представляет собой эпюру, получаемую умножением ординат оси арки на значение распора (рис. 4.3).

Эпюры усилий в арке могут строиться как непосредственно на оси арки, так и на горизонтальной оси, которая в этом случае рассматривается как проекция оси арки на горизонталь.

Например, для арки параболического очертания, нагруженной одной сосредоточенной силой (рис. 4.3,а), эпюра изгибающих моментов в соответствующей двухопорной балке показана на рис. 4.3,б, эпюра  $H y$  – на рис. 4.3,в, а окончательная эпюра изгибающих моментов в арке, построенная на горизонтальной оси, представлена на рис. 4.3,г.

Поперечная сила в сечении арки равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, включая опорные реакции, действующих по одну сторону



от сечения, на нормаль к оси арки в этом сечении. Для сечения  $x$  (рис. 4.2,а), рассматривая левую часть арки, получим

$$Q_x = R_A \cos \varphi_x - F_1 \cos \varphi_x - F_2 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x = (R_A - F_1 - F_2) \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x .$$

Выражение в скобках  $R_A - F_1 - F_2$  представляет собой балочную поперечную силу, то есть поперечную силу в соответствующей двухопорной балке на расстоянии  $x$  от левой опоры. Обозначив балочную поперечную силу через  $Q_x^0$ , получим для определения поперечной силы в произвольном сечении арки следующее выражение

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x . \quad (4.6)$$

Продольная сила в поперечном сечении арки равна алгебраической сумме прекий всех внешних сил, включая опорные реакции, действующих по одну сторону от сечения, на касательную к оси арки в рассматриваемом сечении. Для произвольного сечения  $x$  (рис. 4.2,а), рассматривая левую часть арки и учитывая, что продольная сила положительна, если она вызывает растяжение, получим:

$$N_x = -R_A \sin \varphi_x + F_1 \sin \varphi_x + F_2 \sin \varphi_x - H \cos \varphi_x = -(R_A - F_1 - F_2) \sin \varphi_x - H \cos \varphi_x .$$

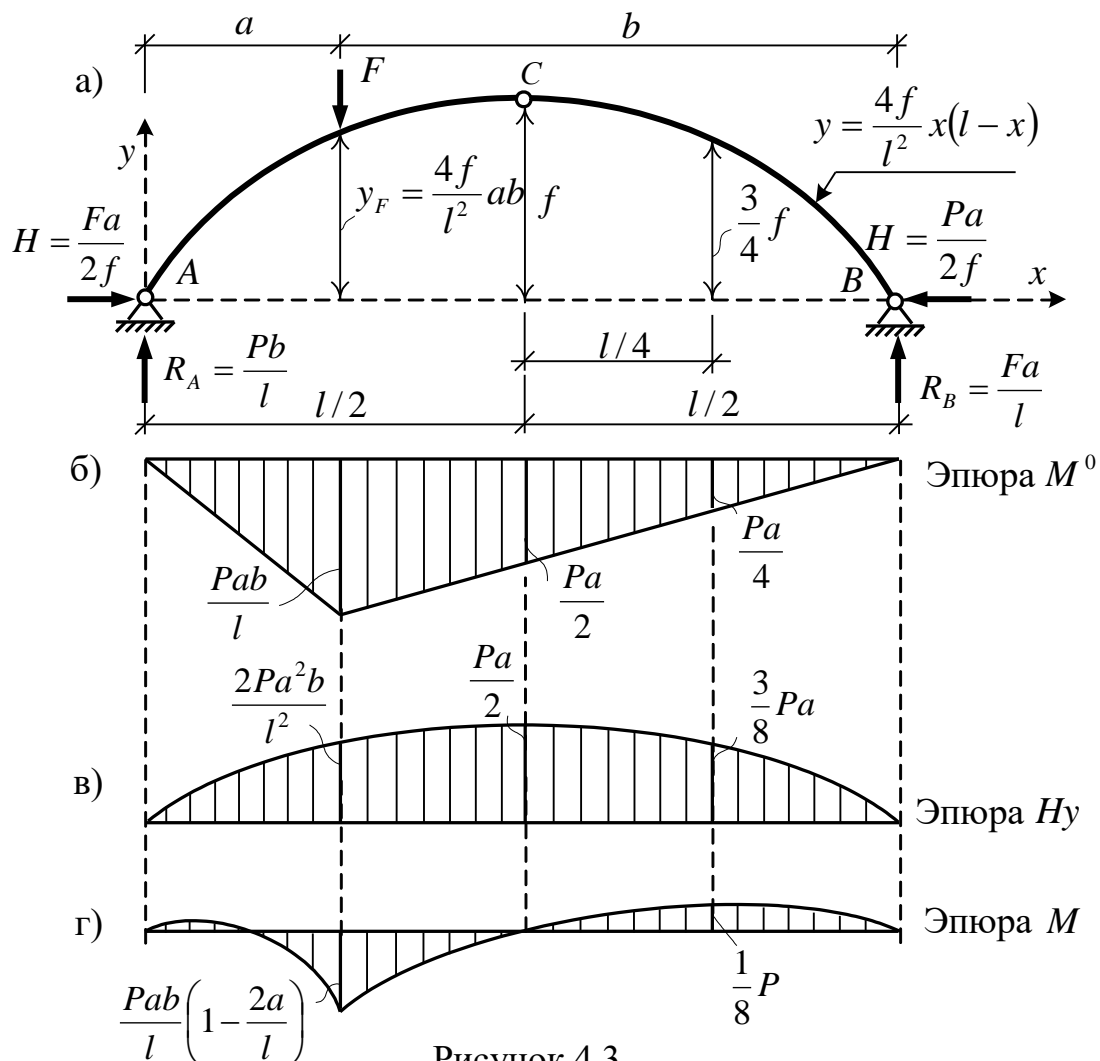


Рисунок 4.3

Учитывая, что выражение в скобках представляет балочную поперечную силу в сечении  $x$  ( $Q_x^0$ ), выражение для определения продольных сил в сечениях арок при действии на них только вертикальных нагрузок получим в виде:

$$N_x = -(Q_x^0 \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x). \quad (4.7)$$

Анализ выражений  $M_x$ ,  $Q_x$ ,  $N_x$ , показывает, что усилия в арках изменяются по сложным криволинейным законам, и точно построить графики эпюр этих усилий не представляется возможным. Строят эпюры внутренних сил в арках, используя численный подход, – разбивая пролет арки на некоторое достаточное число частей (рис. 4.4) и вычисляя ординаты эпюр усилий в соответствующем

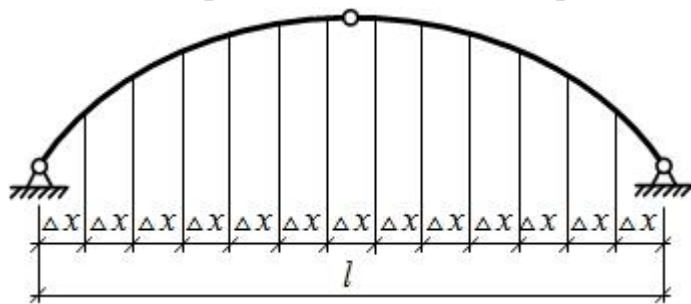


Рисунок 4.4

числе точек, которые затем соединяют плавными кривыми. Чем меньше при этом будет шаг разбивки ( $\Delta x$ ), тем более точно можно изобразить вид эпюр усилий, однако соответственно возрастает объем вычислений.

## 5. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Часто в результате экспериментальных данных или расчетов получаем зависимость  $f(x)$  в виде определенного числа точек (в виде дискретного множества), то есть для функции неизвестна зависимость, а известны только некоторые её промежуточные результаты. Получению зависимостей для таких функций в требуемой области и служит задача об аппроксимации функций (рис. 5.1).

Аппроксимация функций – это нахождение функции  $\varphi(x)$ , максимальной близкой действительной функции  $f(x)$ , так чтобы отклонение её, по крайней мере, в заданной области изменения аргумента  $x$  было наименьшим.

Функцию  $\varphi(x)$  показывают аппроксимирующей.

Подобный подход используется и в методе конечных элементов, где задаются аппроксимирующие функции для перемещений, которые в дальнейшем должны дать близкие к действительным перемещения (деформации) и усилия.

Для аппроксимации часто используют многочлены вида

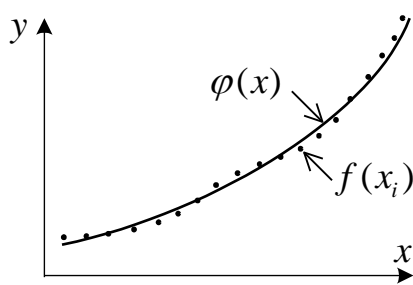


Рисунок 5.1

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_mx^m, \quad (5.1)$$

где коэффициенты  $a_i$  подбирают из определенных условий так, чтобы достичь наименьшего отклонения многочлена от действительной функции.

Если приближение строится на дискретном множестве точек, то аппроксимация называется точечной (рис. 5.1).

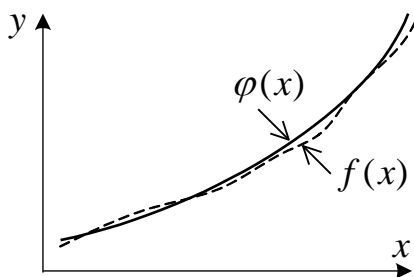


Рисунок 5.2

Если приближение строится для непрерывной функции на некотором отрезке  $[a, b]$ , то аппроксимация называется *непрерывной* или *интегральной* (рис. 5.2).

Одним из основных видов **точечной аппроксимации** является интерполирование.

Оно состоит в следующем: задаем многочлен, который должен принимать в известных точках  $x_i$  те же значения  $y_i$ , что и заданная дискретно функция  $y = \varphi(x)$ ; то есть в этих точках должно быть  $\varphi(x_i) = y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . При этом точки  $x_i$  называются *узлами интерполяции*, а многочлен  $y(x)$  – *интерполирующим многочленом*. Интерполяция может быть *глобальной* (на всем участке изменения аргумента  $x$ ) и *локальной (кусочной)* – на отдельных участках изменения функции.

В случае большого количества точек, часто невозможно найти многочлен, который бы проходил через все эти точки (тем более, что и при получении точек в эксперименте могут быть погрешности и ошибки). В этих случаях находят такой *многочлен*, который проходил бы максимально близко от заданных точек. Понятие «близко» оценивается разными путями.

Одной из распространенных мер отклонения многочлена  $\varphi(x)$  от заданной функции  $f(x)$  является среднеквадратичное приближение, определяемое

выражением 
$$S = \sum_{i=0}^n [\varphi(x_i) - y_i]^2. \quad (5.2)$$

Задача состоит в подборе интерполирующего многочлена таким образом, чтобы  $S$  было наименьшим.

Приближение функции  $\varphi(x)$  к  $f(x)$  может оцениваться и на основе абсолютного отклонения  $\Delta$ , равного

$$\Delta = \max_{a \leq x \leq b} |y_i - y(x_i)| \quad i = 1 \dots n, \quad (5.3)$$

либо вводят понятие среднеквадратичного отклонения

$$\bar{\Delta} = \sqrt{\frac{S}{n}}, \quad (5.4)$$

для которых задают допустимые величины отклонений ( $\Delta_{\text{дон}}$ ).

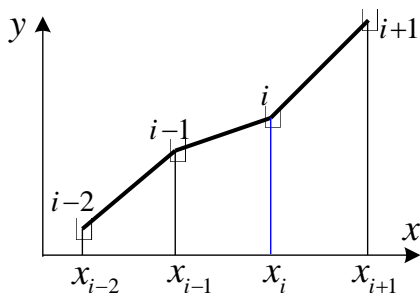


Рисунок 5.3

В зависимости от максимальной степени задаваемого многочлена различают интерполяции линейную, квадратичную, кубическую и другие.

1. Линейная интерполяция – заданные точки соединяют прямыми линиями, получая для ряда точек ломаную линию. Уравнение каждого из отрезков определяется уравнением прямой, проходящей через две точки (рис. 5.3):

$$\frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad (5.5)$$

которое можно преобразовать в уравнение прямой в классическом виде:

$$y = a_i x + b_i, \quad \text{где:} \quad a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}; \quad b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1}.$$

Зависимость справедлива при  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ .

2. Квадратичная (параболическая) интерполяция – задается на отрезке трех точек (например, от  $x_{i-1}$  до  $x_{i+1}$ ) в виде:

$$y = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad (5.6)$$

и содержит три константы, для определения которых необходимо составить три уравнения. Для записи этих уравнений используются известные ординаты в указанных точках:

$$\begin{aligned} - \text{при } x = x_{i-1} &\Rightarrow a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = y_{i-1}; \\ - \text{при } x = x_i &\Rightarrow a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = y_i; \\ - \text{при } x = x_{i+1} &\Rightarrow a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1}. \end{aligned}$$

Решая представленную систему трех уравнений, определяем значения констант аппроксимации  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ .

С помощью такой интерполяции можно, например, строить эпюру изгибающих моментов  $M$  на участке действия распределенной нагрузки, когда известны значения изгибающих моментов по краям и в середине участка (рис. 4). Тем более, что нам известно, что изгибающий момент на прямолинейном участке стержневой системы действительно изменяется по параболической зависимости, и поэтому результат будет соответствовать точному.

Задаем аппроксимирующую функцию в виде:  $M(x) = a + bx + cx^2$ .

В качестве условий для нахождения констант  $a$ ,  $b$  и  $c$  используем известные значения этой функции в крайних и средней точках:

$$\text{а) при } x = 0 \Rightarrow M(0) = M_{\text{лев}} \quad \text{или} \quad M_{\text{лев}} = a + b \cdot 0 + c \cdot 0 = a;$$

$$\text{б) при } x = \frac{l}{2} \Rightarrow M\left(\frac{l}{2}\right) = M_{\text{ср}} \quad \text{или} \quad M_{\text{ср}} = a + b \frac{l}{2} + c \frac{l^2}{2},$$

где  $M_{\text{ср}}$  определяется зависимостью (рис. 5.4):

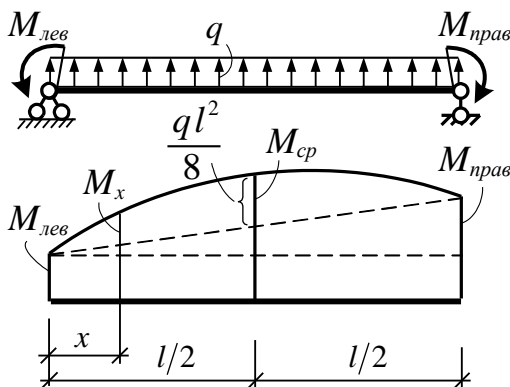


Рисунок 5.4

$$M_{\text{ср}} = \frac{M_{\text{лев}} + M_{\text{прав}}}{2} + \frac{ql^2}{8};$$

$$\text{в) при } x = l \Rightarrow M(l) = M_{\text{прав}}$$

$$\text{или} \quad M_{\text{прав}} = a + bl + cl^2.$$

Решаем два последних уравнения:

$$\begin{cases} bl + \frac{1}{2}cl^2 = 2M_{\text{ср}} - 2M_{\text{лев}}; \\ bl + cl^2 = M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}. \end{cases}$$

Отнимая от второго уравнения первое, получим выражение, из которого выразим параметр  $c$ :

$$c = \frac{2}{l^2}(M_{\text{прав}} - 2M_{\text{ср}} + M_{\text{лев}}).$$

Из второго уравнения теперь найдем  $b$ :

$$b = \frac{1}{l}(M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}} - 2M_{\text{прав}} + 4M_{\text{ср}} - 2M_{\text{лев}}) = \frac{1}{l}(-3M_{\text{лев}} + 4M_{\text{ср}} - M_{\text{прав}}).$$

В результате получаем:

$$M(x) = M_{\text{лев}} + \frac{x}{l}(-3M_{\text{лев}} + 4M_{\text{ср}} - M_{\text{прав}}) + \frac{2x^2}{l^2}(M_{\text{прав}} - 2M_{\text{ср}} + M_{\text{лев}}). \quad (5.7)$$

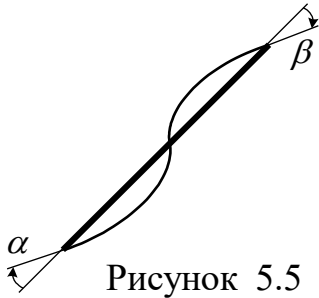


Рисунок 5.5

3. Кубическая интерполяция. Широкое распространение для интерполяции получило использование кубических сплайн-функций – специально построенных многочленов третьей степени, представляющих собой математическую модель изгиба упругого стержня при заданных условиях поворотов его концов (углов  $\alpha$  и  $\beta$  на рис. 5.5). Форма изгиба стержня (функция интерполяции) при этом определяется путем минимизации потенциальной энергии стержня, деформирующегося в заданных условиях.

4. В общем случае для  $n$  точек – на участке  $[x_0, x_n]$  можно задать полином  $n$ -ой степени:

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

подставив в который ординаты для всех известных точек, получим систему  $n$  уравнений для определения всех  $a_i \rightarrow a_0, a_1, \dots, a_n$ .

5. Есть и другие варианты задания многочленов – например, в виде многочлена Ньютона, многочлена Лагранжа, функций Эрмита (в методе конечных элементов) и т. д.

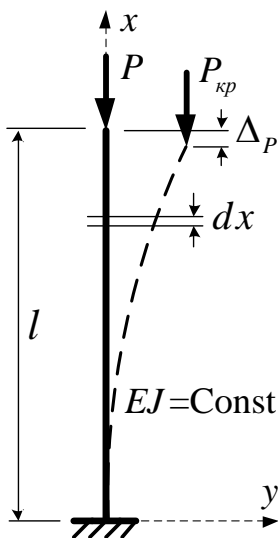


Рисунок 5.6

Заметим также, что для определения констант многочленов часто используются условия, связанные с физическим поведением объектов (в том числе, как уже указывалось, с тем, что системы деформируются, затрачивая минимум энергии).

В качестве примера рассмотрим задачу, решение которой известно из сопротивления материалов – задачи об устойчивости стержня (рис. 5.6). Критическая сила по Эйлеру для такого стержня равна

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} = 2,4674 \frac{EJ}{l^2}.$$

Допустим, мы этого не знаем, и не знаем, по какой кривой происходит потеря устойчивости. Примем для формы потери устойчивости многочлен:

$$y = a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + a_4x^5 \dots \quad (5.8)$$

Для определения констант  $a_i$  используем метод Ритца, который предложил искать форму потери устойчивости из условия минимума энергии системы:

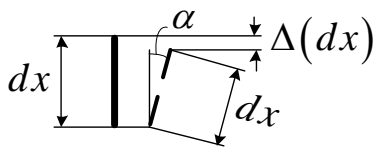
$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2 \dots n. \quad (5.9)$$

Полная энергия стержня при потере устойчивости здесь будет состоять из трех слагаемых:

– из начальной энергии системы до потери устойчивости (до критического состояния)  $\mathcal{E}_0$  – эта энергия относительно параметров интерполяции является константой;

– из энергии изгиба стержня при потере устойчивости;

– из потенциальной энергии силы  $P$ , равной работе этой силы с обратным знаком –  $\mathcal{E}_P = -P_{кр} \Delta_P$ ;



– из энергии сжатия стержня, которая здесь мала и мы ею пренебрежем.

Рисунок 5.7

Для определения величины перемещения силы  $P$  по вертикали ( $\Delta_P$ ) рассмотрим вначале бесконечно малый элемент стержня (рис. 5.7), и определим разницу между его первоначальной длиной и проекцией повернутого в результате изгиба элемента на первоначальное направление:

$$\begin{aligned} \Delta(dx) &= dx - dx \cos \alpha = dx(1 - \cos \alpha) = \\ &= dx \left[ \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - (\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}) \right] = \\ &= dx \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx dx \cdot 2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{2} dx \approx \frac{\text{tg}^2 \alpha}{2} dx = \frac{(y')^2}{2} dx = \frac{1}{2} (y')^2 dx. \end{aligned}$$

Вертикальные перемещения силы  $P$  определим, выполнив интегрирование полученного выражения по всей длине стержня

$$\Delta_P = \int_0^l \Delta(dx) = \int_0^l \frac{(y')^2 dx}{2} = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx,$$

после чего изменение потенциала внешней нагрузки получим в виде:

$$\mathcal{E}_P = -\frac{P_{кр}}{2} \int_0^l (y')^2 dx.$$

Энергия деформации стержня определяется выражением:

$$\mathcal{E}_{деф} = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} = \int_0^l \frac{EJ^2 (y'')^2 dx}{2EJ} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (y'')^2 dx, \quad \text{где } M = EJ y''.$$

Получаем полную потенциальную энергию стержня в виде:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 dx - \frac{P_{кр}}{2} \int_0^l (y')^2 dx. \quad (5.10)$$

Для простоты дальнейших расчетов возьмем два слагаемых аппроксимации (5.8):

$$y = a_1 x^2 + a_2 x^2;$$

$$y' = 2a_1 x + 2a_2 x; \quad y'' = 2a_1 + 2a_2 = 2(a_1 + a_2).$$

Подставляем эти зависимости в выражение для полной потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}_0 + \frac{EJ}{2} \int_0^l (a_1^2 + 6a_1 a_2 x + 9a_2^2 x^2) dx - \frac{P_{кр}}{2} \int_0^l (4a_1^2 x^2 + 12a_1 a_2 x^3 + 9a_2^2 x^4) dx = \\ &= \mathcal{E}_0 + 2EJ \left( a_1^2 l + 6a_1 a_2 \frac{l^2}{2} + 3a_2^2 l^3 \right) - \frac{P_{кр}}{2} \left( \frac{4}{3} a_1^2 l^3 + 3a_1 a_2 l^4 + \frac{9}{5} a_2^2 l^5 \right) = \\ &= \mathcal{E}_0 + 2EJ \left( a_1^2 l + 3a_1 a_2 l^2 + 3a_2^2 l^3 \right) - P_{кр} \left( \frac{2}{3} a_1^2 l^3 + \frac{3}{2} a_1 a_2 l^4 + \frac{9}{10} a_2^2 l^5 \right) = \\ &= \mathcal{E}_0 + a_1^2 \left( 2EJl - \frac{2}{3} P_{кр} l^3 \right) + a_1 a_2 \left( 6EJl^2 - \frac{3}{2} P_{кр} l^4 \right) + a_2^2 \left( 6EJl^3 - 0,9P_{кр} l^5 \right). \end{aligned}$$

Применяем к этому выражению процедуру метода Ритца (5.9):

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_1} = 0; \quad \left( 4EJl - \frac{4}{3} P_{кр} l^3 \right) a_1 + \left( 6EJl^2 - \frac{3}{2} P_{кр} l^4 \right) a_2 = 0;$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_2} = 0; \quad \left( 6EJl^2 - \frac{3}{2} P_{кр} l^4 \right) a_1 + \left( 12EJl^3 - 1,8P_{кр} l^5 \right) a_2 = 0.$$

Получаем однородную систему уравнений, решение которой будет отлично от нуля только в том случае, если определитель системы будет равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 4EJl - \frac{4}{3} P_{кр} l^3 & 6EJl^2 - \frac{3}{2} P_{кр} l^4 \\ 6EJl^2 - \frac{3}{2} P_{кр} l^4 & 12EJl^3 - 1,8P_{кр} l^5 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, получаем квадратное уравнение

$$0,15P_{кр}^2 l^4 - 5,2P_{кр} l^2 EJ + 12(EJ)^2 = 0,$$

решение которого дает для рассматриваемой сжатой стойки значение критической силы:

$$P_{кр} = 2,48 \frac{EJ}{l^2}.$$

Сравнивая этот результат с решением Эйлера, получаем расхождение в 0,53%. Величина расхождения невелика. Таким образом, уже при двух слагаемых многочлена (5.8) мы получили приемлемое решение.

При трех слагаемых получим более точное значение, однако будем иметь кубическое уравнение, которое так просто не решить. Если взять многочлен четвертого порядка, уравнение будет ещё более сложным.

Получаемые уравнения являются *нелинейными* и решаются часто очень не просто. Принципы решения таких уравнений изложены в разделе 9.

## 6. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

### 6.1. Общие понятия

Из математики известно, что определенный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  представляет собой по физическому смыслу площадь фигуры, ограниченной осью  $x$ , функцией  $f(x)$  и ординатами  $f(a)$  и  $f(b)$  – площадь  $\Omega$  (рис. 6.1).

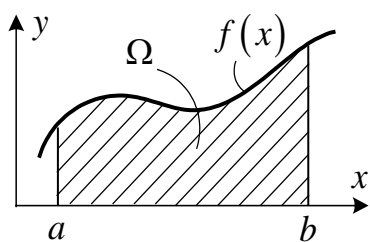


Рисунок 6.1

С другой стороны, известно, что

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i,$$

и если  $\Delta x_i$  принимать конечной величиной, то получим формулу для приближенного вычисления интеграла методом прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i, \quad (6.1)$$

где:  $f(x_i)$  – одна из ординат функции в пределах участка  $\Delta x_i$ ; участки  $\Delta x_i$  часто удобно принимать одинаковой величины ( $\Delta x_i = \Delta x$ ).

В зависимости от положения ординаты  $f(x_i)$  различают три варианта численного вычисления интегралов:

1) если точки  $x_i$  на участках  $\Delta x$  берутся слева, то будем иметь сумму левых прямоугольников (рис. 6.2, а);

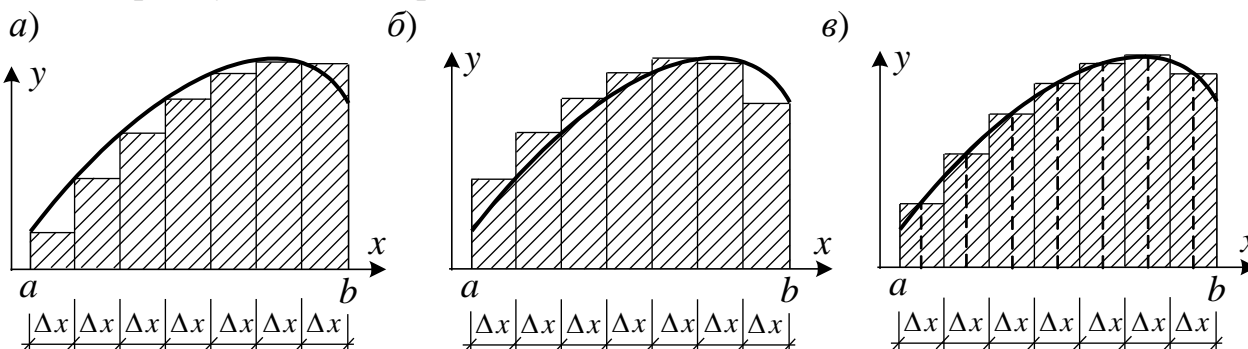


Рисунок 6.2

2) если на участках  $\Delta x$  берутся правые ординаты, то будем иметь сумму правых прямоугольников (рис. 6.2, б);

3) если возьмем средние значения функции на участках  $\Delta x$ , то получим сумму прямоугольников, базирующихся на средних ординатах (такой подход часто называют методом средних) (рис. 6.2, в). Вероятно, последний вариант будет точнее, чем два предыдущих, однако для его применения необходимо дополнительно вычислять средние ординаты на участках.

Для численного вычисления интегралов используются и другие подходы, приводящие к еще более точным результатам. Рассмотрим некоторые из них.



## 6.2. Интегрирование функции одной переменной

**Линейная функция.** Получим зависимость для вычисления определенного интеграла линейной функции одной переменной.

Пусть на участке длиной  $a$  имеем линейную функцию  $f(x)$  (рис. 6.3).

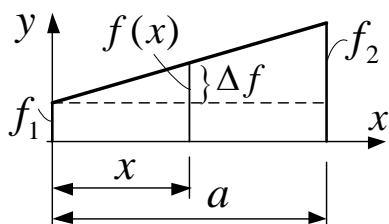


Рисунок 6.3

Зависимость такой функции от аргумента легко определяется из геометрических соображений

$$f(x) = f_1 + \Delta f = f_1 + (f_2 - f_1) \cdot \frac{x}{a}, \quad (6.2)$$

где  $\Delta f$  находится из подобия треугольников:

$$\frac{f_2 - f_1}{a} = \frac{\Delta f}{x}.$$

Выполняя интегрирование функции (6.2), получаем:

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a \left[ f_1 + (f_2 - f_1) \frac{x}{a} \right] dx = f_1 \cdot a + (f_2 - f_1) \cdot \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2} (f_1 + f_2). \quad (6.3)$$

Получили выражение для площади трапеции и поэтому для функции одной переменной здесь говорят о вычислении интегралов по *формуле трапеций*.

**Параболическая функция.** При рассмотрении вопросов аппроксимации (раздел 5) для параболической функции (рис. 6.4) получено выражение в виде:

$$\varphi(x) = \varphi_1 + (-3\varphi_1 + 4\varphi_{cp} - \varphi_2) \frac{x}{a} + (\varphi_1 - 2\varphi_{cp} + \varphi_2) \frac{2x^2}{a^2}.$$

Подставим это выражение в интеграл и выполним интегрирование:

$$\begin{aligned} \int_0^a \varphi(x) dx &= \left[ \varphi_1 x + (-3\varphi_1 + 4\varphi_{cp} - \varphi_2) \frac{x^2}{2a} + (\varphi_1 - 2\varphi_{cp} + \varphi_2) \frac{2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right] \Big|_0^a = \\ &= a \left[ \varphi_1 - \frac{3}{2} \varphi_{cp} + 2\varphi_{cp} - \frac{1}{2} \varphi_2 - \frac{4}{3} \varphi_{cp} + \frac{2}{3} \varphi_2 \right] = \\ &= a \left( \frac{1}{6} \varphi_1 + \frac{2}{3} \varphi_{cp} + \frac{1}{6} \varphi_2 \right) = \frac{a}{6} (\varphi_1 + 4\varphi_{cp} + \varphi_2). \quad (6.4) \end{aligned}$$

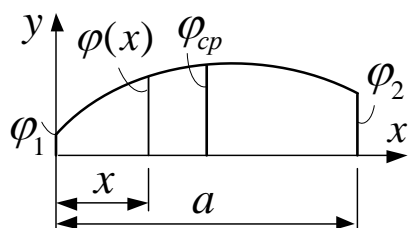


Рисунок 6.4

Получаем выражение, которое называют *формулой Симпсона* для вычисления интегралов, содержащих одну параболическую функцию одной переменной.

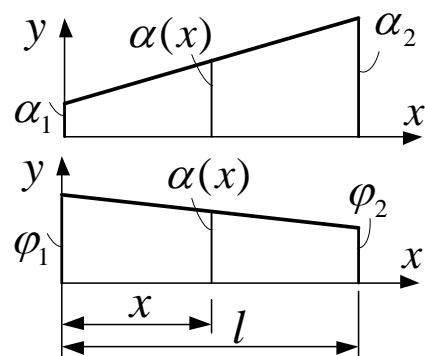


Рисунок 6.5

## 6.3. Интегрирование произведения двух функций

**Две линейные функции (формула трапеций).**

Рассмотрим интеграл вида

$$\int \alpha(x) \cdot \varphi(x) dx, \quad (6.5)$$

в котором обе функции линейны и изменяются по зависимостям (рис. 6.5):

$$\alpha(x) = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{x}{l}; \quad \varphi(x) = \varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{x}{l}.$$

Подставляем эти выражения в интеграл (6.5) и выполняем интегрирование:

$$\begin{aligned} \int_0^l \alpha(x) \cdot \varphi(x) dx &= \int_0^l \left[ \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{x}{l} \right] \cdot \left[ \varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{x}{l} \right] dx = \\ &= \int_0^l \left[ \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_1 (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{x}{l} + (\alpha_2 - \alpha_1) \varphi_1 \frac{x}{l} + (\alpha_2 - \alpha_1) (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{x^2}{l^2} \right] dx = \\ &= \alpha_1 \varphi_1 l + \frac{1}{2} l (\alpha_1 \varphi_2 - \alpha_1 \varphi_1) + \frac{1}{2} l (\alpha_2 \varphi_1 - \alpha_1 \varphi_1) + \frac{1}{3} l (\alpha_2 \varphi_2 - \alpha_2 \varphi_1 - \alpha_1 \varphi_2 + \alpha_1 \varphi_1) = \\ &= \frac{l}{6} (6\alpha_1 \varphi_1 + 3\alpha_1 \varphi_2 - 3\alpha_1 \varphi_1 + 3\alpha_2 \varphi_1 - 3\alpha_1 \varphi_1 + 2\alpha_2 \varphi_2 - 2\alpha_2 \varphi_1 - 2\alpha_1 \varphi_2 + 2\alpha_1 \varphi_1) = \\ &= \frac{l}{6} (2\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_1 \varphi_2 + \alpha_2 \varphi_1 + 2\alpha_2 \varphi_2). \end{aligned} \quad (6.6)$$

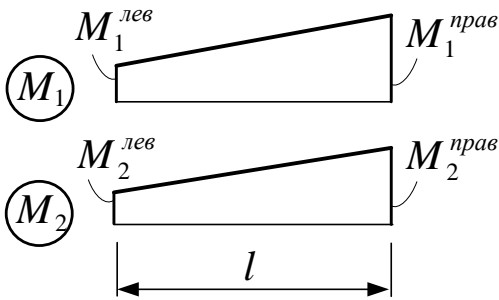


Рисунок 6.6

Получаем выражение, которое называют *формулой трапеций* для вычисления интегралов от произведения двух функций.

Если функции будут представлять, например, изгибающие моменты (рис. 6.6), как в интегралах Мора, то для двух линейных на участке эпюр изгибающих моментов  $M$  получим формулу трапеций (6.6) в виде:

$$\int_0^l M_1 M_2 dx = \frac{l}{6} (2M_1^{лев} \cdot M_2^{лев} + M_1^{лев} \cdot M_2^{np} + M_1^{np} \cdot M_2^{лев} + 2M_1^{np} \cdot M_2^{np}). \quad (6.6')$$

На рис. 6.7 покажем алгоритм численного вычисления интеграла

$$\int_a^b S_1 S_2 dx = \Omega$$

с использованием формул трапеций и по левым и правым прямоугольникам при разбивке интервала  $[a, b]$  на  $n$  частей.

**Формула Симпсона.** Рассмотрим интеграл вида (6.5) от двух функций, где одна из функций  $\varphi(x)$  будет изменяться по параболической зависимости, а вторая  $\alpha(x)$  будет линейной (рис. 6.8):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_1 + (-3\varphi_1 + 4\varphi_{cp} - \varphi_2) \frac{x}{l} + (\varphi_1 - 2\varphi_{cp} + \varphi_2) \frac{2x^2}{l^2} = \varphi_1 + A \cdot \frac{x}{l} + B \cdot \frac{2x^2}{l^2}; \\ \alpha(x) &= \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{x}{l}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где:  $A = \frac{1}{l} (-3\varphi_1 + 4\varphi_{cp} - \varphi_2); \quad B = \frac{2}{l^2} (\varphi_1 - 2\varphi_{cp} + \varphi_2).$



Рисунок 6.7. Алгоритм численного вычисления интеграла  $\int_a^b S_1 S_2 dx = \Omega$ .

Подставляем зависимости (6.7) в (6.5) и выполняем интегрирование:

$$\begin{aligned}
 \int_0^l \varphi(x) \cdot \alpha(x) dx &= \int_0^l (\varphi_1 + Ax + Bx^2) \left( \alpha_1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{l} x \right) dx = \int_0^l \left[ \varphi_1 \cdot \alpha_1 + \varphi_1 \left( \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{l} \right) x + \right. \\
 &\quad \left. + A\alpha_1 x + A \left( \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{l} \right) x^2 + B\alpha_1 x^2 + B \left( \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{l} \right) x^3 \right] dx = l \left[ \varphi_1 \alpha_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \varphi_1 \alpha_2 - \frac{1}{2} \varphi_1 \alpha_1 + \frac{l}{2} A \alpha_1 + \frac{l}{3} A \alpha_2 - \frac{l}{3} A \alpha_1 + \frac{1}{3} B \alpha_1 l^2 + \frac{1}{4} B \alpha_2 l^2 - \frac{1}{4} B \alpha_1 l^2 \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{l}{6} (3\varphi_1 \alpha_2 + 4\varphi_{cp} \alpha_1 - \varphi_2 \alpha_1 - \\
&- 6\varphi_1 \alpha_2 + 8\varphi_{cp} \alpha_2 - 2\varphi_2 \alpha_2 + \varphi_2 \alpha_1 - 2\varphi_{cp} \alpha_1 + \varphi_1 \alpha_1 + 3\varphi_2 \alpha_2 - 6\varphi_{cp} \alpha_2 + 3\varphi_1 \alpha_2) = \\
&= \frac{l}{6} [\varphi_1 \alpha_1 + \varphi_{cp} (2\alpha_1 + 2\alpha_2) + \varphi_2 \alpha_2] = \frac{l}{6} \left[ \varphi_1 \alpha_1 + 4\varphi_{cp} \left( \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) + \varphi_2 \alpha_2 \right] = \\
&= \frac{l}{6} (\varphi_1 \alpha_1 + 4\varphi_{cp} \alpha_{cp} + \varphi_2 \alpha_2). \tag{6.8}
\end{aligned}$$

Полученное выражение называют *формулой Симпсона*.

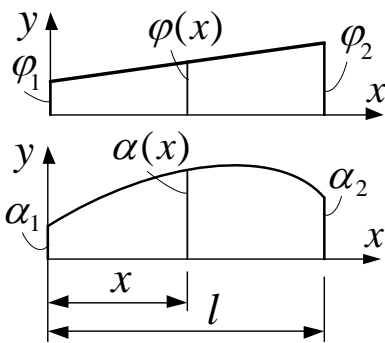


Рисунок 6.8

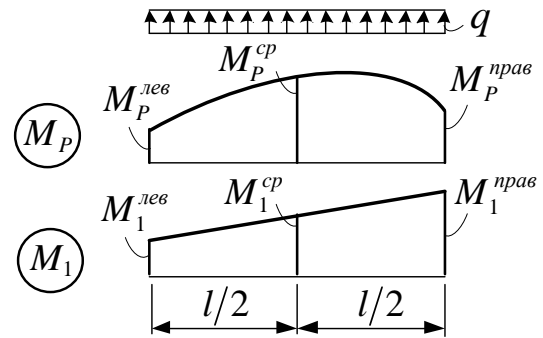


Рисунок 6.9

Для функций изгибающих моментов (рис. 6.9) формула Симпсона будет иметь вид:

$$\int_0^l M_1 M_P dx = \frac{l}{6} (M_1^{лев} \cdot M_P^{лев} + 4M_1^{cp} \cdot M_P^{cp} + M_1^{прав} \cdot M_P^{прав}). \tag{6.8'}$$

Полученные формулы для численного интегрирования (6.6) и (6.8) позволяют вычислять перемещения как в рамно-балочных, так и в арочных и комбинированных системах. При этом для рам и балок, для которых зависимости изменения эпюр усилий являются линейными и параболическими, данные формулы будут давать точный результат, а для арок – будем получать приближенные значения.

#### 6.4. Особенности определения перемещений в арочных системах

Определение перемещений в трехшарнирных арках выполняется по формуле Мора:

$$\Delta_{iP} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ} + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_i Q_P ds}{GA} + \sum \int \frac{\bar{N}_i N_P ds}{EA}, \tag{6.9}$$

где:  $M_P, Q_P, N_P$  – зависимости изменения изгибающих моментов, поперечных и продольных сил от внешней нагрузки, от действия которой определяется перемещение;  $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$  – зависимости изменения усилий от единичной нагрузки, приложенной в точке (в сечении), в которой определяется перемещение в

направлении искомого перемещения;  $EJ$ ,  $GA$ ,  $EA$  – зависимости изменения изгибной, сдвиговой и продольной жесткостей арки;  $\eta$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений при изгибе (для прямоугольного сечения он равен 1,2);  $ds$  – элементарная длина дуги арки, выражаемая через бесконечно малое горизонтальное расстояние  $dx$  зависимостью  $ds = dx/\cos \varphi(x)$  (рис. 6.10).

Усилия в сечениях трехшарнирных арок определяются зависимостями:

$$\begin{aligned} M_{Px} &= M_{Px}^0 - H y_x; & Q_{Px} &= Q_{Px}^0 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x; & (6.10) \\ N_{Px} &= -(Q_{Px}^0 \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x), \end{aligned}$$

где:  $M_{Px}^0$ ,  $Q_{Px}^0$  – изгибающие моменты и поперечные силы в сечении  $x$  двухопорной балки, имеющей такой же пролет, как арка, и загруженной такой же нагрузкой;  $H$  – распор в арке;  $\varphi_x$  – угол наклона касательной к оси арки в сечении  $x$  по отношению к горизонтальной оси.

Зависимости (6.10) представляют собой сложные нелинейные функции, и при подстановке их в (6.9) непосредственное интегрирование выражений является часто очень непростой задачей. Поэтому вычисление интегралов здесь чаще всего выполняют численно, разбивая пролет арки на определенное число малых частей  $\Delta x$  (рис. 6.10).

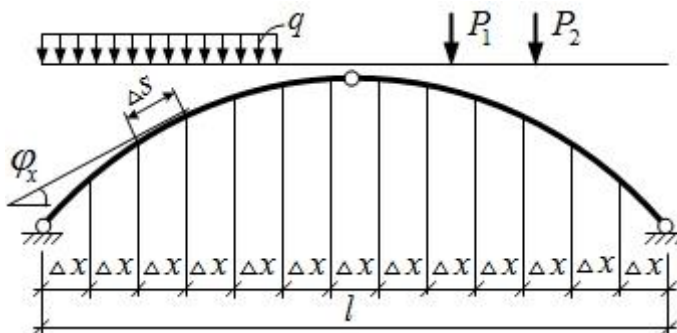


Рисунок 6.10

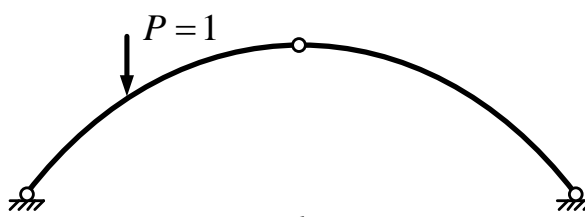


Рисунок 6.11

Таким образом, для определения перемещений необходимо построить эпюры усилий от действия внешней нагрузки (6.10) и от действия единичной силы, приложенной в точке, для которой ищется перемещение, в направлении искомого перемещения (рис. 6.11) – эпюры  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{Q}_i$ ,  $\bar{N}_i$ , а затем вычислить искомое перемещение по формуле (6.9) с использованием одной из численных формул – по левым, правым или средним прямоугольникам либо по формуле трапеций. При этом обычно переходят от интегрирования по дуге ( $ds$ ) к интегрированию по горизонтальной ординате ( $dx$ ), вводя замену (рис. 6.10):

$$dx = ds \cdot \cos \varphi \quad \text{или} \quad \Delta x = \Delta s \cdot \cos \varphi \Rightarrow \Delta s = \frac{\Delta x}{\cos \varphi},$$

с учетом которой выражение (6.9) принимает вид:

$$\Delta_{iP} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EJ \cos \varphi} + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_i Q_P dx}{GA \cos \varphi} + \sum \int \frac{\bar{N}_i N_P dx}{EA \cos \varphi}$$

или

$$\Delta_{iP} = \sum \frac{\bar{M}_i M_P \Delta x}{EJ \cos \varphi} + \sum \eta \frac{\bar{Q}_i Q_P \Delta x}{GA \cos \varphi} + \sum \frac{\bar{N}_i N_P \Delta x}{EA \cos \varphi}. \quad (6.11)$$

При учете только изгибающих моментов и при постоянной величине жесткости арки выражение для определения перемещений принимает вид:

$$\Delta_{iP} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EJ \cos \varphi} = \sum \left( \frac{\bar{M}_i \cdot M_P}{\cos \varphi} \right) \frac{\Delta x}{EJ}. \quad (6.12)$$

Принципы вычисления ординат усилий определяются подходом к численному расчету.

Если вычислить перемещения в достаточно большом количестве точек, то можно получить деформированный вид арки (рис. 6.12).

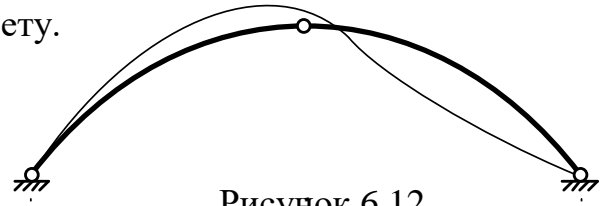


Рисунок 6.12

### 6.5. Расчет двухшарнирных арок

Двухшарнирной аркой называется статически неопределимая распорная система, имеющая вид кривого бруса, опирающегося по концам шарнирно (рис. 1а). Одна из горизонтальных связей такой арки может быть преобразована в затяжку, и тогда будем иметь двухшарнирную арку с затяжкой (рис. 1б).

Форма арок определяется законами изменения оси криволинейного стержня и изменения размеров поперечного сечения вдоль оси.

Поскольку арки представляют собой криволинейные стержни, поперечные сечения которых могут изменяться по их длине, то для расчета арок применяется метод сил. При этом при вычислении коэффициентов канонических уравнений метода сил, являющихся по физическому смыслу перемещениями, по формулам Мора в силу указанных факторов нельзя применить правило Верещагина, формулы Симпсона и трапеций, непосредственное же интегрирование в большинстве случаев достаточно сложно. Поэтому чаще всего в расчетах арок для вычисления интегралов Мора используют численное интегрирование.

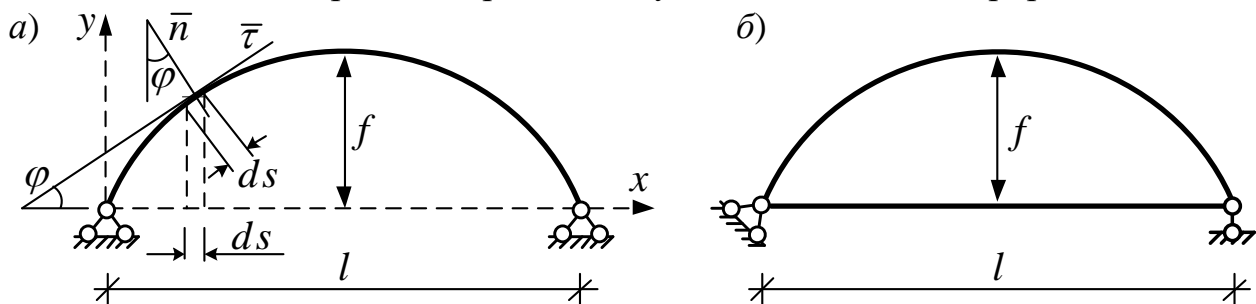


Рисунок 6.13

Следует отметить, что влияние поперечных и продольных сил на перемещения и усилия в арках, как правило, больше, чем в рамах, и часто может быть

существенным. Поэтому расчетные зависимости в общем случае далее записаны с учетом поперечных и продольных сил.

Двухшарнирные арки имеют одну лишнюю связь ( $L = -(3D - 2Ш - C_0) = -(3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 4) = 1$ ). Основная система (О.С.) метода сил получается отбрасыванием этой связи, либо путем удаления одной из горизонтальных опорных связей, либо путем разрезания затяжки (в арке с затяжкой (рис. 6.13б)). Следует заметить, что обычная двухшарнирная арка является частным случаем арки с затяжкой и получается из нее при принятии величины жесткости затяжки, равной бесконечности ( $EA_{зам} = \infty$ ). Потому далее будем рассматривать более общий случай – арку с затяжкой (рис. 6.14а).

Основная система метода сил будет иметь вид, представленный на рис. 6.14б, а каноническое уравнение метода сил запишется в виде

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0; \quad (6.13)$$

где:  $\delta_{11}$  – взаимное расхождение по горизонтали сечений затяжки в месте ее разреза от действия сил  $X_1$ , равных по единице;

$\Delta_{1P}$  – взаимное расхождение по горизонтали сечений в затяжке в месте ее разреза от действия на арку заданных внешних нагрузок.

Перемещения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$  в общем случае (с учетом поперечных и продольных сил) определяются по формулам Мора вида

$$\delta_{11} = \int_0^s \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EJ} + \int_0^s \eta \frac{\bar{Q}_1^2 ds}{GA} + \int_0^s \frac{\bar{N}_1^2 ds}{EA} + \int_0^l \frac{(\bar{N}_1^{зам})^2 dx}{EA_{зам}}; \quad (6.14)$$

$$\Delta_{1P} = \int_0^s \frac{\bar{M}_1 M_P dx}{EJ} + \int_0^s \eta \frac{\bar{Q}_1 Q_P dx}{GA} + \int_0^s \frac{\bar{N}_1 N_P dx}{EA}, \quad (6.15)$$

где:  $EJ$ ,  $GA$ ,  $EA$  – жесткости арки соответственно при изгибе, сдвиге и растяжении-сжатии;

$\eta$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечения при изгибе (для прямоугольного сечения равен 1,2);

$\bar{M}_1$ ,  $\bar{Q}_1$ ,  $\bar{N}_1$  – зависимости изменения единичных эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в арке от действия единичного значения неизвестного метода сил, то есть от действия силы  $X_1$ , равной единице;

$\bar{N}_1^{зам}$  – зависимость изменения эпюры  $N$  в затяжке от действия  $X_1 = 1$ ;

$M_P$ ,  $Q_P$ ,  $N_P$  – зависимости изменения эпюр  $M$ ,  $Q$  и  $N$  в арке от действия внешних нагрузок.

Единичные эпюры  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{Q}_1$ ,  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_1^{зам}$  для рассматриваемой арки в общем виде представлены на рис. 3в÷3е, а законы их изменения имеют вид:

$$\bar{M}_{1x} = -y_x; \quad \bar{Q}_{1x} = -\sin \varphi_x; \quad \bar{N}_{1x} = -\cos \varphi_x; \quad \bar{N}_1^{зам} = 1. \quad (6.16)$$

Эпюры же  $M_P$ ,  $Q_P$  и  $N_P$  в О.С. часто удобно выразить через так называемые

балочные эпюры  $M_P^o$  и  $Q_P^o$ , то есть эпюры усилий, построенные в простой двухпорной балке, имеющей пролет, равный пролету арки, и загруженной такой же внешней вертикальной нагрузкой. При действии только вертикальных нагрузок (рис. 6.14а) эпюра  $M_P$  в О.С. метода сил будет равна балочной эпюре  $M_P^o$  (рис. 6.15). Балочные эпюры  $M_P^o$ ,  $Q_P^o$  для рассматриваемой арки в общем случае могут иметь вид, представленный на рис. 6.15. Эпюры поперечных и продольных сил в О.С. метода сил арки  $Q_P$  и  $N_P$  выражаются через балочную эпюру  $Q_P^o$  с помощью соотношений

$$Q_P = Q_P^o \cos \varphi; \quad N_P = -Q_P^o \sin \varphi. \quad (6.17)$$

Возможный вид этих эпюр показан на рис. 6.15.

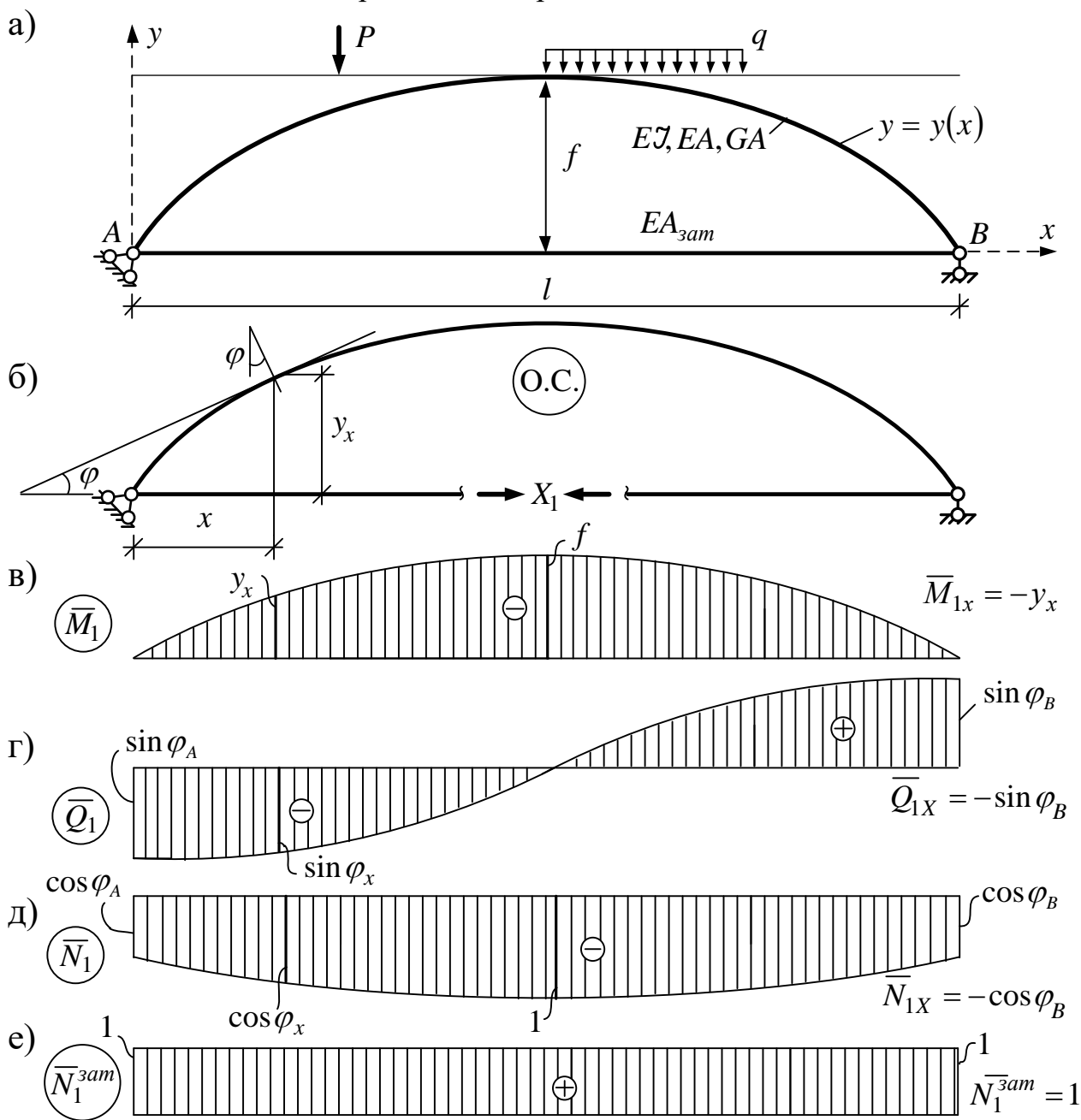


Рисунок 6.14



Подставляя полученные законы изменения единичных и грузовых эпюр в (4) и (5), и рассматривая интегрирование по  $x$  с учетом (2), выражения для перемещений  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$  получим в виде

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{y^2 dx}{EJ \cos \varphi} + \int_0^l \eta \frac{\sin^2 \varphi dx}{GA \cos \varphi} + \int_0^l \frac{\cos \varphi dx}{EA} + \frac{l}{EA_{зам}}; \quad (6.18)$$

$$\Delta_{1P} = - \int_0^l \frac{y M_P dx}{EJ \cos \varphi} - \int_0^l \eta \frac{\sin \varphi Q_P dx}{GA \cos \varphi} - \int_0^l \frac{N_P dx}{EA}. \quad (6.19)$$

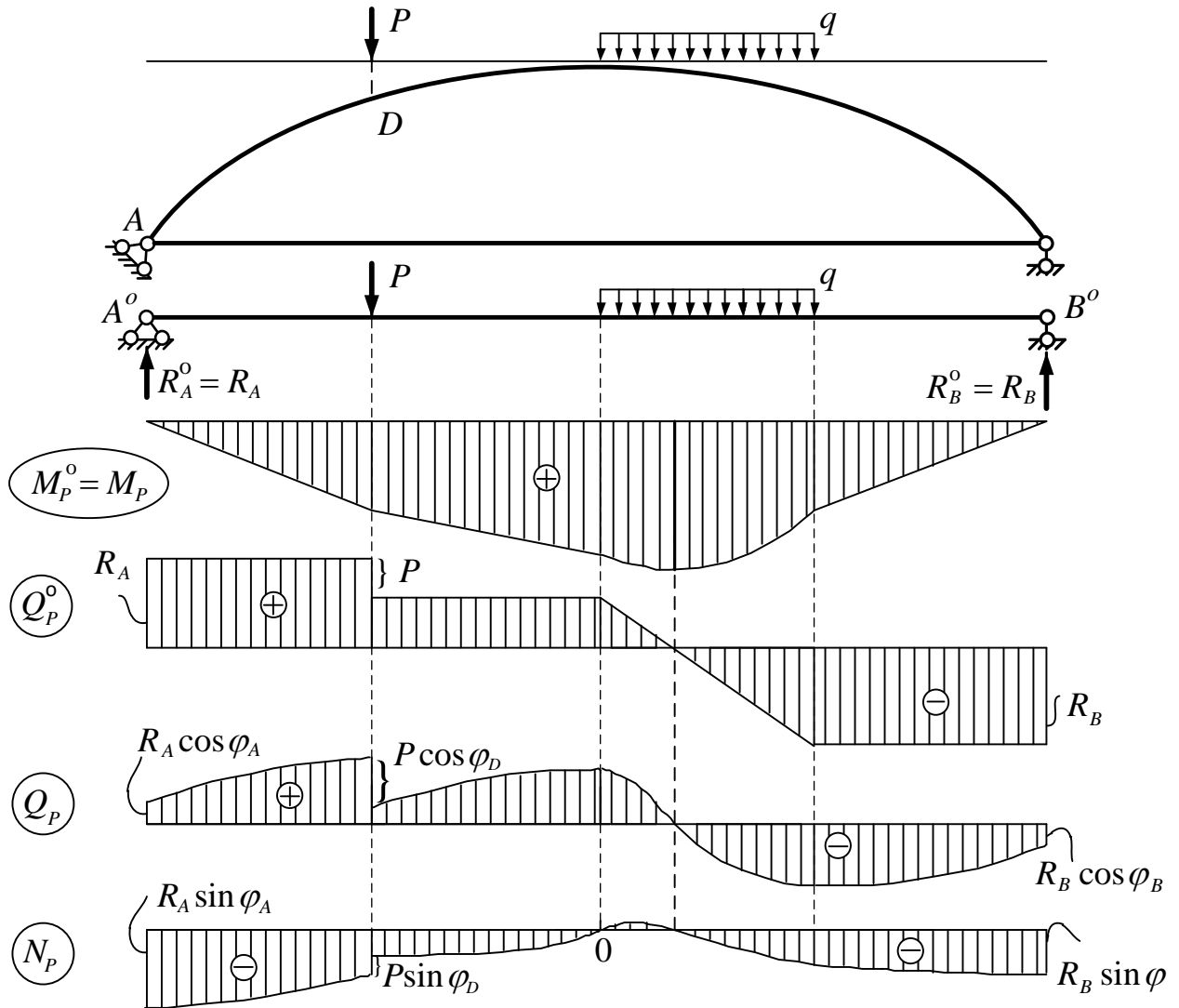


Рисунок 6.15

При учете в расчете только изгибающих моментов вторые и третьи слагаемые в этих выражениях, учитывающие влияние поперечных и продольных сил, отбрасываются.

Вычислив перемещения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$ , решаем уравнение (3) и находим неизвестное метода сил

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}. \quad (6.20)$$

После этого можно построить окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в заданной статически неопределимой арке по формулам:

$$M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + M_P = -yX_1 + M_P;$$

$$\begin{aligned}
Q &= \bar{Q}_1 \cdot X_1 + Q_P = -\sin \varphi X_1 + Q_P ; \\
N &= \bar{N}_1 \cdot X_1 + N_P = -\cos \varphi X_1 + N_P ; \\
N^{zam} &= \bar{N}_1^{zam} \cdot X_1 = 1 \cdot X_1 = X_1 .
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Деформационная проверка в общем случае учета всех видов усилий выполняется по формуле

$$\begin{aligned}
&\int_0^S \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ} + \int_0^S \eta \frac{\bar{Q}_1 Q_P ds}{GA} + \int_0^S \frac{\bar{N}_1 N_P ds}{EA} + \int_0^l \frac{\bar{N}_1^{zam} N^{zam} dx}{EA_{zam}} = \\
&= -\int_0^l \frac{y M dx}{EJ \cos \varphi} - \int_0^l \eta \frac{\sin \varphi Q dx}{GA \cos \varphi} - \int_0^l \frac{N dx}{EA} + \frac{X_1 l}{EA_{zam}} = 0 ,
\end{aligned} \tag{6.22}$$

При неучете поперечных и продольных сил второе и третье слагаемые здесь опускаются.

При вычислении перемещений  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$  по формулам Мора приближенным способом, то есть при замене интегрирования численным суммированием (6.11) пролет арки необходимо разбить на части (участки) относительно малой длины, равные либо неравные между собой. Число этих частей  $n$  определяет точность (чем на большее число частей разбить пролет, тем точность расчета будет выше) и трудоемкость (чем больше участков, тем больше объем вычислений) расчета. Удобнее разбивать пролет на равные части, что позволяет вынести их длины  $\Delta x = l/n$  за знаки сумм (так далее и будем поступать). Выражения для перемещений  $\delta_{11}$  (6.14) и  $\Delta_{1P}$  (6.15) в этом случае принимают вид

$$\delta_{11} = \left( \sum_1^n \frac{y^2}{EJ \cos \varphi} \right) \Delta x + \left( \sum_1^n \eta \frac{\sin^2 \varphi}{GA \cos \varphi} \right) \Delta x + \left( \sum_1^n \frac{\cos \varphi}{EA} \right) \Delta x + \frac{l}{EA_{\zeta \grave{a} \grave{o}}} ; \tag{6.23}$$

$$\Delta_{1P} = - \left( \sum_1^n \frac{y M_P}{EJ \cos \varphi} \right) \Delta x - \left( \sum_1^n \eta \frac{\sin \varphi Q_P}{GA \cos \varphi} \right) \Delta x - \left( \sum_1^n \frac{N_P}{EA} \right) \Delta x , \tag{6.24}$$

где все величины, входящие в суммы, здесь будем вычислять согласно (6.1) в средних точках участков  $\Delta x$ , на которые разбивается пролет арки.

Для арок постоянного сечения жесткости их будут константами и их также можно вынести за суммы. Если ввести при этом обозначения

$$k_G = \frac{GA}{EJ} ; \quad k_N = \frac{EA}{EJ} ; \quad k_{\zeta \grave{a} \grave{o}} = \frac{EA_{\zeta \grave{a} \grave{o}}}{EJ} , \tag{6.25}$$

и учесть, что  $l = \Delta x \cdot n$ , то выражения (6.23) и (6.24) можно записать в виде

$$\delta_{11} = \frac{\Delta x}{EJ} \left( \sum_1^n \frac{y^2}{\cos \varphi} + \frac{\eta}{k_G} \sum_1^n \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} + \frac{1}{k_N} \sum_1^n \cos \varphi + \frac{n}{k_{\zeta \grave{a} \grave{o}}} \right) ; \tag{6.26}$$

$$\Delta_{11} = - \frac{\Delta x}{EJ} \left( \sum_1^n \frac{y M_P}{\cos \varphi} + \frac{\eta}{k_G} \sum_1^n \frac{\sin \varphi Q_P}{\cos \varphi} + \frac{1}{k_N} \sum_1^n N_P \right) . \tag{6.27}$$

При учете только изгибающих моментов второе и третье слагаемые в представленных выражениях опускаются.

Неизвестное метода сил вычисляется по обычной формуле (6.20)  $X_1 = -\Delta_{1P} / \delta_{11}$ . Окончательные эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  в арке рассчитываются по формулам (6.21). При этом все расчетные ординаты здесь также вычисляются в средних точках участков  $\Delta x$ .

Деформационная проверка (6.22) в рассматриваемом подходе выполняется согласно следующей формуле

$$\sum_1^n \frac{y M}{EJ \cos \varphi} + \sum_1^n \eta \frac{\sin \varphi Q_P}{GA \cos \varphi} + \sum_1^n \frac{N_P}{EA} - \frac{X_1 n}{EA_{\zeta \dot{\alpha} \dot{\delta}}} = 0, \quad (6.28)$$

или при  $EJ$ ,  $EA$ ,  $GA = Const$  и с учетом обозначений (6.25) по формуле

$$\sum_1^n \frac{y M}{\cos \varphi} + \frac{\eta}{k_G} \sum_1^n \frac{\sin \varphi Q_P}{\cos \varphi} + \frac{1}{k_N} \sum_1^n N - \frac{X_1 n}{k_{\zeta \dot{\alpha} \dot{\delta}}} = 0. \quad (6.29)$$

Здесь все входящие в суммы величины вычисляются также в средних точках участков  $\Delta x$ , а при неучете поперечных и продольных сил опускаются второе и третье слагаемые.

**Пример.** Выполним расчет двухшарнирной арки с затяжкой (рис. 6.13б), представленной на рис. 6.16. Жесткость арки принята постоянной по длине стержня ( $EJ = Const$ ), жесткость затяжки принята равной:  $EA_{зам} = 5EJ$  ( $k_{зам} = 5$ ). Ось стержня арки определяется параболической зависимостью:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) = \frac{4 \cdot 4}{12^2} x(12-x) = 0,1111x(12-x). \quad (6.30)$$

Углы наклона касательных к оси арки в ее сечениях по отношению к оси  $x$  (и соответственно нормалей к оси арки по отношению к оси  $y$ ) определяются для параболической арки выражениями:

$$tg \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l-2x) = \frac{4 \cdot 4}{12^2} (12-2x) = 0,2222(6-x); \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 \varphi}}; \\ \sin \varphi = tg \varphi \cdot \cos \varphi. \quad (6.31)$$

Основную систему метода сил получим, разрезав затяжку (рис. 6.16). Расчет будем выполнять без учета влияния на перемещения поперечных и продольных сил. В этом случае величины  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$  будут вычисляться по формулам

$$\delta_{11} = \left( \sum_1^n \frac{y^2}{\cos \varphi} + \frac{n}{k_{зам}} \right) \frac{\Delta x}{EJ}; \quad \Delta_{1P} = - \left( \sum_1^n \frac{y M_P}{\cos \varphi} \right) \frac{\Delta x}{EJ}; \quad (6.32)$$

Пролет разобьем на 12 частей ( $n = 12$ ) равной длины –  $\Delta x = l/12 = 1$  м.

Расчетные величины ( $y$ ,  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$ ,  $M_P$  и т.д.) необходимо вычислять в средних точках участков  $\Delta x$ , координаты которых можно определить по выражению

$$x_i = 0,5\Delta x + \Delta x (i-1). \quad (i = 1 \dots n) \quad (6.33)$$

Все расчеты при замене интегрирования численным суммированием удобно выполнять в табличной форме (см. табл. 6.1). Кроме средних на участках  $\Delta x$  сечений (6.16) в таблицу включены также характерные точки ( $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $K$ ), вычисление усилий в которых необходимо для более полного представления

об эпюрах и законах изменения внутренних усилий в арке. При этом значения в характерных точках не должны учитываться в расчетах величин, определяемых согласно формулам Мора путем численного суммирования (в таблице 6.1 соответствующие элементы отмечены прочерками и не определяются).

Значения величин  $y$ ,  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$ , вычисленные для всех расчетных сечений арки по формулам (6.30), (6.31), представлены в столбцах 3, 4 и 5 табл. 6.1.

Для определения грузового перемещения  $\Delta_{1P}$  необходимо в О.С. метода сил (рис. 6.16) построить грузовую эпюру изгибающих моментов  $M_P$ , которая в данном случае будет такой же, как «балочная» эпюра, то есть эпюра изгибающих моментов в простой двухопорной балке, имеющей пролет, равный пролету арки, и загруженной той же внешней нагрузкой. Для ее построения вычислим «балочные» опорные реакции:

$$\Sigma M_A = 0; \quad (3 \cdot 3) \cdot 3,5 + \left(\frac{3 \cdot 3}{2}\right) \cdot 3 + 18 \cdot 5 + (2 \cdot 2) \cdot 9 + 12 \cdot 10 - R_B \cdot 12 = 0;$$

$$R_B = 24,25 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0; \quad -(3 \cdot 3) \cdot 8,5 - \left(\frac{3 \cdot 3}{2}\right) \cdot 9 - 18 \cdot 7 - (2 \cdot 2) \cdot 3 - 12 \cdot 2 + R_A \cdot 12 = 0;$$

$$R_A = 23,25 \text{ кН};$$

**проверка:**  $\Sigma Y = 0; \quad 24,25 + 23,25 - \frac{6+3}{2} \cdot 3 - 18 - 2 \cdot 2 - 12 = 0; \quad 47,5 - 47,5 = 0,$

**и «балочные» изгибающие моменты в расчетных сечениях О.С.:**

**а) в средних точках участков  $\Delta x$ :**

$$M_{P1}^{лев} = 23,25 \cdot 0,5 = 11,625 \text{ (кН}\cdot\text{м)}; \quad M_{P2}^{лев} = 23,25 \cdot 1,5 = 34,875 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{P3}^{лев} = 23,25 \cdot 2,5 - (5,5 \cdot 0,5) \cdot 0,25 - \left(\frac{0,5 \cdot 0,5}{2}\right) \frac{2}{3} \cdot 0,5 = 57,396 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{P4}^{лев} = 23,25 \cdot 3,5 - (4,5 \cdot 1,5) \cdot 0,75 - \left(\frac{1,5 \cdot 1,5}{2}\right) \frac{2}{3} \cdot 1,5 = 75,188 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{P5}^{лев} = 23,25 \cdot 4,5 - (3,5 \cdot 2,5) \cdot 1,25 - \left(\frac{2,5 \cdot 2,5}{2}\right) \frac{2}{3} \cdot 2,5 = 88,479 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{P6}^{лев} = 23,25 \cdot 5,5 - (3 \cdot 3) \cdot 2 - \left(\frac{3 \cdot 3}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + 0,5\right) - 18 \cdot 0,5 = 89,625 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{P7}^{прав} = 24,25 \cdot 5,5 - (2 \cdot 2) \cdot 2,5 - 12 \cdot 3,5 = 81,375 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{P8}^{прав} = 24,25 \cdot 4,5 - (2 \cdot 2) \cdot 1,5 - 12 \cdot 2,5 = 73,125 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{P9}^{прав} = 24,25 \cdot 3,5 - (2 \cdot 1,5) \cdot 0,75 - 12 \cdot 1,5 = 64,625 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{P10}^{прав} = 24,25 \cdot 2,5 - (2 \cdot 0,5) \cdot 0,25 - 12 \cdot 0,5 = 54,375 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{P11}^{прав} = 24,25 \cdot 1,5 = 36,375 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{P12}^{прав} = 24,25 \cdot 0,5 = 12,125 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

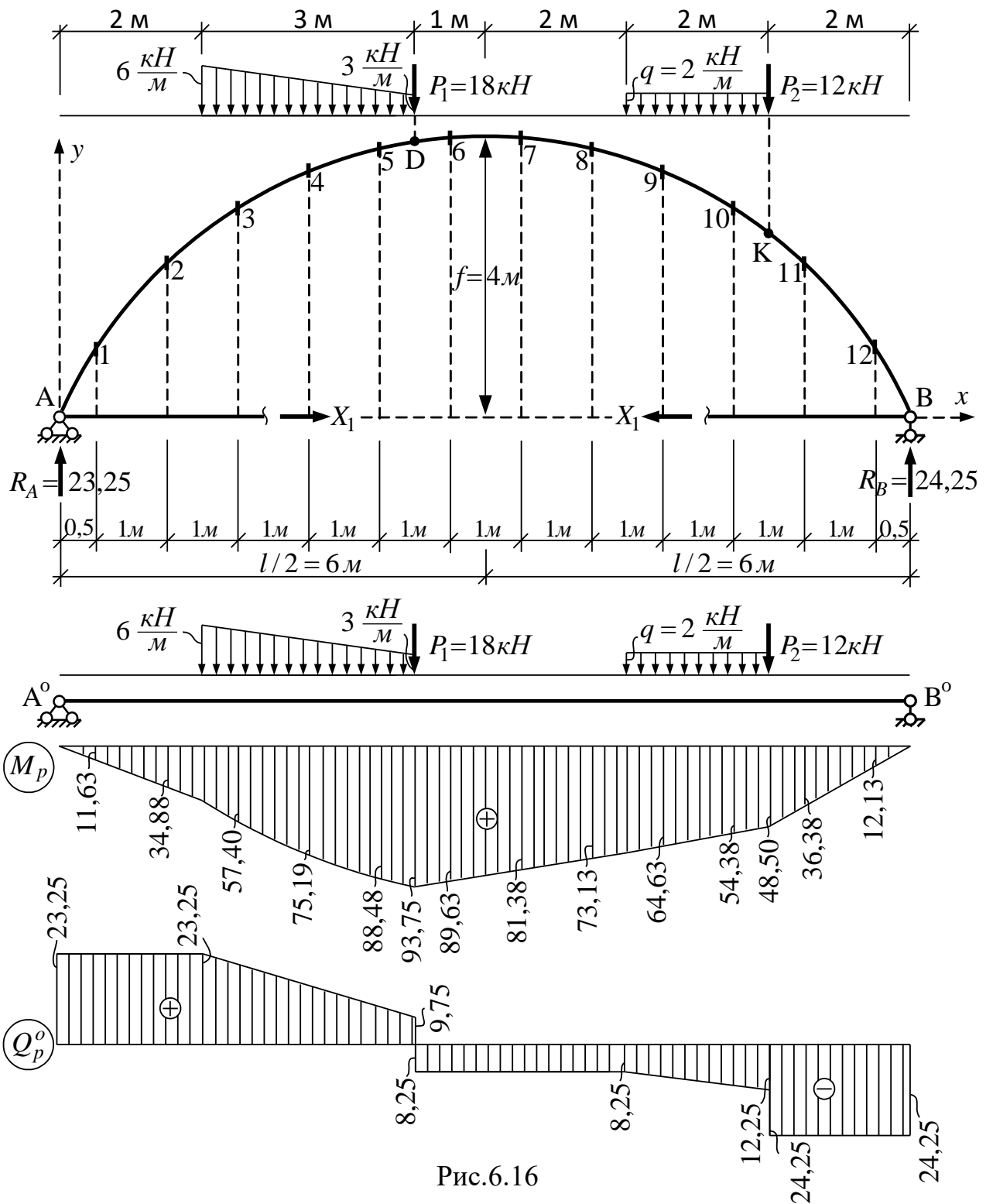


Рис.6.16

б) в характерных сечениях:

$$M_{PA} = 0; \quad M_{PD}^{лев} = 23,25 \cdot 5 - (3 \cdot 3) \cdot 1,5 - \left( \frac{3 \cdot 3}{2} \right) \frac{2}{3} \cdot 3 = 93,75 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{PK}^{прав} = 24,25 \cdot 2 = 48,5 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{PB} = 0.$$

Эпюра  $M_p$  в О.С. показана на рис. 6.16, и значения ее ординат в рассматриваемых сечениях записаны в 8-ом столбце табл. 6.1.

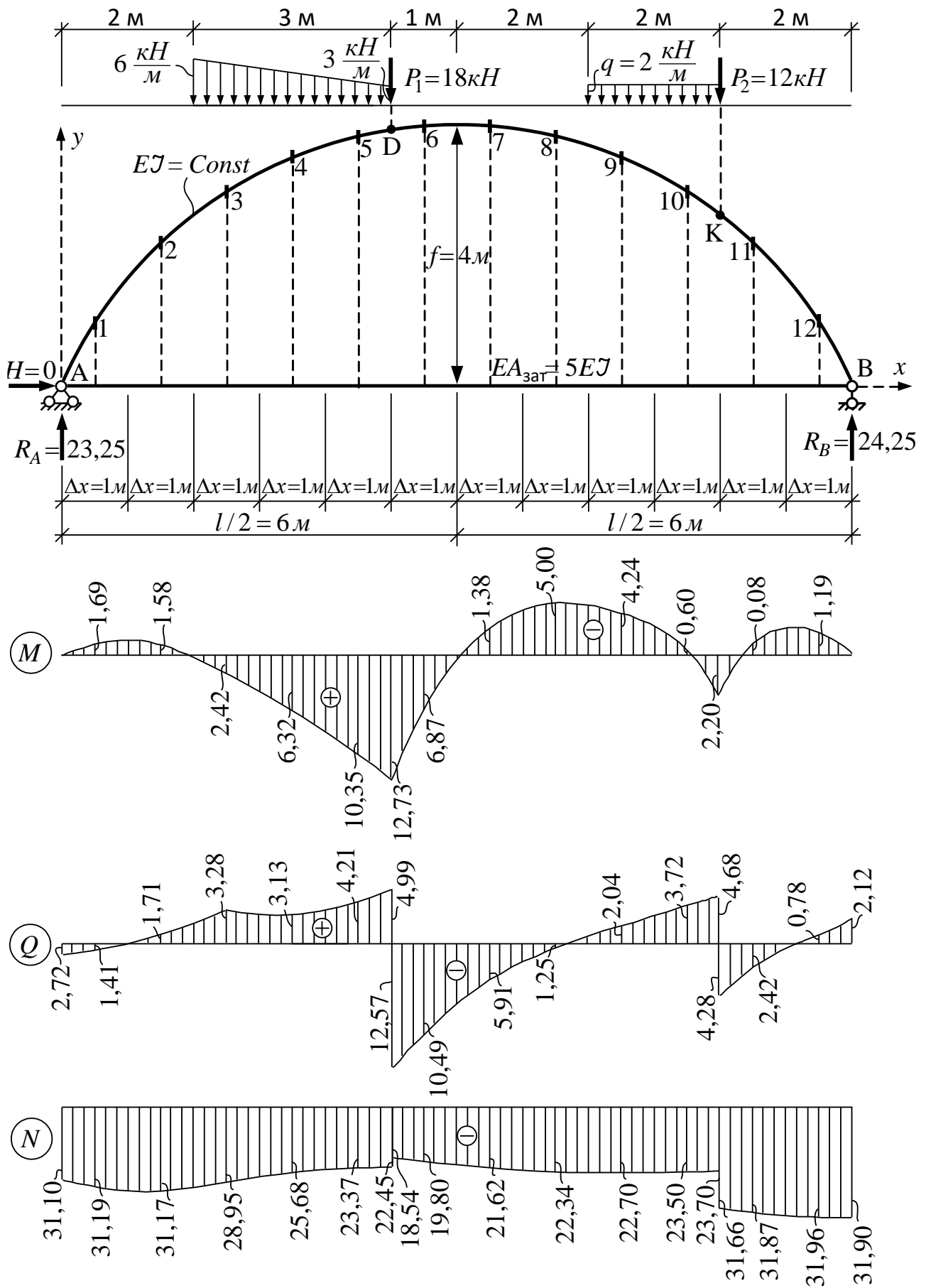


Рисунок 6.17



Вычислив теперь значения величин  $\frac{y^2}{\cos \varphi}$  и  $\frac{yM_P}{\cos \varphi}$  в средних точках участ-

ков  $\Delta x$  (см. столбцы 7 и 9 табл. 6.1), просуммировав их по всем этим точкам и подставив полученные суммы в выражения (6.32), найдем  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$ :

$$\delta_{11} = \left(113,998 + \frac{12}{5}\right) \frac{1}{EJ} = \frac{116,398}{EJ}; \quad \Delta_{1P} = -(2424,932) \frac{1}{EJ} = -\frac{2424,932}{EJ}.$$

Неизвестное метода сил (продольное усилие в затяжке) определяется из решения канонического уравнения метода сил

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-2424,932}{116,398} = 20,833 \text{ (кН)}.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов в арке строится по формуле (6.21)

$$M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + M_P = -y X_1 + M_P = -y X_1 + M_P^0 \quad (6.34)$$

и представлена на рис. 6.17, а вычисление ее ординат в расчетных сечениях выполнено в таблице 6.1 (10-ый столбец).

Вычисление ординат окончательных эпюр поперечных и продольных сил выполняется по формулам (6.21):

$$Q = \bar{Q}_1 \cdot X_1 + Q_P = -\sin \varphi X_1 + Q_P^0 \cos \varphi;$$

$$N = \bar{N}_1 \cdot X_1 + N_P = -\cos \varphi X_1 - Q_P^0 \sin \varphi; \quad (6.34)$$

где  $Q_P^0$  – «балочная» эпюра поперечных сил, то есть эпюра поперечных сил в простой двухопорной балке, имеющей пролет, равный пролету арки, и нагруженной той же внешней нагрузкой (рис. 6.15).

Вычисление ординат «балочной» эпюры  $Q_P^0$ :

а) в средних точках участков  $\Delta x$ :

$$Q_{P1}^0 = Q_{P2}^0 = 23,25 \text{ (кН)}; \quad Q_{P3}^0 = 23,25 - 5,5 \cdot 0,5 - \frac{0,5 \cdot 0,5}{2} = 20,375 \text{ (кН)};$$

$$Q_{P4}^0 = 23,25 - 4,5 \cdot 1,5 - \frac{1,5 \cdot 1,5}{2} = 15,375 \text{ (кН)};$$

$$Q_{P5}^0 = 23,25 - 3,5 \cdot 2,5 - \frac{2,5 \cdot 2,5}{2} = 11,375 \text{ кН}; \quad Q_{P6}^0 = 23,25 - \frac{6+3}{2} \cdot 3 - 18 = -8,25 \text{ кН};$$

$$Q_{P7}^0 = Q_{P8}^0 = -24,25 + 2 \cdot 2 + 12 = -8,25 \text{ кН};$$

$$Q_{P9}^0 = -24,25 + 2 \cdot 1,5 + 12 = -9,25 \text{ кН};$$

$$Q_{P10}^0 = -24,25 + 2 \cdot 0,5 + 12 = -11,25 \text{ кН}; \quad Q_{P11}^0 = Q_{P12}^0 = -24,25 \text{ кН}.$$

б) в характерных сечениях:

$$Q_{PA}^0 = -23,25 \text{ кН}; \quad Q_{PD}^{0,лев} = 23,25 - \frac{6+3}{2} \cdot 3 = 9,75 \text{ кН}.$$



## 7. МАТРИЧНАЯ ФОРМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### 7.1. Расчетные зависимости

Матричная форма вычислений очень удобна для компьютерных вычислений и программирования. И имеются методы расчета, которые полностью формулируются в матричной форме (например, метод конечных элементов (МКЭ)).

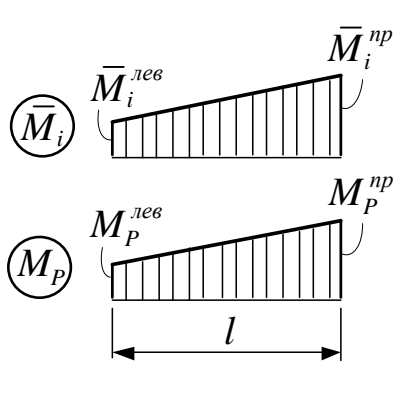
Определение перемещений в стержневых системах может быть выполнено по формуле Мора, имеющей вид:

$$\Delta_{iP} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EJ},$$

где:  $\bar{M}_i$  – усилия (эпюра усилий) в системе, возникающие от действия единичной «силы», приложенной в точке (в сечении), для которой определяется перемещение, в направлении искомого перемещения;  $M_P$  – усилия (эпюра усилий) в системе от внешней нагрузки, от действия которой ищется перемещение;  $EJ$  – изгибные жесткости участков системы, в пределах которых эпюры усилий  $\bar{M}_i$  и  $M_P$  изменяются непрерывно.

При действии на сооружение сосредоточенных и равномерно распределенных нагрузок возможно, как известно, два случая изменения эпюр усилий  $\bar{M}_i$  и  $M_P$  в пределах участков их одновременной непрерывности, которые могут быть представлены в матричной форме в трех вариантах:

1) обе эпюры усилий линейны (рис. 7.1):



$$\begin{aligned} \Delta_{iP} &= \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EJ} = \left\{ \bar{M}_i^{лев} \quad \bar{M}_i^{np} \right\} \cdot \frac{l}{6EJ} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_P^{лев} \\ M_P^{np} \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{l}{6EJ} \cdot \left\{ \left( 2\bar{M}_i^{лев} + \bar{M}_i^{np} \right) \quad \left( \bar{M}_i^{лев} + 2\bar{M}_i^{np} \right) \right\} \cdot \begin{Bmatrix} M_P^{лев} \\ M_P^{np} \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{l}{6EJ} \left( 2\bar{M}_i^{лев} M_P^{лев} + \bar{M}_i^{np} M_P^{лев} + \bar{M}_i^{лев} M_P^{np} + 2\bar{M}_i^{np} M_P^{np} \right). \end{aligned}$$

Рисунок 7.1

Последнее выражение представляет собой формулу трапеций, поэтому данная матричная форма записи вычисления справедлива, и сокращенно для произвольного  $k$ -го участка может быть представлена в виде:

$$\Delta_{iP} = \left\{ \bar{M}_{ik} \right\}^T \cdot [D_k] \cdot \left\{ M_{Pk} \right\}, \quad (7.1)$$

где  $\left\{ \bar{M}_{ik} \right\}^T$  – транспонированная матрица ординат из единичной эпюры  $\bar{M}_i$ ;

$\left\{ M_{Pk} \right\}$  – вектор (матрица-столбец) ординат на участке из грузовой эпюры  $M_P$ ;

$[D_k]$  – матрица упругой податливости стержня, имеющая в рассматриваемом

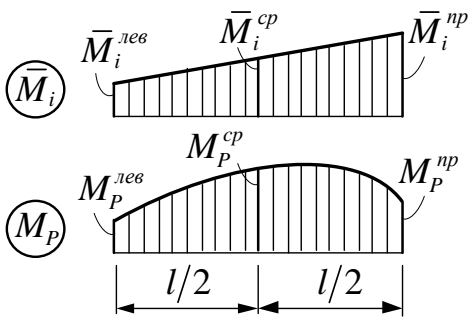


Рисунок 7.2

$$\Delta_{iP} = \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EJ} = \left\{ \bar{M}_i^{лев} \quad \bar{M}_i^{сп} \quad \bar{M}_i^{сп} \right\} \cdot \frac{l}{6EJ} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_P^{лев} \\ M_P^{сп} \\ M_P^{сп} \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{l}{6EJ} \cdot \left\{ \bar{M}_i^{лев} \quad 4\bar{M}_i^{сп} \quad \bar{M}_i^{сп} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} M_P^{лев} \\ M_P^{сп} \\ M_P^{сп} \end{Bmatrix} = \frac{l}{6EJ} \left( \bar{M}_i^{лев} M_P^{лев} + 4\bar{M}_i^{сп} M_P^{сп} + \bar{M}_i^{сп} M_P^{сп} \right).$$

Последнее выражение представляет собой формулу Симпсона.

Сокращенно матричная форма вычисления интеграла Мора для произвольного ( $k$ -го) участка может быть записана так же, как и в первом случае (7.1), но здесь матрица упругой податливости стержня на участке имеет другой вид:

$$[D_k] = \frac{l_k}{6EJ_k} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

3) одна из эпюр усилий (единичная  $\bar{M}_i$ ) линейна, а вторая (грузовая  $M_P$ ) – изменяется по параболической зависимости, при записи для линейной эпюры двух ординат (в начале и в конце участка), для параболической эпюры – трех ординат (в начале, в середине и в конце участка) (рис. 7.3):

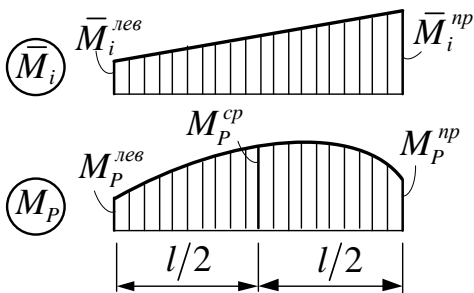


Рисунок 7.3

$$\Delta_{iP} = \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EJ} = \left\{ \bar{M}_i^{лев} \quad \bar{M}_i^{сп} \right\} \cdot \frac{l}{6EJ} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_P^{лев} \\ M_P^{сп} \\ M_P^{сп} \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{l}{6EJ} \cdot \left\{ \bar{M}_i^{лев} \quad 2\bar{M}_i^{лев} + 2\bar{M}_i^{сп} \quad \bar{M}_i^{сп} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} M_P^{лев} \\ M_P^{сп} \\ M_P^{сп} \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{l}{6EJ} \left( \bar{M}_i^{лев} M_P^{лев} + 4\bar{M}_i^{сп} M_P^{сп} + \bar{M}_i^{сп} M_P^{сп} \right).$$

Последнее выражение также представляет собой формулу Симпсона.

Сокращенно матричная форма записи вычисления для произвольного  $k$ -го участка может быть записана так же, как в первом и втором случаях (7.1), но здесь матрица упругой податливости стержня на участке имеет другой вид:

$$[D_k] = \frac{l_k}{6EJ_k} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

Расчетные системы сооружений обычно имеют не один участок, а разделяются на целый ряд участков, по которым следует суммировать «перемножение» эпюр. В результате матричная форма определения перемещений может быть представлена в виде:

$$\Delta_{iP} = \{\bar{M}_i\}^T \cdot [D] \cdot \{M_P\}, \quad (7.5)$$

где:  $\{\bar{M}_i\}^T$  – транспонированная матрица ординат из единичной эпюры  $\bar{M}_i$  (ординаты записываются последовательно для всех участков в соответствии с ранее рассмотренными принципами в строку);  $\{M_P\}$  – вектор (матрица-столбец) ординат из грузовой эпюры  $M_P$ , записываемых по участкам в столбец;  $[D]$  – квазидиагональная матрица упругой податливости системы, имеющая вид:

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_1] & [0] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [D_2] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [0] & [D_3] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & [0] & \dots & [D_n] \end{bmatrix}, \quad (7.6)$$

где:  $n$  – число участков одновременной непрерывности эпюр в системе;

$[D_i]$  – матрицы жесткости отдельных участков, вид которых определяется выражениями (7.2)–(7.4);

$[0]$  – нулевые матрицы, все элементы которых равны нулю.

Матричная форма позволяет определять сразу несколько ( $m$ ) перемещений от действия нескольких ( $s$ ) нагрузок, и тогда выражение для определения перемещений принимает вид:

$$[\Delta_P] = [\bar{M}]^T \cdot [D] \cdot [M_P], \quad (7.7)$$

где:  $[\Delta_P]$  – матрица перемещений:

$$[\Delta_P] = \begin{bmatrix} \Delta_{1P_1} & \Delta_{1P_2} & \dots & \Delta_{1P_s} \\ \Delta_{2P_1} & \Delta_{2P_2} & \dots & \Delta_{2P_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{mP_1} & \Delta_{mP_2} & \dots & \Delta_{mP_s} \end{bmatrix}; \quad (7.8)$$

$[\bar{M}]^T$  – транспонированная матрица ординат из единичных эпюр, состоя-

шая из  $m$  строк, в которые записываются ординаты по участкам из единичных эпюр  $\bar{M}_i$  ( $i = 1 \dots m$ ):

$$[\bar{M}_i]^T = \begin{bmatrix} \text{ординаты из эп. } \bar{M}_1 \\ \text{ординаты из эп. } \bar{M}_2 \\ \dots \\ \text{ординаты из эп. } \bar{M}_m \end{bmatrix}; \quad (7.9)$$

$[M_p]$  – матрица, состоящая из  $s$  столбцов ординат по участкам из грузовых эпюр  $M_p$  (число столбцов равно количеству вариантов нагрузок, от действия которых определяются перемещения):

$$[M_p] = \begin{bmatrix} M_{1P_1} & M_{1P_2} & \dots & M_{1P_s} \\ M_{2P_1} & M_{2P_2} & \dots & M_{2P_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{uP_1} & M_{uP_2} & \dots & M_{uP_s} \end{bmatrix}, \quad (7.10)$$

где  $u$  – число сечений, в которых записываются ординаты усилий.

Матрица упругой податливости  $[D]$  в (7.7) имеет тот же вид (7.6).

## 7.2. Пример расчета

Определим два перемещения в раме, представленной на рис. 7.4. Найдем горизонтальное перемещение точки К ( $\Delta_K^{zop}$ ) и угол поворота сечения 1 ( $\varphi_1$ ).

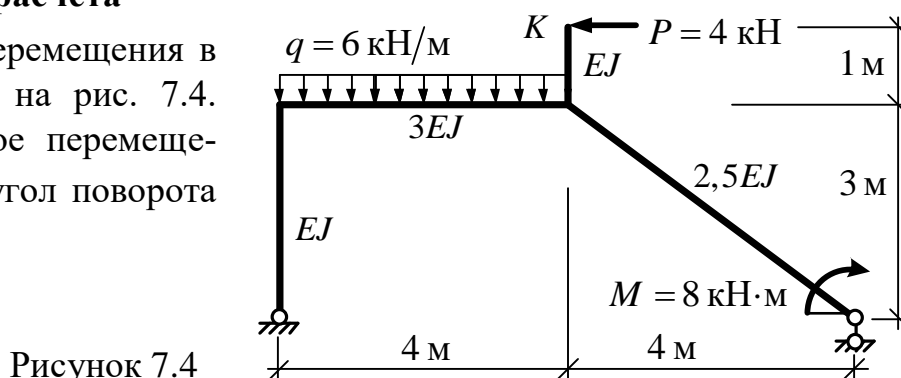


Рисунок 7.4

Строим эпюру изгибающих моментов от действия внешней нагрузки (грузовую эпюру):

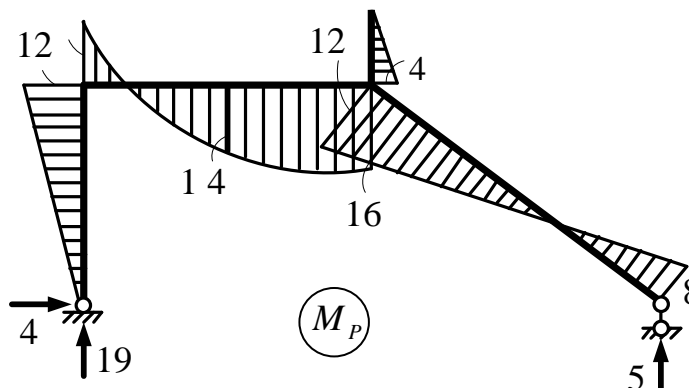


Рисунок 7.5

и единичные эпюры изгибающих моментов от действия единичных сил, приложенных в направлениях искомых перемещений:

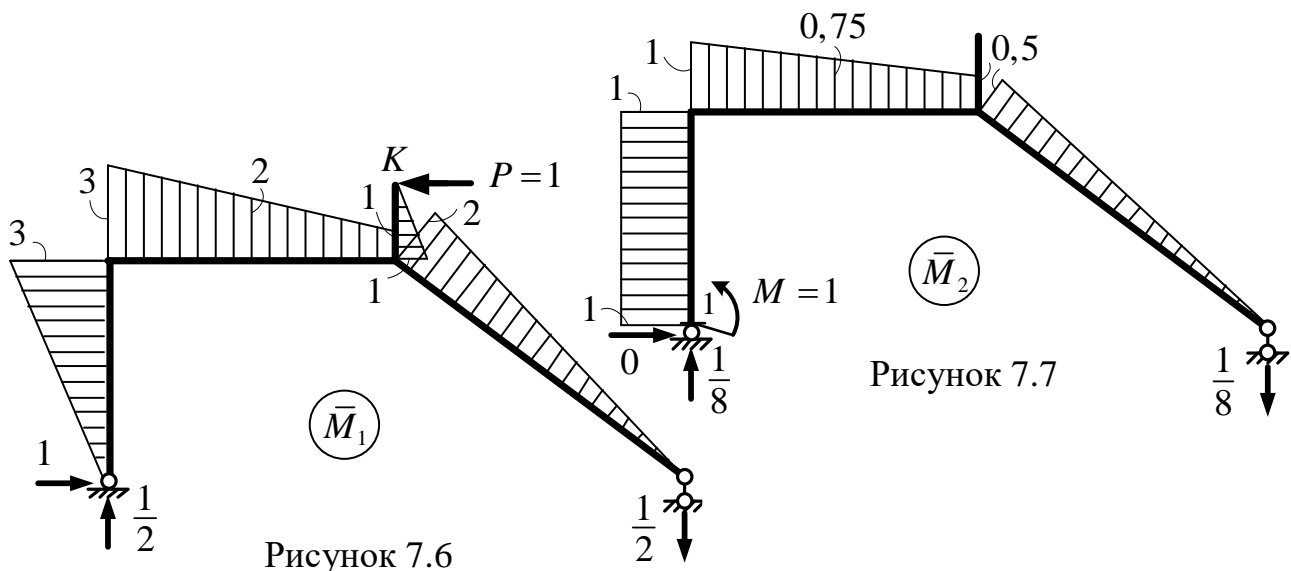


Рисунок 7.6

Рисунок 7.7

Для записи ординат усилий в матрицах необходимо разделить систему на участки одновременной непрерывности эшор, принять направление обхода участков (порядок записи ординат) и правило знаков для ординат (рис. 7.8).

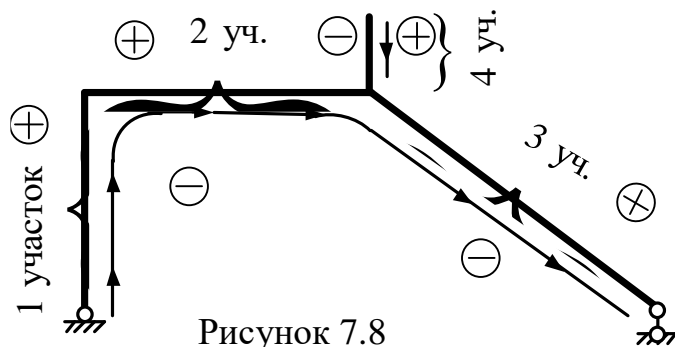


Рисунок 7.8

Перемещения определим по выражению (7.7), принимающему для одного варианта нагрузки вид:

$$\{\Delta_P\} = [M]^{-T} \cdot [D] \cdot \{M_P\}. \quad (7.11)$$

Запишем матрицы упругой податливости для каждого из участков:

$$[D_1] = \frac{3}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6EJ} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad [D_2] = \frac{4}{6 \cdot 2EJ} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$[D_3] = \frac{5}{6 \cdot 2,5EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6EJ} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad [D_4] = \frac{1}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Формируем квазидиагональную матрицу упругой податливости системы:

$$[D] = \frac{1}{6EJ} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

и матрицы ординат из единичных  $[\bar{M}]^T$  и грузовой  $\{M_p\}$  эпюр:

$$[\bar{M}]^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0,75 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Перемещения найдем, выполнив вычисления согласно выражению (11):

$$\{\Delta_p\} = \begin{Bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_K^{zop} \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} = [\bar{M}]^T \cdot [D] \cdot \{M_p\} = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{EJ} \\ 2,667 \\ \frac{EJ}{EJ} \end{Bmatrix},$$

$$\{M_p\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 12 \\ 12 \\ -14 \\ -16 \\ -12 \\ 8 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix}.$$

в результате получим:  $\Delta_K^{zop} = -\frac{4}{EJ}$ ,  $\varphi_1 = \frac{2,667}{EJ}$ .

Знак «минус» для первого перемещения свидетельствует о том, что точка  $K$  переместиться не влево, как мы предполагали, а вправо.

### 7.3. Возможные упрощения расчета

В ряде случаев ординаты на границах участков, записываемые друг за другом на всех либо отдельных эпюрах могут совпадать. В этих случаях их можно записывать один раз (совмещать их), и это относится как к единичным, так и к грузовым эпюрам усилий. При этом необходимо изменить и матрицу упругой податливости системы  $[D]$  (7.6). Делается все это следующим образом:

а) при совпадении ординат на границе соседних (следующих друг за другом) участков на всех единичных эпюрах эти ординаты в матрицах  $\{\bar{M}_i\}^T$  и  $[\bar{M}_i]^T$  совмещаются (записываются один раз), а матрицы упругой податливости соответствующих участков сдвигаются друг к другу по вертикали (матрица упругой податливости последующего участка сдвигается на одну строку вверх);

б) при аналогичном совмещении ординат на грузовых эпюрах, то есть в матрицах  $\{M_p\}$  и  $[M_p]$ , матрицы упругой податливости соответствующих участков сдвигаются друг к другу по горизонтали (матрица упругой податливости последующего участка сдвигается на один столбец влево);

в) при совмещении ординат на единичной и грузовых эпюрах одновременно соответствующие матрицы упругой податливости сдвигаются и по вертикали, и по горизонтали, то есть по диагонали; при этом крайние элементы этих матриц будут накладываться друг на друга (складываться).

В рассматриваемом выше примере расчета (рис. 7.4) на единичных эпюрах изгибающих моментов (рис. 7.6, 7.7) можно совместить ординаты (как совпадающие по значениям и знакам) на границах участков 1–2 и 3–4, – запишем эти ординаты в матрице  $[\bar{M}_i]^T$  соответственно один раз; на грузовой эпюре  $M_p$

можно совместить ординаты только на границе участков 1–2 (указанные ординаты в выражениях, представленных ниже, выделены прямоугольниками и заштрихованы). Соответственно в квазидиагональной матрице упругой податливости системы сдвинем вверх и влево (по диагонали) матрицу упругой податливости 2-го участка и вверх – матрицу упругой податливости 4-го участка. Вычисление перемещений в рассматриваемом примере с учетом указанных упрощений будет иметь вид:

$$\{\Delta_P\} = \begin{Bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_K^{zop} \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} = [\bar{M}]^T \cdot [D] \cdot \{M_P\} = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{3} & 2 & 1 & 2 & \boxed{0} & 2 \\ 1 & \boxed{1} & 0,75 & 0,5 & 0,5 & \boxed{0} & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \frac{1}{6EJ} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \boxed{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \boxed{12} \\ -14 \\ -16 \\ -12 \\ 8 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{EJ} \\ \frac{2,667}{EJ} \end{Bmatrix}.$$

## 8. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

### 8.1. Общие понятия

Производная функции  $y = f(x)$  есть

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{где } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Если  $\Delta x$  принять равным конечному числу, то

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}. \quad (8.1)$$

Это соотношение представляет *аппроксимацию производной* с помощью

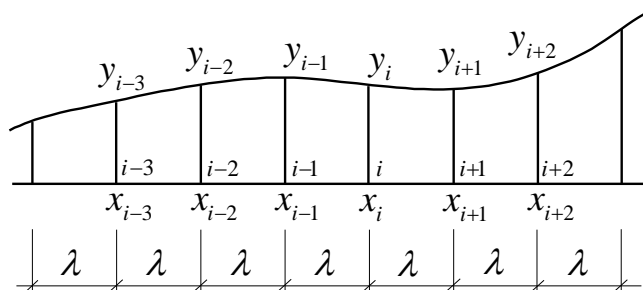


Рисунок 8.1

конечных разностей. При этом шаг аргумента  $\Delta x$ , то есть разность между соседними значениями аргумента, – обычно принимают одинаковым и обозначают для краткости одной буквой  $h$  или  $\lambda$ .

Допустим имеем значения функции с указанным шагом на некотором

отрезке  $[x_0, x_n]$  (рис. 8.1), равные  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ . Запишем выражение для про-

изводной в точке  $i$  (при  $x = x_i$ ). При этом в зависимости от способа вычисления конечных разностей получим разные формулы для вычисления *производной* в одной и той же точке:

$$\text{а) для левой разности будем иметь: } y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\lambda}; \quad (8.1.1)$$

$$\text{б) для правой разности получим: } y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{\lambda}; \quad (8.1.2)$$

$$\text{в) для центральной разности: } y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\lambda}. \quad (8.1.3)$$

Учитывая, что для центральной разности берется участок большей длины ( $2\Delta x$ ), то эта разность будет иметь большие погрешности, чем первые две, и соответственно требует разбивки системы на более мелкие участки. Однако она приводит к симметричным уравнениям и поэтому используется довольно часто.

Для *второй производной* в точке  $i$  будем иметь:

а) слева через правые разности:

$$y''_i = \frac{y'_i - y'_{i-1}}{\lambda} = \frac{\frac{y_{i+1} - y_i}{\lambda} - \frac{y_i - y_{i-1}}{\lambda}}{\lambda} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\lambda^2}; \quad (8.2)$$

б) справа через левые разности:

$$y''_i = \frac{y'_{i+1} - y'_i}{\lambda} = \frac{\frac{y_{i+1} - y_i}{\lambda} - \frac{y_i - y_{i-1}}{\lambda}}{\lambda} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\lambda^2}.$$

Для *третьей производной* в точке  $i$  получим:

а) слева (левая разность):

$$y'''_i = \frac{y''_i - y''_{i-1}}{\lambda} = \frac{\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\lambda^2} - \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\lambda^2}}{\lambda} = \frac{y_{i+1} - 3y_i + 3y_{i-1} - y_{i-2}}{\lambda^3}; \quad (8.3.1)$$

б) справа (правая разность):

$$y'''_i = \frac{y''_{i+1} - y''_i}{\lambda} = \frac{\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{\lambda^2} - \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\lambda^2}}{\lambda} = \frac{y_{i+2} - 3y_{i+1} + 3y_i - y_{i-1}}{\lambda^3}. \quad (8.3.2)$$

Для *четвертой производной* в точке  $i$  будем иметь:

а) слева – через правые  $y'''_i$ :

$$\begin{aligned} y^{IV}_i &= \frac{y'''_i - y'''_{i-1}}{\lambda} = \frac{(y_{i+2} - 3y_{i+1} + 3y_i - y_{i-1}) - (y_{i+1} - 3y_i + 3y_{i-1} - y_{i-2})}{\lambda^4} = \\ &= \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{\lambda^4}; \end{aligned} \quad (8.4)$$

б) справа – через левые  $y'''_i$ :



$$y_i^{IV} = \frac{y_{i+1}''' - y_i'''}{\lambda} = \frac{(y_{i+2} - 3y_{i+1} + 3y_i - y_{i-1}) - (y_{i+1} - 3y_i + 3y_{i-1} - y_{i-2})}{\lambda^4} =$$

$$= \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{\lambda^4}.$$

Отметим, что четные производные одинаковы слева и справа.

## 8.2. Метод конечных разностей

Для описания задач строительной механики и теории упругости часто используются дифференциальные уравнения равновесия, выражаемые через перемещения (прогибы) систем. При обычном решении таких уравнений ищется функция перемещений, описывающая состояние системы и удовлетворяющая условиям задачи, включая её граничные условия.

В методе конечных разностей (МКР) находится не сама функция, а её значения в некоторых точках (узлах). Понятно, что густота разбивки системы ( $\lambda = \Delta x$ ) здесь определяет точность решения.

Дифференциальные уравнения равновесия, выражаемые относительно прогибов для стержней могут быть представлены в следующих вариантах:

$$1) \quad EJ y'' = M \quad \text{или} \quad y'' - \frac{M(x)}{EJ(x)} = 0 \quad (8.5)$$

$$2) \quad \text{известно, что} \quad q = \frac{d^2 M}{dx^2} \quad \text{или} \quad M'' - q(x) = 0; \quad (8.6)$$

3) если уравнение (8.5) продифференцировать два раза, то с учетом (8.6)

получим: 
$$y^{IV} - \frac{q(x)}{EJ(x)} = 0. \quad (8.7)$$

Как видно из выражений производных в конечных разностях (8.1)–(8.4) при записи производных для граничных точек сооружений будут появляться точки, расположенные за пределами сооружения, или так называемые *законтурные (внеконтурные) точки* (точки  $-2; -1; 7$ ) (рис. 8.2).

Для их определения обычно используют граничные условия для сооружений, то есть известные значения физических величин на границах сооружений, связанных с условиями закрепления (опирания) этих точек.

Рассмотрим ряд граничных условий, которые могут встречаться в стержневых системах:

1) шарнирное опирание (рис. 8.3):

а)  $y_i = 0;$

б)  $M = EJ y_i'' = 0$  или  $y_i'' = 0;$

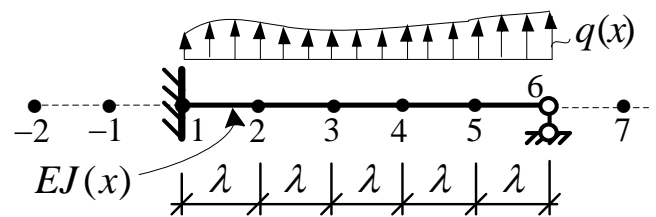


Рисунок 8.2

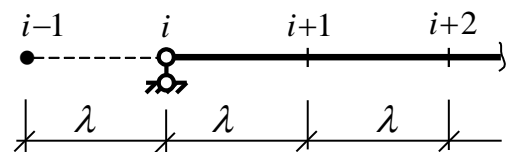


Рисунок 8.3

учитывая (8.2), будем иметь:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\lambda^2} = 0, \quad \text{а с учетом условия а) } (y_i = 0), \text{ получим:}$$

$$y_{i+1} + y_{i-1} = 0 \quad \text{или} \quad y_{i-1} = -y_{i+1};$$

то есть для шарнирного опирания при составлении уравнений с использованием законтурных точек следует принимать:

$$y_i = 0 \quad \text{и} \quad y_{i-1} = -y_{i+1} \quad (8.8)$$

2) защемление (рис. 8.4):

а)  $y_i = 0$ ;

б)  $\varphi_i = 0$  или  $\varphi_i = y'_i = 0$ ,

где  $\varphi_i$  – угол поворота в заделке;

записывая  $y'_i$  через центральную разность (8.1.3), получим:

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\lambda} = 0 \quad \text{или} \quad y_{i-1} = y_{i+1};$$

таким образом, для защемления при составлении уравнений с использованием законтурных точек следует принимать:

$$y_i = 0 \quad \text{и} \quad y_{i-1} = y_{i+1}; \quad (8.9)$$

3) свободный край (рис. 8.5):

здесь  $y_i$  неизвестно, однако легко определяются усилия в крайних точках:

а) на основе зависимости  $M = EJ y''$

будем иметь  $y''_i = \frac{m_i}{EJ}$  (если на краю прило-

жен сосредоточенный момент) или  $y''_i = 0$  (если момента  $m_i$  нет);

б) поперечная сила в крайнем сечении стержня равна силе  $P_i$ , а при ее отсутствии – нулю; соответственно на основе зависимости  $Q = \frac{dM}{dx} = EJ \frac{d^3 y}{dx^3}$

получим:  $y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{P_i}{EJ}$  или  $y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$ .

В результате дополнительно к основной системе уравнений для определения законтурных точек получаем два уравнения:

$$\begin{cases} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \frac{m_i}{EJ_i} \lambda^2; \\ -y_{i-2} + 3y_{i-1} - 3y_i + y_{i+1} = \frac{P_i}{EJ_i} \lambda^3. \end{cases} \quad (8.10)$$

Если на краю сосредоточенного момента или сосредоточенной силы нет, то соответствующие правые части в (8.10) будут равны нулю.

Эту систему уравнений необходимо будет включить (добавить) в общую

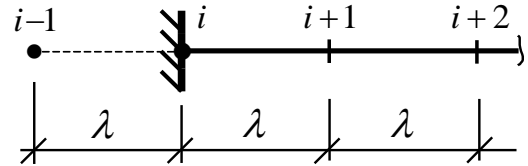


Рисунок 8.4

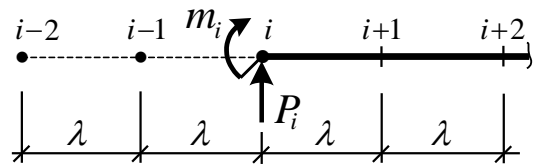


Рисунок 8.5

систему уравнений метода конечных разностей.

Для стержневых систем свободная консоль статически определима и эту систему уравнений не используют, для пластин и оболочек без нее не обойтись.

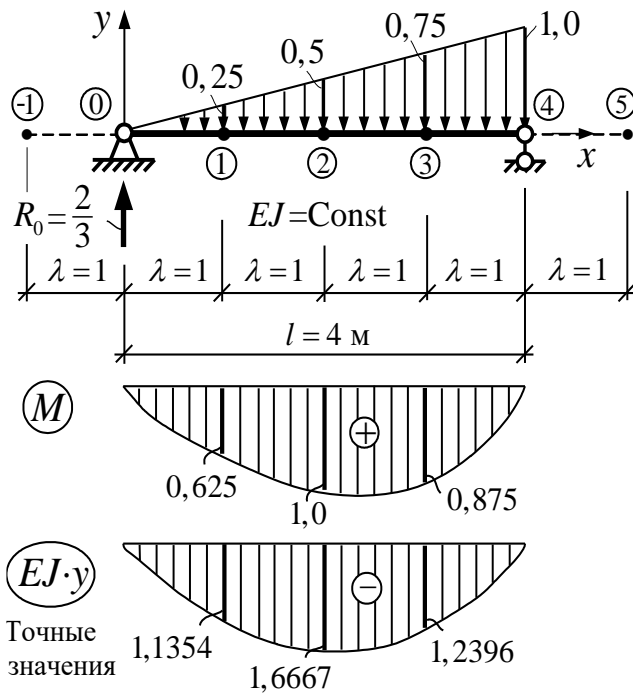


Рисунок 8.6

( $\lambda = l/4 = 1$  м) и составим уравнение (8.11) для точек 1, 2 и 3, принимая последовательно  $i$  равным номерам этих точек:

$$\begin{cases} M_0 - 2M_1 + M_2 = -0,25 \cdot 1^2; \\ M_1 - 2M_2 + M_3 = -0,5 \cdot 1^2; \\ M_2 - 2M_3 + M_4 = -0,75 \cdot 1^2; \end{cases}$$

При этом согласно граничным условиям будем иметь:  $M_0 = 0$  и  $M_4 = 0$ .

Решая эту систему уравнений, найдем:  $M_1 = 0,625$ ;  $M_2 = 1,0$ ;  $M_3 = 0,875$ .

Эти значения совпадают с точными результатами.

Проверим:  $\sum M_4 = 0$ ;  $R_0 \cdot 4 - \left(\frac{1 \cdot 4}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = 0$ ;  $R_0 = \frac{2}{3}$ ;

$$M_2^{лев} = \frac{2}{3} \cdot 2 - \left(\frac{0,5 \cdot 2}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = 1,33 - 0,33 = 1,0. \dots \text{ и т.д.}$$

Для определения прогибов системы воспользуемся теперь уравнением (8.5):

$$y'' - \frac{M(x)}{EJ} = 0.$$

В конечных разностях для произвольного  $i$ -го узла с учетом (8.2) это уравнение будет иметь вид:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \frac{M_i}{EJ} \cdot \lambda^2. \quad (8.12)$$

Рассмотрим применение метода конечных разностей к решению задачи изгиба двухопорной балки, нагруженной треугольной нагрузкой (рис. 8.6), для которой известно точное решение, чтобы можно было произвести оценку результатов.

Воспользуемся вначале уравнением в виде (8.6) и определим изгибающие моменты в системе:

$$M'' - q(x) = 0.$$

Записывая производную в конечно-разностном виде (8.2), получим уравнение для произвольного  $i$ -го узла в виде:

$$M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1} = q_i \lambda^2. \quad (8.11)$$

Разобьем балку на четыре части

Записав уравнение (8.12) для точек 1, 2 и 3, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_0 - 2y_1 + y_2 = \frac{0,625}{EJ} \cdot 1^2; \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = \frac{1,0}{EJ} \cdot 1^2; \\ y_2 - 2y_3 + y_4 = \frac{0,875}{EJ} \cdot 1^2. \end{cases}$$

Учитываем граничные условия ( $y_0 = 0$ ,  $y_4 = 0$ ) и решаем систему уравнений. Получим:  $y_1 = -\frac{1,1875}{EJ}$ ;  $y_2 = -\frac{1,75}{EJ}$ ;  $y_3 = -\frac{1,3125}{EJ}$ .

Сравним эти значения с точными, полученными способом непосредственного интегрирования (рис. 8.6), и определим погрешности расчета перемещений:

– для точки 1 расхождение составляет:  $\left| \frac{1,1875 - 1,1354}{1,1354} \right| \cdot 100\% = 4,59\%$ ;

– для точки 2  $\implies \left| \frac{1,6667 - 1,75}{1,6667} \right| \cdot 100\% = 5\%$ ;

– для точки 3  $\implies \left| \frac{1,2396 - 1,3125}{1,2396} \right| \cdot 100\% = 5,88\%$ .

Рассматриваемую задачу можно решить и другим путем, который часто является предпочтительнее. Воспользуемся уравнением (8.7)

$$y^{IV} - \frac{q}{EJ} = 0,$$

которое в конечных разностях с учетом (8.4) для  $i$ -ой точки имеет вид:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{q_i}{EJ} \lambda^2. \quad (8.13)$$

Составим уравнение (8.13) для точек 1, 2 и 3:

$$\begin{cases} y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3 = -\frac{0,25}{EJ} \cdot 1^2; \\ y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 = -\frac{0,5}{EJ} \cdot 1^2; \\ y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 = -\frac{0,75}{EJ} \cdot 1^2; \end{cases}$$

В уравнения входят законтурные точки, для которых согласно граничным условиям будем иметь: а) слева (шарнирная опора):  $y_0 = 0$ ;  $y_{-1} = -y_1$ ;

б) справа (шарнирная опора):  $y_4 = 0$ ;  $y_5 = -y_3$ .

Учитывая граничные условия, получаем систему трех уравнений относительно трех неизвестных в виде:

$$\begin{cases} 5y_1 - 4y_2 + y_3 = -\frac{0,25}{EJ}; \\ -4y_1 + 6y_2 - 4y_3 = -\frac{0,5}{EJ}; \\ y_1 - 4y_2 + 5y_3 = -\frac{0,75}{EJ}. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$y_1 = -\frac{1,1875}{EJ}; \quad y_2 = -\frac{1,75}{EJ}; \quad y_3 = -\frac{1,3125}{EJ}.$$

Этот результат совпадает со значениями, полученными выше.

Для вычисления изгибающих моментов теперь воспользуемся зависимостью  $M = EJ y''$ , которая в конечных разностях (8.2) для  $i$ -ой точки имеет вид:

$$M_i = \frac{EJ}{\lambda^2} \cdot (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}). \quad (8.14)$$

Получаем:  $M_1 = \frac{EJ}{\lambda^2} \cdot (y_2 - 2y_1 + y_0) = \frac{EJ}{1^2} [-1,75 - 2(-1,1875)] = 0,625;$

$$M_2 = \frac{EJ}{\lambda^2} \cdot (y_3 - 2y_2 + y_1) = \frac{EJ}{1^2} \cdot \frac{1}{EJ} [-1,3125 - 2(-1,75) - 1,1875] = 1,0;$$

$$M_3 = \frac{EJ}{\lambda^2} \cdot (y_4 - 2y_3 + y_2) = \frac{EJ}{1^2} \cdot \frac{1}{EJ} [0 - 2(-1,3125) + (-1,75)] = 0,875.$$

Эти результаты также совпадают с полученными ранее и соответствуют точным значениям для рассматриваемой задачи.

Заметим, что решение подобной задачи при других условиях опирания, при других функциях распределения нагрузки и переменном моменте инерции сечения проводится совершенно аналогично без всяких дополнительных затруднений, в то время как аналитическое решение в замкнутом виде для такого общего случая может вообще отсутствовать.

### 8.3. Вариационно-разностный метод

Здесь используются экстремальные свойства полной потенциальной энергии системы, а точнее, *принцип возможных перемещений* по отношению к энергии системы, который гласит:

ⓘ Для системы, находящейся в равновесии, из всех возможных перемещений, удовлетворяющих заданным граничным условиям, в действительности имеют место те, при которых полная потенциальная энергия принимает минимальное значение.

Полная потенциальная энергия системы состоит из энергии ее деформирования  $\mathcal{E}_{\text{деф}}$  и изменения в процессе деформирования потенциала внешней нагрузки  $\mathcal{E}_{\text{нагр}}$ :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{деф}} + \mathcal{E}_{\text{нагр}} = \mathcal{E}_{\text{деф}} - A_{\text{нагр}},$$

где изменение потенциальной энергии нагрузки  $\mathcal{E}_{нагр}$  равно с обратным знаком работе нагрузки:  $\mathcal{E}_{нагр} = -A_{нагр}$ .

Полная потенциальная энергия систем выражается через перемещения (прогибы) и нагрузки. Функция прогибов входит в выражение энергии в виде непосредственно функции  $y$  и ее второй производной. Соответственно выражение полной потенциальной энергии системы можно представить в виде:

$$\mathcal{E} = \int \Phi(y, y'', q) dx. \quad (8.15)$$

Несложно заметить, что это выражение является функционалом.

*Функционал* – это функция, которая зависит от одной, либо нескольких функций, и в которой аргумент  $x$  в явном виде не присутствует.

Если для обыкновенной функции  $f(x)$  значения функции определяются множеством значений аргумента  $x$ , то для функционала  $I[f(x)]$  его значения определяются множеством функций, подчиняющихся определенным (граничным и другим) условиям.

Определение функции  $f(x)$ , при которой функционал  $I[f(x)]$ , выраженный с помощью определенного интеграла, получает экстремальное значение, является *вариационной задачей*.

В рассматриваемых задачах мы ищем функцию прогибов (перемещений), которая соответствует минимальному значению энергии.

Функция, которая удовлетворяет такому условию, называется *экстремалью*, то есть *экстремаль* – это решение вариационной задачи.

При использовании конечных разностей мы определяем, как уже указывалось, не саму функцию, а ее значения в ряде точек.

Функционал полной потенциальной энергии представляется в конечно-

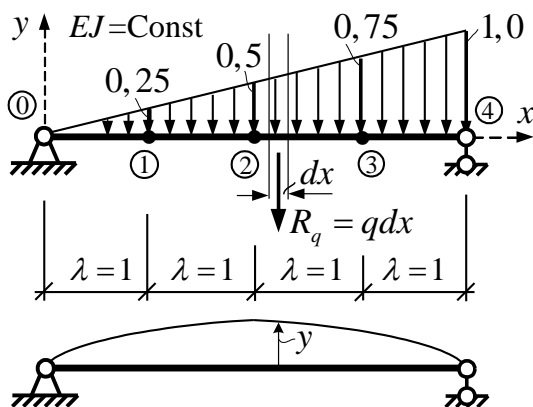


Рисунок 8.7

разностной форме, и берутся производные по параметрам перемещений в точках, которые на основе принципа возможных перемещений приравняются к нулю:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y_i} = 0. \quad (8.16)$$

Получаем опять систему алгебраических уравнений, решая которую находим перемещения точек.

Рассмотрим применение вариационно-

разностного метода на примере той же балки (рис. 8.7).

Полная потенциальная энергия балки запишется в виде:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{деф} + \mathcal{E}_q = \mathcal{E}_{деф} - A_q = = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \cdot (y'')^2 dx + \int_0^l q y dx \approx \frac{\lambda}{2} EJ \sum y'' + \lambda \sum q y.$$

Разбивая балку на четыре участка (рис. 8.7) и учитывая зависимость (8.2) для второй производной, получим:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \lambda \frac{EJ}{2} \left[ \left( \frac{y_2 - 2y_1 + 0}{\lambda^2} \right)^2 + \left( \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{\lambda^2} \right)^2 + \left( \frac{0 - 2y_3 + y_2}{\lambda^2} \right)^2 \right] + \\ &\quad + \lambda \cdot (0,25y_1 + 0,5y_2 + 0,75y_3) = \\ &= \frac{EJ}{2} \left[ (y_2 - 2y_1)^2 + (y_3 - 2y_2 + y_1)^2 + (-2y_3 + y_2)^2 \right] + 1 \cdot (0,25y_1 + 0,5y_2 + 0,75y_3). \end{aligned}$$

Применяем теперь к полной потенциальной энергии балки условие ее экстремальности (8.16) и получаем для каждой из узловых точек уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y_1} &= 0; \quad EJ \left[ (y_2 - 2y_1)(-2) + (y_3 - 2y_2 + y_1) \cdot 1 \right] - 0,25 = 0; \\ &\quad -2y_2 + 4y_1 + y_3 - 2y_2 + y_1 = -\frac{0,25}{EJ}; \quad 5y_1 - 4y_2 + y_3 = -\frac{0,25}{EJ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y_2} &= 0; \quad EJ \left[ (y_2 - 2y_1) \cdot 1 + (y_3 - 2y_2 + y_1) \cdot (-2) + (-2y_3 + y_2) \cdot 1 \right] + 0,5 = 0; \\ &\quad y_2 - 2y_1 - 2y_3 + 4y_2 + 2y_1 - 2y_3 + y_2 = -\frac{0,5}{EJ}; \quad -4y_1 + 6y_2 - 4y_3 = -\frac{0,5}{EJ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y_3} &= 0; \quad EJ \left[ 0 + (y_3 - 2y_2 + y_1) \cdot 1 + (-2y_3 + y_2) \cdot (-2) \right] + 0,75 = 0; \\ &\quad y_3 - 2y_2 + y_1 + 4y_3 + 2y_2 = -\frac{0,75}{EJ}; \quad y_1 - 4y_2 + 5y_3 = -\frac{0,75}{EJ}. \end{aligned}$$

Получаем систему трех уравнений, которая полностью совпадает с системой уравнений, полученной при решении дифференциального уравнения четвертого порядка (8.13).

## 9. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЕ

### 9.1. Общие понятия и методы

*Нелинейными* называют уравнения  $F(x)=0$ , в которых функция  $F(x)$  зависит от аргумента  $x$  нелинейно.

Нелинейные уравнения разделяют на алгебраические и трансцендентные. *Алгебраическими* являются уравнения, содержащие только алгебраические функции (степенные, рациональные, иррациональные). *Трансцендентные* уравнения содержат тригонометрические, показательные, логарифмические и другие подобные функции.

Методы решения нелинейных уравнений делятся на *прямые* и *итерационные*.

Прямые методы позволяют записать решение в виде некоторого конечного соотношения (формулы). Вспомним, например, решение квадратного уравнения, некоторых тригонометрических и показательных уравнений.

Нелинейные уравнения, получаемые при расчете сооружений, чаще всего решить такими простыми методами не удастся, и приходится использовать итерационные методы – методы последовательных приближений.

Нелинейные уравнения получаются, например, при решении задач устойчивости. Так при расчете на устойчивость рамы, представленной на рис. 9.1, уравнение для нахождения критической нагрузки (критического параметра

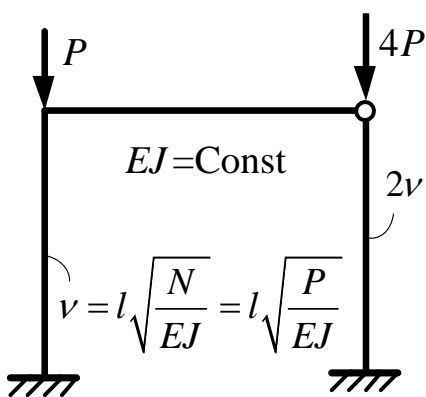


Рисунок 9.1

устойчивости  $v$ , через который выражается критическая нагрузка –  $P_{кр} = \frac{v_{кр}^2 EJ}{l^2}$ ) в общем случае может

иметь вид:

$$\begin{vmatrix} r_{11}(v) & r_{12}(v) \\ r_{21}(v) & r_{22}(v) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad r_{11} \cdot r_{22} - r_{12} \cdot r_{21} = 0, \quad (9.1)$$

где величины  $r_{ik}$  выражаются через функции  $\varphi_1(v)$ ,

$\varphi_2(v)$ ,  $\varphi_3(v)$ ,  $\varphi_4(v)$ ,  $\eta_1(v)$ ,  $\eta_2(v)$ , которые являются трансцендентными и имеют достаточно сложные за-

висимости, например, вида:

$$\varphi_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v \left( \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}; \quad \varphi_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v \left( \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}, \quad \text{где} \quad v = l \sqrt{\frac{N}{EJ}},$$

а  $N$  – величина продольной силы в сжатом стержне в недеформированном состоянии.

Уравнение устойчивости (9.1) для рамы на рис. 9.1 может иметь вид:

$$[a \cdot \varphi_2(v) + b][c \cdot \eta_2(v) + d \cdot \eta_1(2v)] - k \cdot \varphi_4^2(v) = 0, \quad (9.2)$$

где значения коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $k$  в уравнении зависят от размеров рамы и соотношений жесткостей ее стержней.

Уравнение (9.2) является нелинейным и его левая часть может иметь вид, показанный, например, на рис. 9.2.

Для решения подобных нелинейных уравнений чаще всего используют итерационные методы, алгоритм нахождения решения которыми состоит обычно из двух этапов:

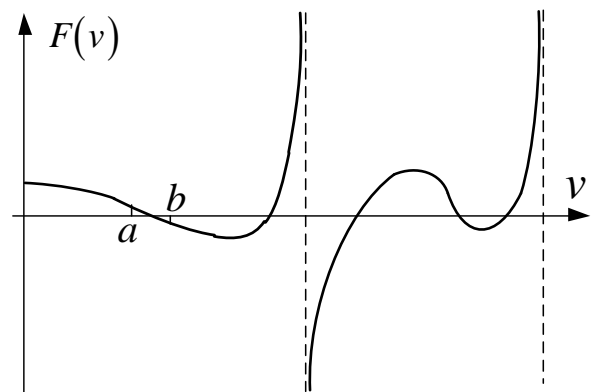


Рисунок 9.2



- 1) отыскание приближенного значения решения или содержащего его отрезка;
- 2) уточнение решения до некоторой заданной точности непосредственно итерационным методом.

Первый этап решения заключается в нахождении отрезка  $[a, b]$ , в пределах которого будет находиться решение. В точках  $a$  и  $b$  функция  $F(x)$  должна принимать значения разных знаков (рис. 9.2), то есть должно выполняться условие:

$$F(a) \times F(b) < 0. \quad (9.3)$$

В этом случае между точками  $a$  и  $b$  будет, по крайней мере, одна точка, в которой функция будет равна нулю ( $F(x) = 0$ ). Отыскание отрезка  $[a, b]$  необходимо начинать с начала изменения функции и, задавая достаточно малый шаг изменения аргумента  $\Delta x$ , чтобы случайно не проскочить первое решение, необходимо последовательно вычислять значения функции в очередных точках, проверяя выполнение условия (9.3).

После нахождения отрезка  $[a, b]$ , содержащего решение, необходимо уточнять решение. Каждый шаг уточнения называется *итерацией*. В результате получим последовательность приближенных значений решения:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Если эти значения постепенно приближаются к истинному значению, то говорят, что итерационный процесс сходится, и наоборот.

Рассмотрим суть ряда итерационных методов более подробно.

## 9.2. Метод деления отрезков пополам (метод бисекции)

Если нам удалось найти отрезок  $[a, b]$ , в котором расположено искомое значение корня  $x = c$  ( $a < c < b$ ) (рис. 9.3), то здесь далее итерационный процесс выполняется в следующем порядке:

- 1) в качестве первого значения принимается середина отрезка  $[a, b]$ :

$$c_1 = \frac{a+b}{2};$$

- 2) вычисляется значение функции в этой точке –  $F(c_1)$ ;

3) выполняется анализ изменения функции на отрезках  $[a, c_1]$ ,  $[c_1, b]$  путем вычисления произведений  $F(a) \times F(c_1)$ ,  $F(c_1) \times F(b)$  и выявления, какое из них меньше нуля; в результате находим новый отрезок, в пределах которого находится решение (на рис. 9.3 – это отрезок  $[c_1, b]$ );

4) теперь в качестве очередного приближения принимаем середину этого отрезка

$$c_2 = \frac{c_1+b}{2}$$

- 5) и вычисляем значение функции в этой точке –  $F(c_2)$ ;

б) выполняется анализ изменения функции на отрезках  $[c_1, c_2]$ ,  $[c_2, b]$ , определяя, какое из произведений  $F(c_1) \times F(c_2)$  или  $F(c_2) \times F(b)$  меньше нуля и соответственно в пределах какого отрезка находится искомое решение (на рис. 9.3 это отрезок  $[c_2, b]$ );

7) далее берем уже середину отрезка  $[c_1, c_2] - c_3 = \frac{c_1 + c_2}{2}$ , и повторяем

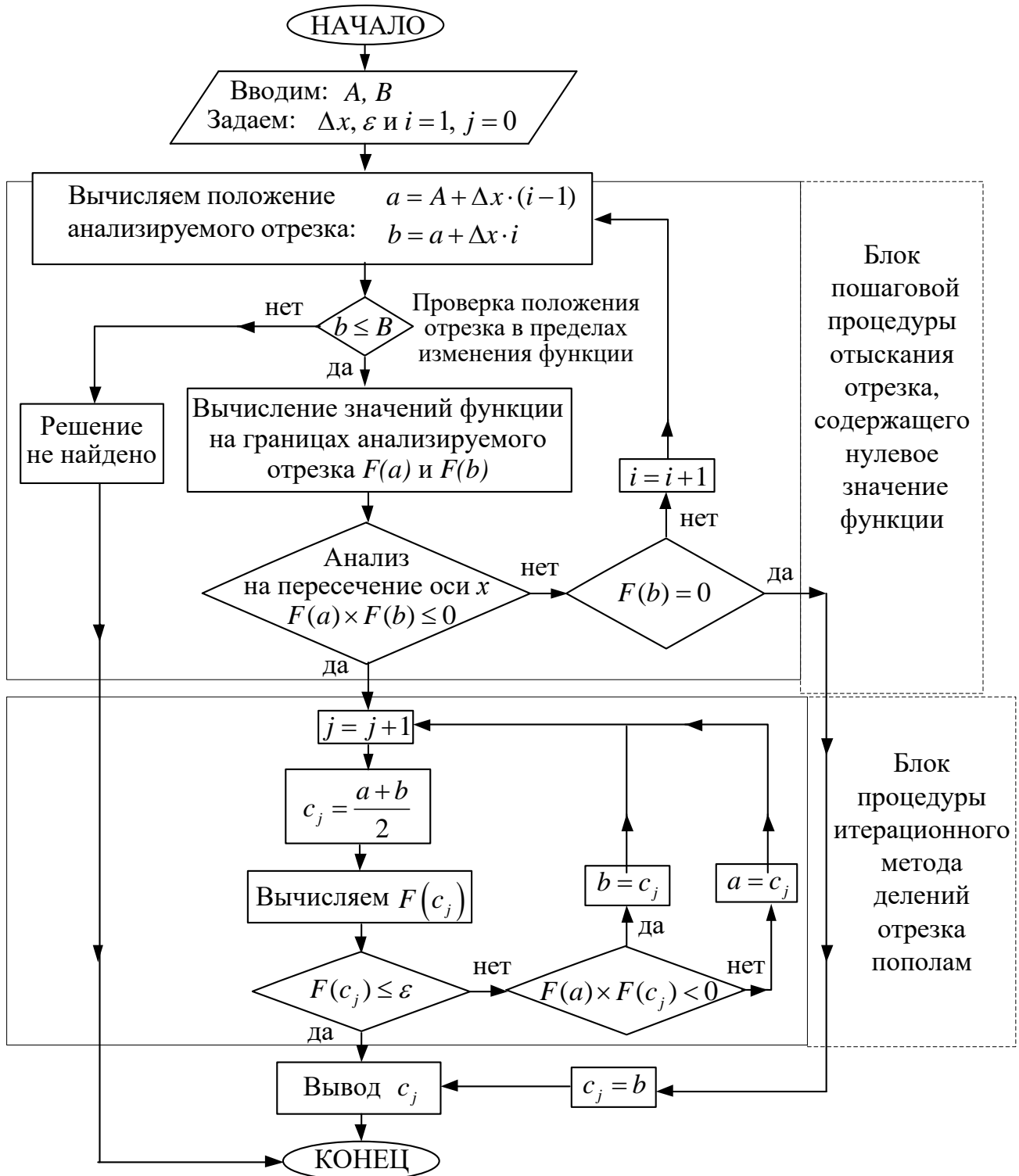


Рисунок 9.4. Блок-схема метода деления отрезка пополам

процедуры, изложенные в п. 5 и 6, определяя новый более узкий отрезок  $([c_2, c_3])$ , в пределах которого находится решение.

Таким образом, повторяя рассмотренную процедуру, мы все ближе приближаемся к искомому решению и после

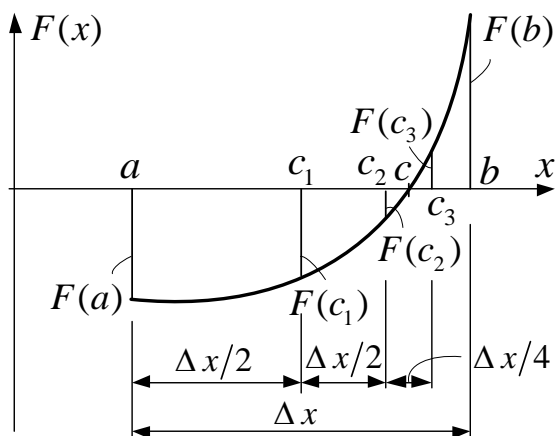


Рисунок 9.3

каждой итерации отрезок, в пределах которого находится решение, уменьшается вдвое (после  $n$  итераций – в  $2^n$  раз).

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значение функции по модулю после некоторой  $n$ -ой итерации не станет меньше некоторого заданного малого числа  $\varepsilon$  (например,  $10^{-4}$ ):

$$|F(c_n)| < \varepsilon. \quad (9.4)$$

Представим блок-схему рассматриваемого итерационного процесса для некоторой функции  $F(x)$ , изменяющейся в пределах от  $A$  до  $B$  (рис. 9.4). Начальный шаг изменения функции  $\Delta x$  принимаем достаточно малым, но имеющим конечную величину.

### 9.3. Метод хорд

Как и ранее, предварительно находится отрезок  $[a, b]$ , в пределах которого расположено искомое значение корня  $x = c$  (для которого соблюдается условие  $F(a) \times F(b) < 0$ ).

После этого выполняем следующую процедуру (рис. 9.5):

1) на отрезке  $[a, b]$  проводится хорда, соединяющая ординаты функции  $F(a)$  и  $F(b)$ . Уравнение этой хорды определяется зависимостью, известной из аналитической геометрии, как уравнение прямой, проходящей через две точки:

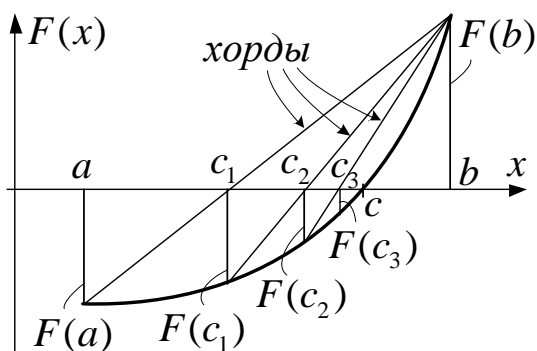


Рисунок 9.5

$$\frac{y - F(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Если принять здесь  $y = 0$ , то из полученного выражения найдем положение точки, соответствующей пересечению хорды с осью абсцисс и соответственно предполагаемому решению:

$$x_1 = c_1 = a - (b - a) \frac{F(a)}{F(b) - F(a)}, \quad (9.5)$$

то есть найдем первое приближение к решению –  $c_1$ ;

2) вычисляется значение функции в этой точке –  $F(c_1)$ ;

3) выполняется анализ изменения функции на отрезках  $[a, c_1]$ ,  $[c_1, b]$  путем вычисления произведений  $F(a) \times F(c_1)$ ,  $F(c_1) \times F(b)$  и выявления, какое из них меньше нуля; в результате находим новый отрезок, в пределах которого находится решение (на рис. 9.5 – это отрезок  $[c_1, b]$ );

4) проводим новую хорду через ординаты функции  $F(c_1)$  и  $F(b)$ ;

5) используя выражение (9.5) (заменяя в индексах 1 на  $i$ ), находим новое приближение к решению (на рис. 9.5 – точку  $c_2$ ).

Процедуры, изложенные в п. 2–5 (с учетом замены  $c_1$  на  $c_i$ ), повторяем до тех пор, пока величина функции  $F(c_i)$  не станет настолько малой, что будет удовлетворять требуемому условию точности решения (9.4).

Анализ показывает, что метод хорд приводит к решению быстрее, чем метод деления отрезка пополам.

Блок-схема метода хорд аналогична представленной для метода деления отрезка пополам с той разницей, что вместо вычисления приближения корня по формуле  $(c+b)/2$  нужно использовать формулу (9.5).

Для решения нелинейных уравнений могут применяться также метод Ньютона (метод касательных), метод простой итерации и другие методы.

## 10. ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

### 10.1. Основные положения, принципы и подходы

*Метод конечных элементов* (МКЭ) в последние годы находит очень широкое применение в расчетах самых различных сооружений и конструкций. Этот метод является одним из основных и наиболее мощных инструментов численного исследования напряженно-деформированного состояния конструкций и сооружений при действии различных нагрузок и воздействий, что объясняется тем, что МКЭ позволяет решать задачи с очень большим числом неизвестных, обладает возможностью высокой степени автоматизации всех процессов расчета, особенно при применении современной компьютерной техники, наличием ряда компьютерных программ, реализующих этот метод. При этом метод конечных элементов отличаются достаточная простота, физическая наглядность, высокая логичность и универсальность [1, 2, 8, 9, 10, 13, 15].

Сущность метода конечных элементов отражается в его названии и заключается в разделении конструкций и сооружений тем или иным способом на ряд частей, отдельных элементов достаточной простой конфигурации. Размеры этих элементов обычно малы по сравнению с размерами всей конструкции, сооружения, но имеют конечные значения (поэтому их и называют *конечными элементами* (КЭ)). В этом основное отличие метода конечных элементов от мето-

дов теории упругости, где при составлении разрешающих уравнений тело делится на бесконечно малые элементы и его поведение описывается системой дифференциальных зависимостей. В МКЭ сооружение делится на элементы конечной величины и описывается системой алгебраических уравнений.

Конечные элементы предварительно должны быть изучены отдельно – определяются точки и способы их взаимодействия между собой и зависимости между параметрами взаимодействия в этих точках и поведением конечных элементов во внутренних их областях, то есть должно быть подробно исследовано напряженно-деформированное состояние конечных элементов.

Связь конечных элементов между собой описывается уравнениями равновесия и условиями неразрывности перемещений.

Таким образом, конструкция или сооружение, имеющее бесконечное число степеней свободы, в методе конечных элементов заменяется системой с конечным числом степеней свободы. При такой замене может нарушаться непрерывность исходной конструкции по перемещениям и усилиям, которые на границах между конечными элементами будут иметь разрывы – конструкция становится дискретной, поэтому в МКЭ и говорят о *расчетной дискретной модели* рассчитываемого сооружения. Замена реальной конструкции (сооружения) совокупностью дискретных элементов с расчетной точки зрения в МКЭ подразумевает *равенство* энергий этой конструкции и ее дискретной модели, на котором базируется получение основных разрешающих уравнений метода.

При использовании метода конечных элементов следует четко различать три группы уравнений:

- 1) статические, устанавливающие – на основе уравнений равновесия – связь между узловыми усилиями (внутренними силами) и узловыми нагрузками (внешними силами);
- 2) физические, связывающие между собой внутренние силы и деформации элементов;
- 3) геометрические, описывающие связь между узловыми перемещениями и деформациями элементов.

Полученная дискретная модель сооружения, конструкции, как система взаимосвязанных между собой конечных элементов, описывается системой уравнений высокого порядка. Для исключения части искомых параметров и уменьшения порядка разрешающих уравнений используются классические методы строительной механики – метод перемещений, метод сил или смешанный метод. В зависимости от принятого метода и неизвестных метод конечных элементов может реализовываться в трех формах:

**1. В форме метода перемещений.** За основные неизвестные здесь принимаются перемещения узловых точек. Для их определения составляются уравнения равновесия узловых точек. Узловые усилия, входящие в эти уравнения, выражаются с помощью матриц жесткости через узловые перемещения. В результате для определения основных неизвестных – перемещений узлов –

получаем систему неоднородных алгебраических уравнений.

**2. В форме метода сил.** За основные неизвестные принимаются узловые усилия взаимодействия между конечными элементами. Для их определения составляются уравнения совместности перемещений в узловых точках. Компоненты узловых перемещений выражаются через узловые усилия. В результате получаем систему алгебраических уравнений относительно узловых усилий.

**3. В форме смешанного метода,** в которой неизвестными частично принимаются перемещения узлов, а частично узловые усилия взаимодействия КЭ.

Чаще всего порядок системы уравнений в МКЭ в форме метода сил оказывается выше, чем в форме метода перемещений, а получение ряда зависимостей в форме метода перемещений проще, чем в форме метода сил. Поэтому при расчете конструкций и сооружений чаще используется МКЭ в форме метода перемещений, как более универсальный и удобный [1, 2, 8, 9, 13], и поэтому далее здесь будет рассматриваться МКЭ только в форме метода перемещений.

Выполнение операций в методе конечных элементов производится в матричной форме. Основными понятиями и величинами в МКЭ являются вектор узловых перемещений, вектор узловых нагрузок и матрица жесткости, записываемые как для всей системы, так и для отдельных конечных элементов. Матрица жесткости системы  $[K]$  связывает между собой вектор узловых перемещений и вектор узловых нагрузок системы. Матрица жесткости конечного элемента  $[K_e]$  связывает перемещения его концов и усилия по его концам. Эта матрица квадратная, а размер ее соответствует числу неизвестных перемещений узлов системы (конечного элемента).

Например, вектора (будем обозначать их фигурными скобками) нагрузок и перемещений для узла плоской системы (рис. 10.1) имеют вид:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ M_{Pi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}; \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \Delta_{ix} \\ \Delta_{iy} \\ \varphi_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}.$$

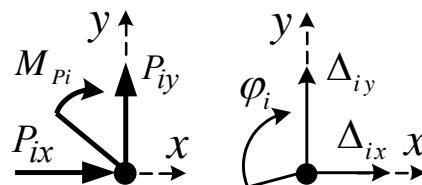


Рисунок 10.1

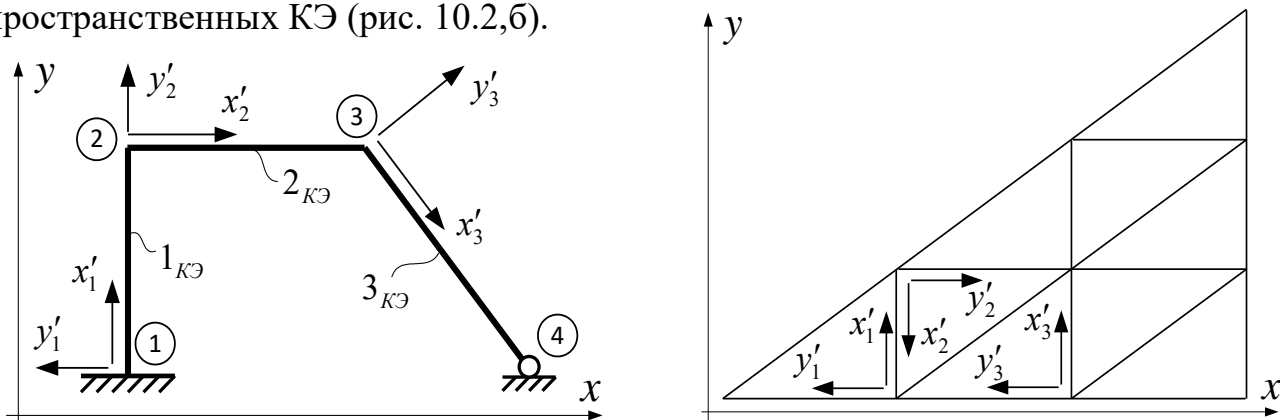
Величины внешних узловых сил и усилий, которые по своему действию могут быть и силами, и моментами, а также величины перемещений, которые могут быть и линейными, и угловыми, обозначают одним символом с соответствующим цифровым индексом. Так, в выражениях (10.1)  $P_1$  соответствует  $P_x$ ,  $P_2$  соответствует  $P_y$ ,  $P_3 \rightarrow M$  и т.д.; аналогично  $\Delta_1$  соответствует  $\Delta_x$ ,  $\Delta_2 \rightarrow \Delta_y$ ,  $\Delta_3 \rightarrow \varphi$  и т.п. Важным здесь является и порядок нумерации – один и тот же номер индекса должен соответствовать и нагрузке, и усилию, и перемещению в направлении одной и той же оси.

Первым шагом на пути определения векторов сил и перемещений является задание узловых точек. В методе конечных элементов следует различать *глобальные (общие)* и *локальные (местные)* системы координат.

**Глобальная (общая)** система координат задается для всей конструкции, включающей все конечные элементы, на которые эта конструкция разделена.

**Локальные (местные)** системы координат связываются с отдельными конечными элементами и для каждого конечного элемента будут своими.

Так как конечные элементы в конструкции могут располагаться по-разному, то локальные оси координат для этих КЭ будут различно ориентированы. Начало координат локальных осей принимается обычно в одном из узлов КЭ, при этом ось  $x'$  направляется по стержню (от начала к концу) – для стержневых КЭ (рис. 10.2,а), либо по направлению одной из сторон, граней – для плоских и пространственных КЭ (рис. 10.2,б).



а) плоская стержневая система;

б) плоская континуальная система.

Рисунок 10.2

Глобальные оси координат далее обозначим буквами  $x, y, z$  без штрихов и индексов, а локальные оси – теми же буквами, но со штрихами и индексами –  $x'_s, y'_s, z'_s$ , указывающими к какому КЭ ( $s$ -ому) эта локальная (местная) система координат относится (рис. 10.2).

Зная положение осей глобальной и локальной систем координат, несложно преобразовать зависимости из одной системы координат в другую.

Перемещения узлов дискретной модели в глобальной системе координат обычно обозначают большой буквой  $\Delta$ , а перемещения узлов для конечных элементов в глобальных системах координат – малой буквой  $\delta$  без штриха, а в локальной системе координат этой же буквой со штрихом –  $\delta'$ .

## 10.2. Основные этапы расчета

При использовании МКЭ можно выделить следующие этапы расчета:

1. Дискретизация расчетной схемы конструкции, сооружения, то есть ее разбиение (разделение) на конечные элементы той или иной формы и выбор узлов соединения КЭ между собой, перемещения которых принимаются за основные неизвестные метода конечных элементов. От количества конечных элементов, их формы и выбора мест их соединения (узлов) часто в очень большой степени зависит как трудоемкость расчета, так и его точность.

2. Рассмотрение отдельно каждого конечного элемента – определение зависимостей перемещений в области конечных элементов от перемещений их

узлов, являющихся неизвестными МКЭ, и на основе физических соотношений составление матриц жесткости конечных элементов. Это важный этап, определяющий точность расчета.

Поле перемещений в каждом конечном элементе представляется через систему аппроксимирующих функций, выраженных через перемещения в узловых точках. Деформации и напряжения в элементе могут быть представлены через узловые перемещения, если аппроксимирующие функции подставить в геометрические соотношения, а их затем – в физические зависимости.

Поведение того или иного элемента при деформировании описывается уравнениями, связывающими перемещения и силы в узловых точках. Эти уравнения получаются обычно с использованием принципа Лагранжа или эквивалентного ему условия минимума полной потенциальной энергии [8, 9], который гласит:

**Ⓢ Для системы, находящейся в равновесии, из всех возможных перемещений, удовлетворяющих заданным граничным условиям, в действительности имеют место те, при которых полная потенциальная энергия принимает минимальное значение.**

Аналитически этот принцип записывается в виде:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_i} = 0, \quad i = 1 \dots \tilde{n}, \quad (10.1)$$

где  $\tilde{n}$  – число неизвестных перемещений узлов в системе или в конечном элементе.

В результате получаем, так называемые, матрицы жесткости элементов, через которые и выражается связь узловых перемещений и усилий.

3. Соединение конечных элементов в единое целое, в общий «ансамбль», как можно более точно имитирующий заданную систему и ее работу, для чего используются уравнения равновесия каждого из узлов (всех узлов) системы и условия равенства узловых перемещений соседних элементов.

Здесь получаем разрешающие уравнения, включающие в себя матрицу жесткости системы, связующую перемещения узлов системы в глобальной системе координат и реакции, возникающие в узлах при деформировании системы под действием нагрузок. Число неизвестных в этих уравнениях равно числу искомых перемещений в узловых точках.

Получение разрешающих уравнений может быть выполнено и с использованием вариационного принципа Лагранжа (10.1) для всей системы.

4. Решение системы уравнений метода конечных элементов и определение основных неизвестных метода – перемещений узлов дискретной модели системы (при использовании метода конечных элементов в форме метода сил определяются усилия взаимодействия между конечными элементами).

5. Определение усилий в каждом конечном элементе и соответственно во всей системе. Выполняется на основе полученных перемещений узлов системы и соответственно перемещений узлов конечных элементов с использованием матриц жесткости конечных элементов.



### 10.3. Расчетная дискретная модель системы

Дискретизация расчетной схемы сооружения, конструкции является первым шагом на пути к решению задачи. Искусство разбиения системы на конечные элементы зависит от имеющегося опыта, инженерного понимания структуры и работы системы [13]. Несовременное разбиение будет приводить к значительным погрешностям расчета, если даже все остальные этапы метода выполнены с достаточной точностью.

Использование слишком мелких элементов, хотя и повышает точность, но приводит к увеличению общей трудоемкости расчета. Об этом следует всегда помнить, хотя современная компьютерная техника позволяет решать системы больших порядков достаточно быстро и точно. В областях системы, где ожидается резкое изменение параметров напряженно-деформированного состояния, следует применять более мелкую сетку конечных элементов. Там же, где ожидаемый результат должен изменяться по области сравнительно слабо, можно использовать при дискретизации более крупные конечные элементы.

Выбор типа и формы конечных элементов, а также числа их узловых точек зависит от характера рассматриваемой задачи и требуемой точности решения. Так, в расчетах стержневых конструкций и сооружений они разбиваются на одномерные конечные элементы, являющиеся по существу обычными стержнями, которые соединяются между собой по концам в узлах. При этом, если рассматривать, например, плоскую ферму с шарнирным соединением стержней в узлах (рис. 10.3) при действии узловых нагрузок, то за конечные элементы могут быть приняты стержни такой фермы (рис. 10.6, а), которые будут работать только на растяжение-сжатие, а каждый узел дискретной модели будет иметь по два независимых линейных перемещения (на рис. 10.3 для одного из узлов обозначены пунктирными стрелками), которые и принимаются за неизвестные метода конечных элементов; при этом дискретная модель будет соответствовать реальной конструкции.

Для узлов пространственных ферм будем иметь три перемещения; при этом конечный элемент здесь будет также работать также только на растяжение-сжатие (см. рис. 10.6, б).

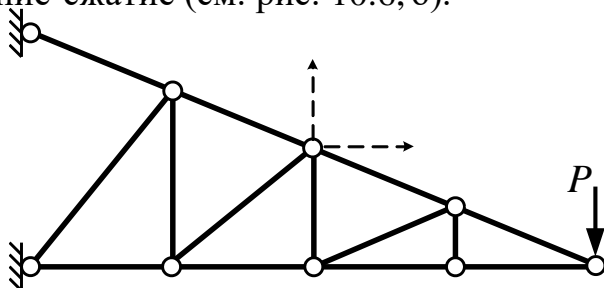


Рисунок 10.3

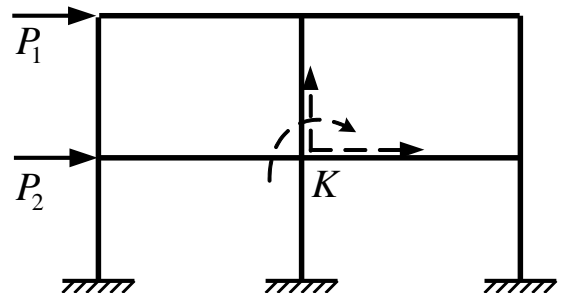


Рисунок 10.4

Если стержни фермы на рис. 10.3 будут соединены между собой в узлах жестко, также как, например, в рамах на рис. 10.2, а или на рис. 10.4, то общий вид дискретной модели в целом также остается прежним, но характер взаимо-

действия между стержнями (конечными элементами) в узловых точках усложняется – в узлах дополнительно в качестве неизвестных появляются углы поворота узлов (см. узел  $K$  на рис. 10.4); конечные элементы для таких систем имеют вид, представленный на рис. 10.6, в, и в них наряду с продольными усилиями появляются изгибающие моменты и поперечные силы.

В каждом из узлов пространственной стержневой системы (см., например, рис. 10.5) будет шесть неизвестных перемещений – три линейных перемещения узлов и три угла поворота их относительно осей  $x, y, z$  (для одного из узлов обозначены пунктирными стрелками). Общее число неизвестных возрастает. Конечный элемент пространственной стержневой системы показан на рис. 10.6, г, и в его сечениях будут возникать продольные силы, изгибающие моменты, крутящие моменты и поперечные силы в двух плоскостях  $x'z'$  и  $y'z'$ .

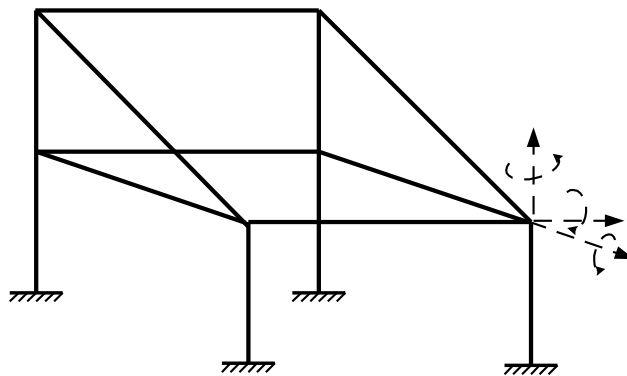


Рисунок 10.5

При решении плоских задач теории упругости (плоское напряженное состояние) разбиение области производится обычно на плоские четырехугольные либо треугольные конечные элементы; в каждом из узлов дискретной модели и конечных элементов здесь рассматривается обычно по два линейных перемещения (рис. 10.2, б, 10.6, д и 10.6, е).

При решении задач изгиба пластин принимаются тонкие плоские прямоугольные или треугольные конечные элементы (рис. 10.6, ж), а для оболочек – оболочечные конечные элементы (рис. 10.6, з). Для трехмерных массивных тел в качестве конечных элементов могут приниматься пирамиды, тетраэдры, прямоугольные параллелепипеды и т. д. (см., например, рис. 10.6, и, к). Число неизвестных перемещений в узлах дискретных моделей таких систем зависит от характера решаемых задач.

При замене рассматриваемой конструкции, сооружения совокупностью дискретных элементов необходимо стараться обеспечить как можно большую идентичность в работе и поведении конструкции и ее дискретной модели. Для некоторых конструкций можно подобрать такую дискретную модель, которая будет точно описывать (естественно, в рамках принятых гипотез и предположений) поведение исходной конструкции. Это характерно для конструкций, которые по своей структуре состоят из отдельных элементов с дискретным соединением их между собой. И в первую очередь это, конечно, относится к стержневым системам, как плоским, так и пространственным.

Если же в реальной конструкции вдоль границ конечных элементов имеются непрерывные связи, а при построении дискретной модели мы принимаем соединение этих элементов друг с другом только в узлах, то дискретная модель

будет только приближенно отражать поведение исходной конструкции. Степень соответствия (или адекватность) расчетной модели и самой конструкции при этом зависит от многих факторов. Достижение точного результата в таких

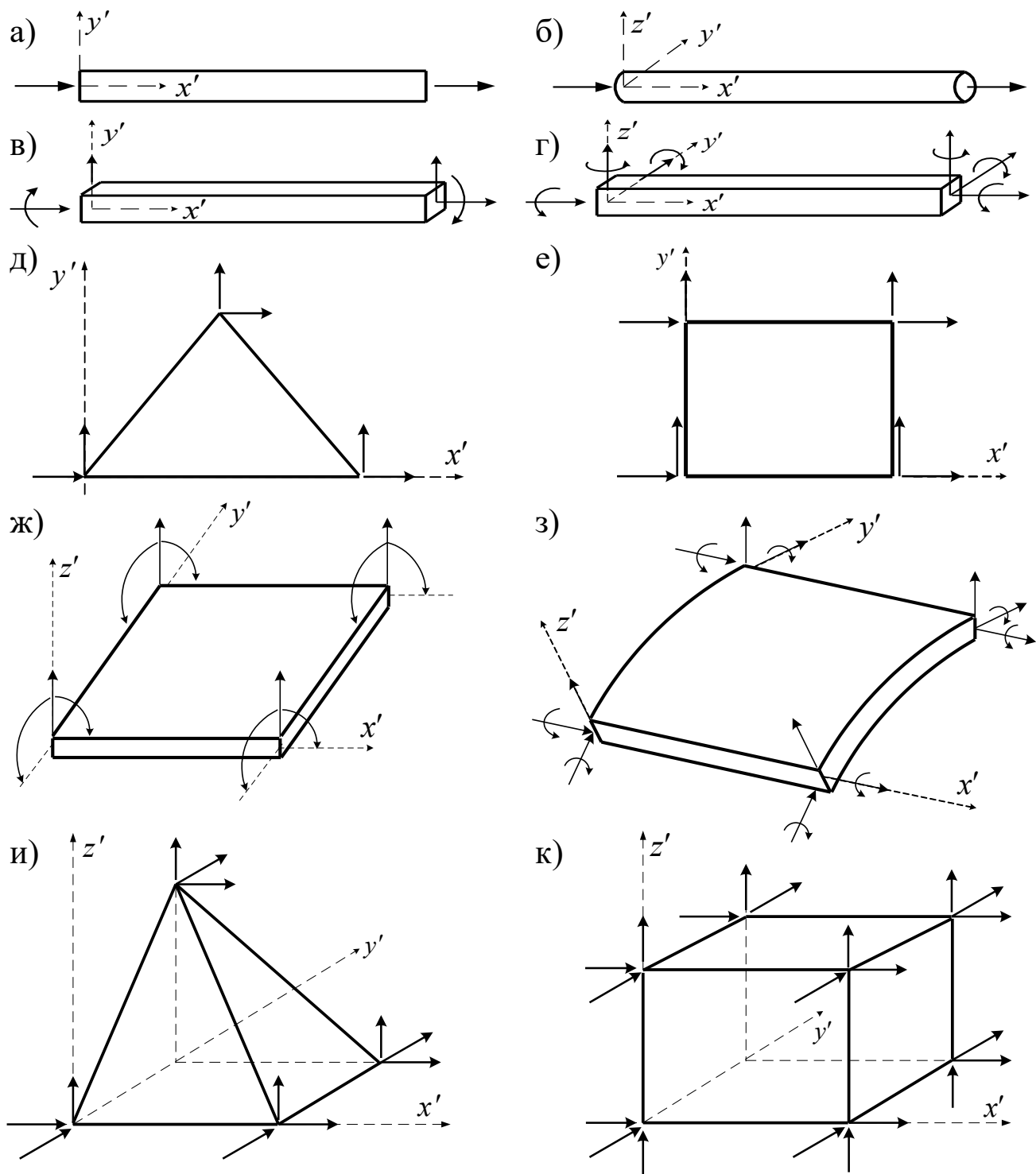


Рисунок 10.6. Основные виды конечных элементов:

а, б) ферменные плоский и пространственный; в, г) стержневые плоский и пространственный; д, е) плосконапряженные треугольный и прямоугольный; ж) изгибаемый пластинчатый; з) тонкостенный оболочечный; и, к) сплошные трехмерные.

случаях не просто, и чаще всего речь идет о максимально возможном приближении к точному результату. Для таких задач рассматриваются и решаются вопросы сходимости решений, ищутся пути повышения этой сходимости [8, 9].

#### 10.4. Аппроксимация перемещений

Одной из наиболее ответственных и важных операций метода конечных элементов является построение интерполирующих функций для отображения зависимости перемещений внутри области конечного элемента через величины узловых перемещений [8, 9, 13]. Необходимо выбрать (найти) такие аппроксимирующие функции перемещений, на основе которых при учете граничных условий можно получить выражения для перемещений, как можно более точно описывающие напряженно-деформированное состояние конечного элемента.

Аппроксимирующими функциями перемещений следует задаваться так, чтобы:

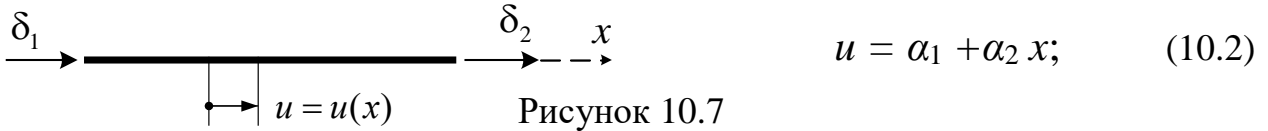
- а) удовлетворялись граничные условия для конечных элементов;
- б) число неизвестных констант равнялось числу узловых перемещений для конечных элементов;
- в) изменение перемещений и усилий внутри элемента было максимально близким к действительному;
- г) не было разрывов перемещений и усилий на границах между конечными элементами, или, по крайней мере, эти разрывы были как можно меньшими.

Удовлетворение граничных условий предполагает, что при подстановке в аппроксимирующие функции *координат границ элементов* перемещения будут отвечать тем связям, которые имеются на концах элементов, то есть по направлениям опорных связей соответствующие перемещения будут равны нулю, а при отсутствии связей перемещения будут, а нулю будут равняться изгибающий момент, поперечная и продольная силы (при отсутствии нагрузок), и т. п.

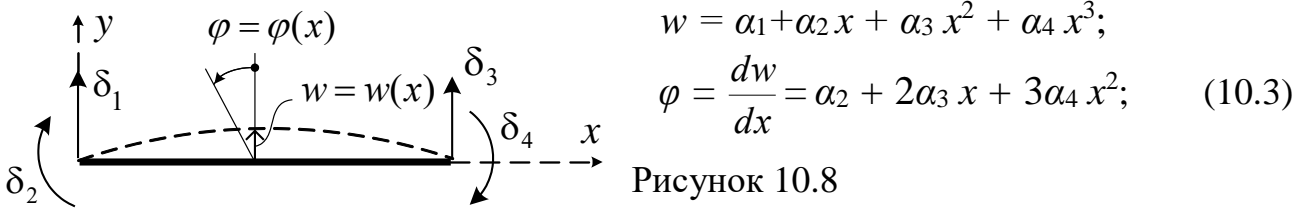
Условия неразрывности легко выполняются в случае одномерных тел (стержни, балки), для которых границами, разделяющими конечные элементы, являются только узлы (а точнее – проходящие через них плоские поперечные сечения). В случаях двухмерных и трехмерных тел, когда границами разделения элементов являются линии, плоскости или поверхности, кинематические граничные условия сопряжения элементов в зонах между точками, в которых устанавливаются узлы соединения КЭ между собой, совпадают не всегда. Для повышения точности иногда узлы соединения КЭ устанавливают не только в узловых точках элементов, но и внутри граней.

Ниже приведены аппроксимирующие функции перемещений внутри конечных элементов через перемещения принятых для них узловых точек (узлов)  $\delta_i$  для ряда наиболее распространенных конечных элементов, которые широко используются для решения упругих задач строительной механики и теории упругости (оси местной системы координат и перемещения в местной системе координат здесь представлены без штрихов):

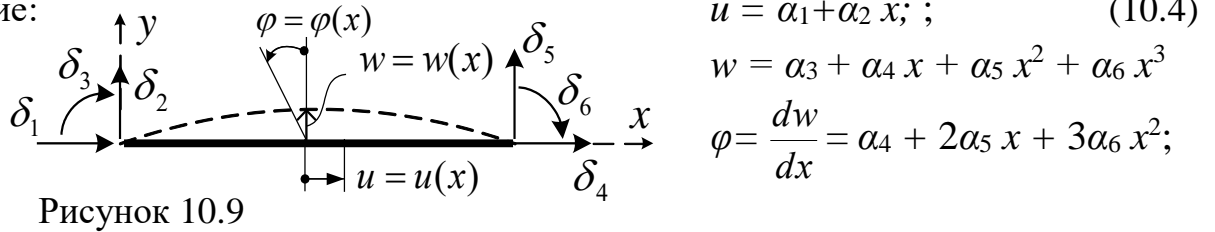
1. Стержневой элемент, работающий на растяжение-сжатие:



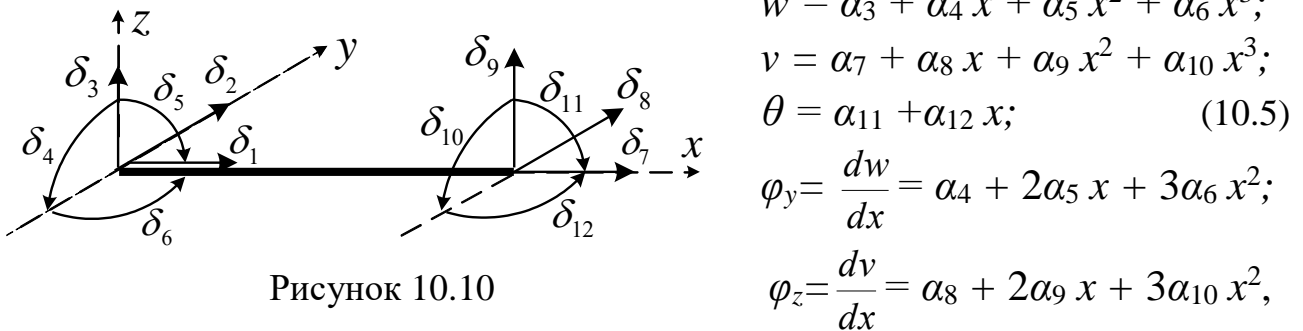
2. Плоский балочный элемент (работающий только на поперечные нагрузки):



3. Плоский стержневой элемент, работающий и на изгиб, и на растяжение-сжатие:



4. Пространственный стержневой элемент, работающий на растяжение-сжатие, изгиб и кручение:



где:  $u = u(x)$  – перемещение сечений стержня вдоль оси  $x$ ;

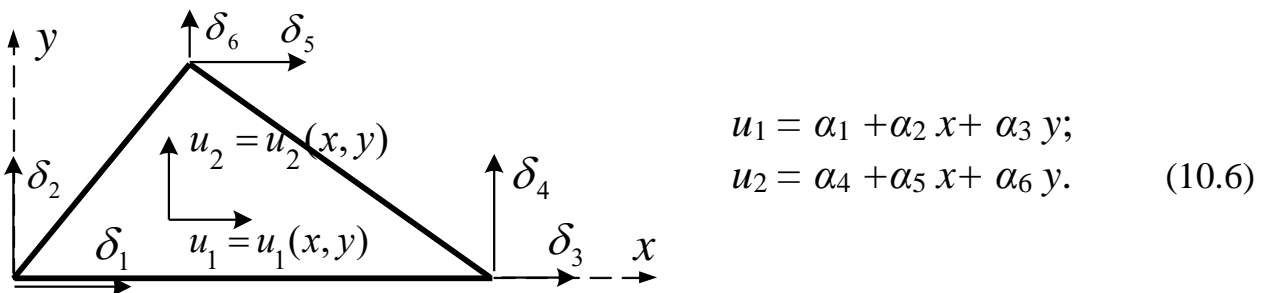
$\theta = \theta(x)$  – угол закручивания стержня относительно оси  $x$ ;

$w = w(x)$  – прогибы стержня в плоскости  $xz$ ;

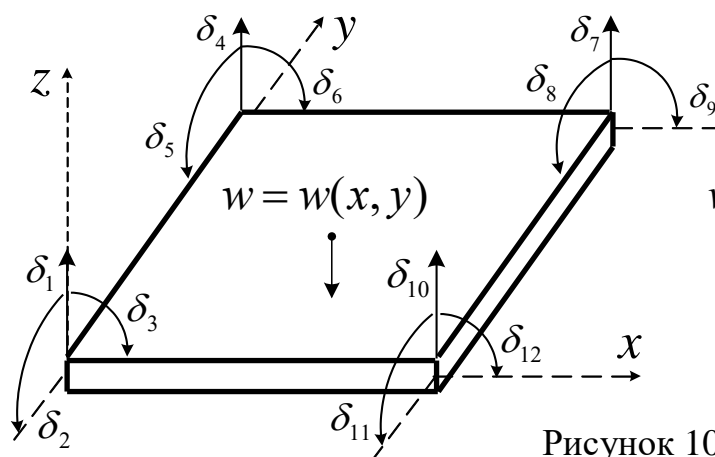
$v = v(x)$  – прогибы стержня в плоскости  $xy$ ;

$\varphi_y(x), \varphi_z(x)$  – повороты сечений стержня при изгибе относительно осей  $y$  и  $z$ .

5. Плоский треугольный элемент, работающий на растяжение-сжатие:



## 6. Прямоугольный элемент изгибаемой пластины:



$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3y + \alpha_{12} xy^3. \quad (10.7)$$

Рисунок 10.12

### 10.5. Расчетная дискретная модель плоской стержневой системы

Для стержневых систем разбивку конструкции на конечные элементы при переходе к расчетной дискретной модели осуществляют так, чтобы (рис. 10.13):

- конечные элементы были как можно более простыми и однотипными – обычно это прямолинейный стержень конечной длины;
- жесткостные параметры в пределах длины каждого элемента оставались постоянными;
- внешние сосредоточенные нагрузки (силы и моменты) действовали только в узлах соединения конечных элементов;
- распределенные нагрузки действовали по всей длине рассматриваемого КЭ.

Если на стержне жесткость или интенсивность распределенной нагрузки имеют переменный по его длине характер, то этот стержень разбивают на несколько участков (КЭ), на каждом из которых жесткость стержня может быть принята постоянной, а интенсивность нагрузки – распределенной равномерно либо по трапецеидальному закону. При достаточном количестве участков такой стержень можно хорошо аппроксимировать системой подобных КЭ.

Внешние нагрузки (сосредоточенные и распределенные) на расчетной дискретной модели должны быть представлены общей системы координат  $x, y$ .

Конечные элементы, одинаковые или разные по форме и размерам, связываются между собой в точках, расположенных на границах КЭ и называемых узловыми точками (узлами). За узлы дискретной расчетной стержневой модели в соответствии с выше изложенным принимаются точки излома и соединения (разветвления) стержневых систем, точки приложения сосредоточенных внешних воздействий (сил, моментов), точки начала и конца внешних распределенных нагрузок, точки изменения жесткостных характеристик стержней.

Если система содержит криволинейные стержни, то они заменяются ломаными стержнями, то есть набором прямолинейных стержневых конечных элементов, соединенных последовательно друг с другом (см. рис. 10.13,б). Число заменяющих прямолинейных КЭ принимается таким, чтобы криволинейный

Если в системе имеются статически определимые части, внутренние силы в сечениях которых определяются методами расчета статически определимых систем, то при переходе к расчетной дискретной модели системы эти части целесообразно отбросить, заменив их действие на остальную систему соответствующими усилиями (см. рис. 10.13,б), которые по отношению к ней далее будут выступать в качестве внешних нагрузок.

В расчетах плоских стержневых систем методом конечных элементов можно выделить **четыре основных типа стержневых конечных элементов**,

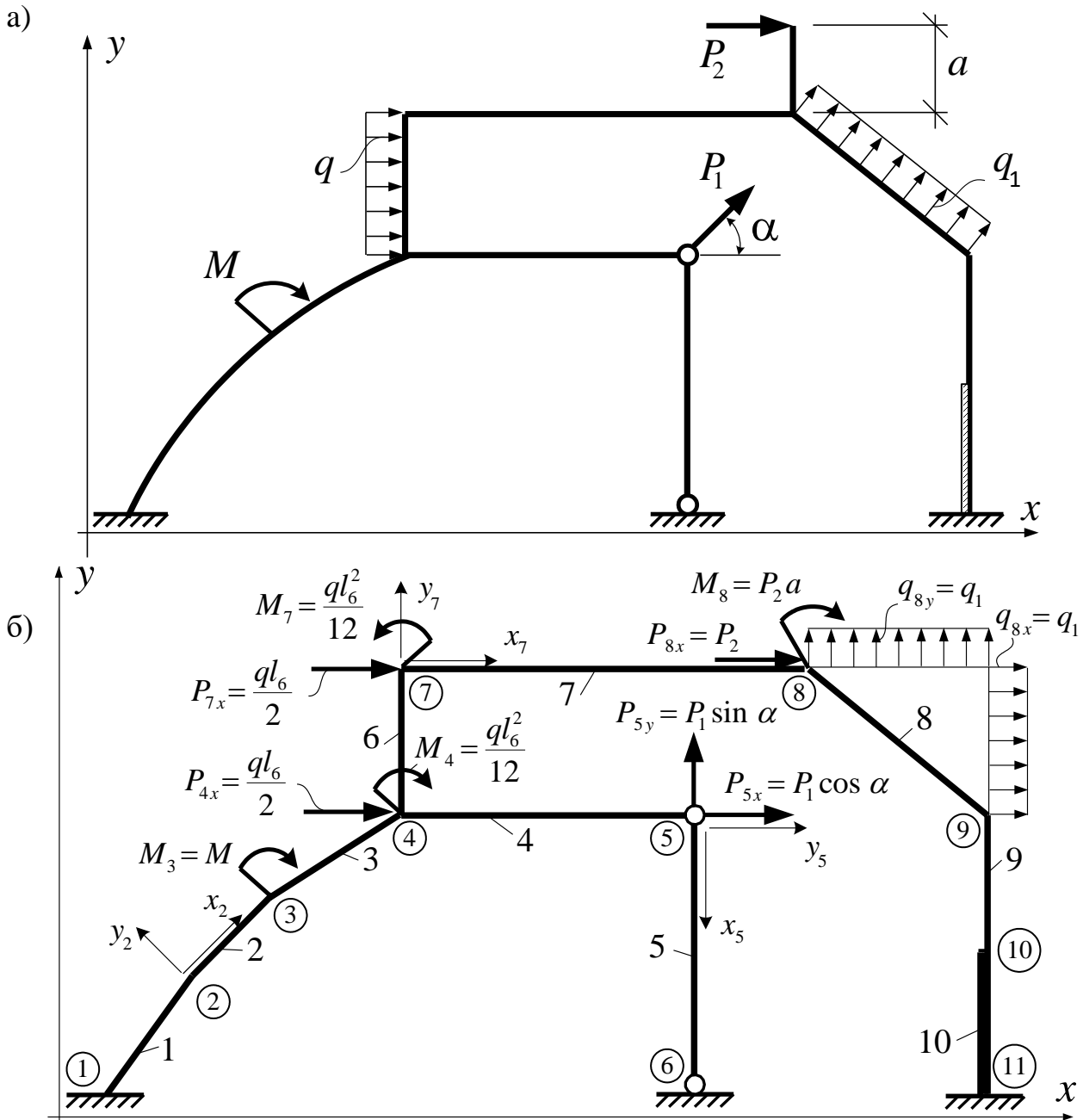


Рисунок 10.13. Расчетная схема рамы (а) и ее дискретная модель (б)

Обозначено: ①, ②, ..., ⑪ – номера узлов (число узлов –  $n = 11$ );  
 1, 2, ..., 10 – номера стержней (конечных элементов) (число КЭ = 10).  
 стержень аппроксимировался с достаточной степенью точности.

отличающихся друг от друга способами присоединения их концов к узловым точкам, то есть условиями закрепления концов (рис. 10.14).



Рисунок 10.14

В МКЭ в перемещениях, как уже указывалось, за неизвестные принимаются перемещения узлов, в которых соединяются конечные элементы в соответствии с расчетной моделью. Решение задачи МКЭ состоит в определении перемещений этих узлов, которые будут определять как соответствующие им реакции узлов, так и внутренние силы в конечных элементах.

### 10.6. Разрешающие уравнения МКЭ

В каждом ( $i$ ) узле расчетной системы должно соблюдаться равновесие всех действующих в нем сил (рис. 10.15): внешних нагрузок  $P_{ix}$ ,  $P_{iy}$ ,  $M_i$ , реакций опорных связей  $R_{ix}$ ,  $R_{iy}$ ,  $M_{Ri}$  и реакций узла на все примыкающие к нему стержни  $r_{ix}$ ,  $r_{iy}$ ,  $M_{ri}$ , которые определяются как суммы реакций узла на действие всех стержней, примыкающих к узлу.

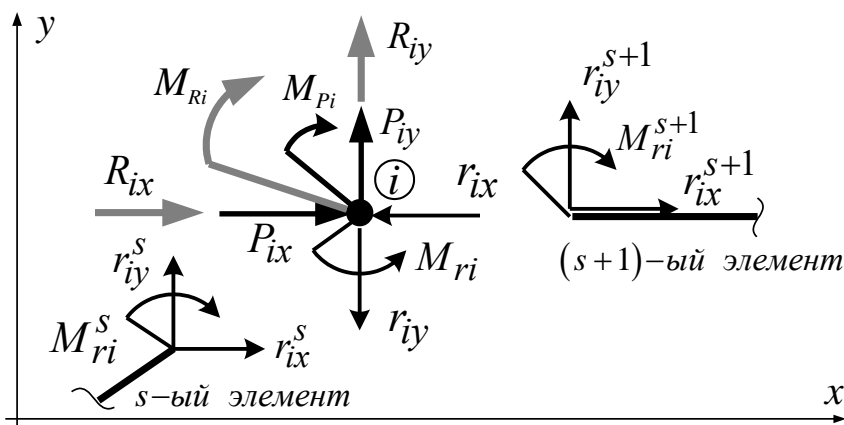


Рисунок 10.15. Силы, действующие в узле, и их положительные направления

Уравнения равновесия всех сил, действующих в узлах, имеют вид:

$$\begin{cases} -r_{ix} + P_{ix} + R_{ix} = 0; \\ -r_{iy} + P_{iy} + R_{iy} = 0; \\ -M_{ri} + M_{Pi} + M_{Ri} = 0, \end{cases} \quad \text{или в матричной форме: } -\{r_i\} + \{P_i\} + \{R_i\} = 0.$$

Для расчетной модели системы из  $n$  узлов, будем иметь систему уравнений в матричной форме в виде

$$-\{r\} + \{P\} + \{R\} = 0, \quad (10.8)$$

где:  $\{r\}$  – вектор компонентов суммарных реакций узлов системы на все при-



мыкающие к ним стержни;  $\{P\}$  – вектор действующих в узлах системы внешних сил;  $\{R\}$  – вектор действующих в узлах опорных реакций (если в узле нет опорных связей, то соответствующие величины будут нулевыми). В развернутой форме матрицы в (10.8) имеют  $\bar{n}$  элементов, равное общему числу сил во всех узлах, которое для стержневых систем может равняться  $3n$  для рам с жесткими узлами и  $2n$  для балок и ферм. Вид, например, вектора внешних нагрузок  $\{P\}$  для рамных систем показан справа.

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_1 \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_2 \\ \dots \\ \dots \\ P_{nx} \\ P_{ny} \\ M_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ P_n \end{Bmatrix}.$$

Неизвестными в методе конечных элементов в форме метода перемещений являются линейные и угловые перемещения узлов, знание которых, как и в классическом методе перемещений, дает нам возможность определить усилия в системе, и которые представляются в виде вектора перемещений узлов системы  $\{\Delta\}$  (см. выражение ниже справа).

Для линейно-деформируемых систем между усилиями и перемещениями существует линейная зависимость, которая в матричной форме представляется выражением

$$\{r\} = [K] \cdot \{\Delta\}, \quad (10.9)$$

где  $[K]$  – матрица жесткости системы вида:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1\bar{n}} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2\bar{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{\bar{n}1} & k_{\bar{n}2} & k_{\bar{n}3} & \dots & k_{\bar{n}\bar{n}} \end{bmatrix}. \quad (10.10)$$

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \varphi_1 \\ \dots \\ \dots \\ \Delta_{nx} \\ \Delta_{ny} \\ \varphi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \Delta_n \end{Bmatrix}.$$

Элемент матрицы жесткости  $k_{mj}$  представляет собой реакцию в  $m$ -ом направлении ( $r_m$ ) от смещения узла в  $j$ -ом направлении на единичную величину –  $\Delta_j = 1$ . Вследствие неразрывности деформаций в узлах, описывающейся условиями совместности, перемещения узлов будут равняться перемещениям концов стержней, примыкающих к рассматриваемым узлам –  $\{\Delta_i\} = \{\delta_{si}\}$ . Смещение же узла в любом из направлений ( $m$ ) будет вызывать деформации всех примыкающих к этому узлу ( $i_m$ ) стержней, и, следовательно, величина возникающей в этом узле реакции должна включать реакции от всех этих стержней:

$$k_{mj} = \sum_{s \in i_m} r_{mj}^s. \quad (10.11)$$

Величины  $k_{mj}$  и  $r_{mj}^s$  здесь определяются в общей системе координат.

С учетом (10.9) разрешающие уравнения МКЭ (10.8) принимают вид:

$$-[K] \cdot \{\Delta\} + \{P\} + \{R\} = 0. \quad (10.12)$$

Система уравнений (10.12) содержит два типа уравнений. Одни из них

представляют собой сумму проекций сил в узлах на оси (или сумму моментов относительно осей), по направлениям которых узлы могут перемещаться (нет опорных связей). Эти перемещения и являются неизвестными МКЭ. Другая часть уравнений представляет сумму проекций сил в узлах на оси (или сумму моментов относительно осей), по направлениям которых в узлах имеются опорные связи, и соответственно перемещения известны – равны нулю.

Обе группы уравнений получаются независимыми друг от друга. Для определения неизвестных перемещений узлов достаточно решения первой группы уравнений. Вторая их часть позволяет определить опорные реакции внешних связей, величины которых можно определить и позже, например, после построения окончательных эпюр усилий в системе.

Разрешающие уравнения метода конечных элементов (10.12) с учетом сказанного можно записать в виде

$$-[K^*] \cdot \{\Delta^*\} + \{P^*\} = 0, \quad (10.13)$$

учитывая, что равенство нулю отдельных компонентов перемещений опорных узлов эквивалентно вычеркиванию строк и столбцов системы уравнений, соот-

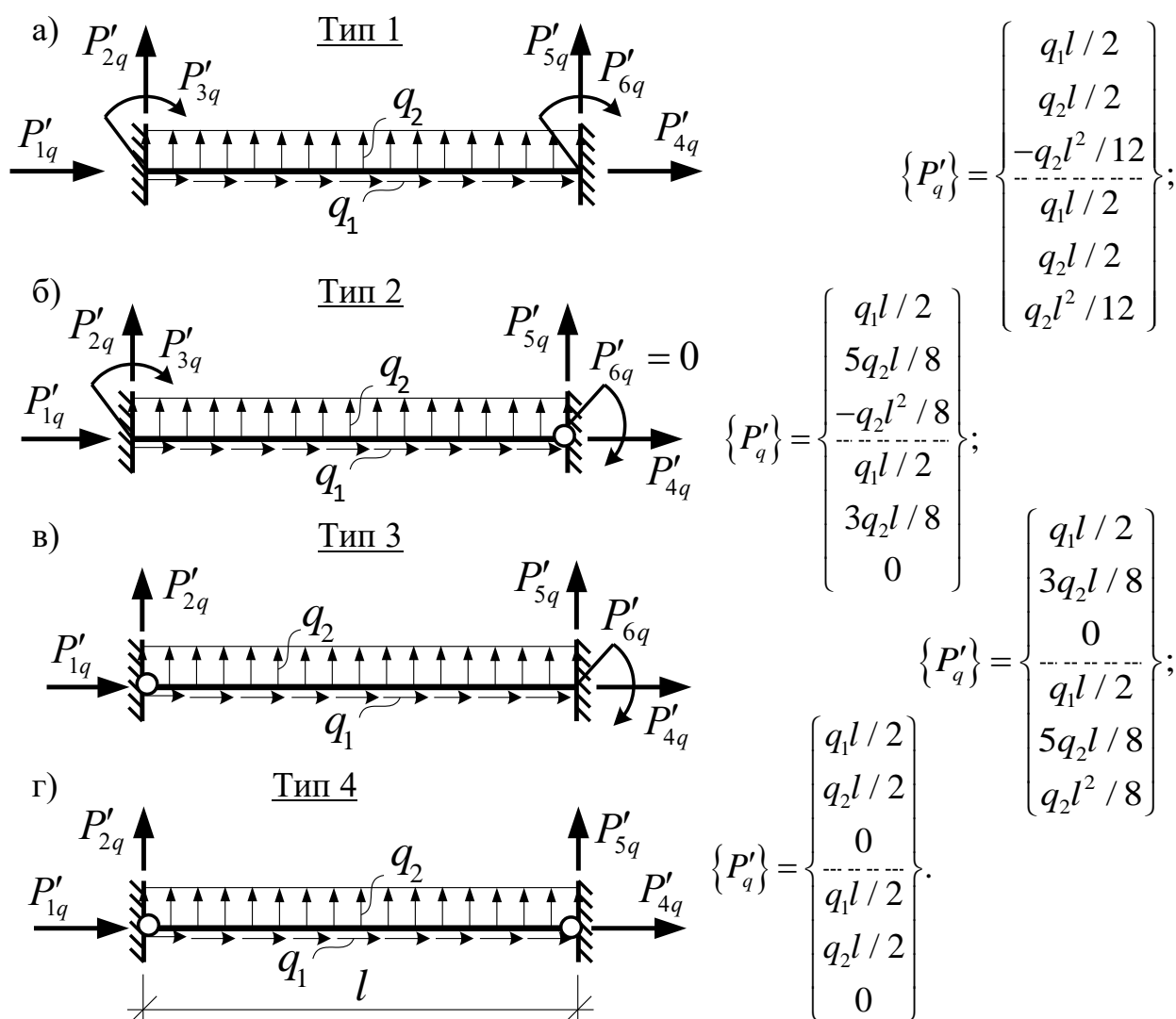


Рисунок 10.16. Преобразование распределенных нагрузок к узловым силам

ветствующих нулевым перемещениям; при этом опускается соответственно и матрица опорных реакций  $\{R\}$ .

Вектор внешних нагрузок  $\{P\}$  записывается в общей системе координат и в каждом ( $i$ -ом) узле представляет собой сумму внешних сосредоточенных сил  $\{\bar{P}_i\}$  и узловых сил  $\{P_{iq}\}$  от равномерно распределенных нагрузок  $q$ , действующих на примыкающие к узлу стержни (если эти нагрузки, конечно, есть):

$$\{P\} = \{\bar{P}\} + \{P_q\}. \quad (10.14)$$

Величины узловых сил от действия равномерно распределенных нагрузок в местной системе координат можно получить, воспользовавшись схемами, представленными на рис. 10.16. Значения узловых нагрузок здесь равны с обратным знаком реакциям для рассматриваемых типов конечных элементов.

### 10.7. Матрицы жесткости КЭ и дискретной модели системы

Наличие связей между конечными элементами в системе дискретной модели сооружения вызывает в узловых точках усилия взаимодействия, которых для плоского стержневого элемента (соответственно перемещениям узлов) будет шесть – по три в начальном и конечном узлах стержня (рис. 10.17). Каждый конечный элемент оказывается загруженным этими усилиями, которые по отношению к нему могут рассматриваться как внешние нагрузки. Между



Рисунок 10.17

усилиями и перемещениями КЭ для упруго деформированных систем по аналогии с (10.9) существует зависимость

$$\{r_s\} = [K_s] \cdot \{\delta_s\}, \quad (10.15)$$

где матрица  $[K_s]$  выражается через упругие и геометрические параметры стержня и называется *матрицей жесткости* конечного элемента;  $\{r_s\}$ ,  $\{\delta_s\}$  – векторы соответственно усилий и перемещений по концам стержневого КЭ.

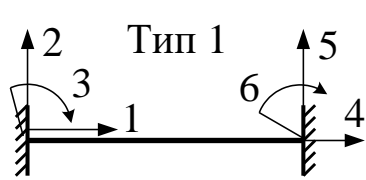
Вид матриц жесткости стержневых конечных элементов зависит от их типа (рис. 10.14) и для КЭ 1-го типа в местной системе координат имеет вид (10.16), где каждый из коэффициентов  $r_{ik}$  по физическому смыслу представляет собой реакцию узла (усилие на конце стержня) в  $i$ -ом направлении от единичного перемещения соответствующего узла (конца стержня) в  $k$ -ом направлении.

Матрица жесткости конечного ( $s$ -го) элемента, начало которого находится в узле  $i$ , а конец – в узле  $k$ , имеет следующую структуру

$$[K'_s] = \begin{bmatrix} A_{ii}^s & \vdots & A_{ik}^s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{ki}^s & \vdots & A_{kk}^s \end{bmatrix}, \quad (10.16)$$

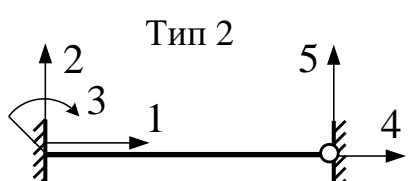
где  $A_{ii}^s$  – блок реакций на  $i$ -том конце элемента (узловых усилий в соответствующих связях, соединяющих этот конец элемента с узлом  $i$ ) от перемещений

этого же ( $i$ ) конца элемента (и соответственно узла  $i$ );  $A_{kk}^S$  – аналогично, только применительно к концу  $k$  элемента (и к узлу  $k$ );  $A_{ik}^S$  – блок реакций (узловых усилий) на  $i$ -том конце конечного элемента (и соответственно в  $i$ -том узле) от перемещений  $k$ -того его конца ( $k$ -того узла);  $A_{ki}^S$  – аналогично  $A_{ik}^S$ , если поменять местами  $i$  и  $k$ . Таким образом, блок  $A_{ii}^S$  описывает связь реакций и перемещений на  $i$ -ом конце стержня (примыкающем к  $i$ -му узлу), блок  $A_{kk}^S$  – такую же связь на  $k$ -ом конце стержня (примыкающем к  $k$ -му узлу), а блоки  $A_{ik}^S$ ,  $A_{ki}^S$  связывают реакции и перемещения противоположных концов КЭ.



$$[K'_s] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}, \quad (10.17)$$

Матрицы жесткости стержневых конечных элементов 2-го и 3-го типа в местной системе координат имеют вид (10.17), (10.18).



$$[K'_s] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l^3} & -\frac{3EJ}{l^2} & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l} & 0 & \frac{3EJ}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & \frac{3EJ}{l^2} & 0 & \frac{3EJ}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (10.18)$$

$$[K'] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & -\frac{3EJ}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EJ}{l^3} & \frac{3EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l} \end{bmatrix}; \quad (10.19)$$

Для получения разрешающей системы уравнений формирование матрицы жесткости  $[K]$  расчетной модели необходимо выполнять в глобальной (общей) системе координат, для чего нужно уметь преобразовывать матрицы жесткости отдельных КЭ из местных систем координат в глобальную. Выполняется это с помощью матрицы преобразования координат, которая для плоских стержневых систем имеет вид

$$[T_\alpha] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (10.20)$$

с использованием зависимости

$$[K] = [T_\alpha]^T \cdot [K'] \cdot [T_\alpha]. \quad (10.21)$$

Матрицы жесткости для элементов типов 1, 2 и 3 (рис. 10.14) в общей системе координат, полученные с использованием зависимости (10.21), имеют соответственно вид (10.22), (10.23) и (10.24). Для элемента с шарнирными закреплениями концов (тип 4 – рис. 10.14) матрицу жесткости в общей системе координат несложно получить из любой из представленных матриц жесткости для элементов типов 1, 2 и 3 путем исключения (обнуления) во всех элементах этих матриц слагаемых с  $EJ$ .

Необходимо иметь в виду, что перемещение любого из узлов системы будет вызывать, как уже указывалось, деформации всех, присоединяющихся к этому узлу стержней (КЭ), и, следовательно, при определении реакций в этом узле от его же перемещений необходимо учитывать (суммировать) реакции от









всех стержней, примыкающих к узлу, то есть блоки  $A_{ii}$  (с равными индексами) матрицы  $[K]$  (в отличие от блоков  $A_{ik}$ ) будут представлять собой сумму соответствующих блоков  $A_{ii}^s$  матриц жесткости конечных элементов, примыкающих к  $i$ -тому узлу, а каждый из элементов  $k_{mj}$  блоков  $A_{ii}$  – сумму реакций  $r_{mj}^s$  от этих элементов (10.11). Положение каждого из блоков  $A_{ik}$  в матрице жесткости системы  $[K]$  (10.22) определяется номерами узлов, где номера строк соответствуют номерам узлов, в которых определяются реакции, а номера столбцов – номерам узлов, от перемещений которых определяются реакции. При этом каждый из блоков  $A_{ik}$  отвечает конкретному стержню с началом в узле  $i$  и концом в узле  $k$ . Если такого стержня ( $i-k$ ) нет, то соответствующий блок  $A_{ik}$  будет нулевым, и это будет говорить о том, что перемещение соответствующего  $k$ -го узла не вызывает непосредственно реакции в  $i$ -том узле.

### 10.8. Формирование матрицы жесткости системы

Матрица жесткости отдельного конечного ( $s$ -го) элемента (см. (10.18)÷(10.20), (10.22)÷(10.24)), начало которого находится в узле  $i$ , а конец – в узле  $k$ , имеет следующую структуру

$$[K^s] = [K_s] = \begin{bmatrix} A_{ii}^s & A_{ik}^s \\ A_{ki}^s & A_{kk}^s \end{bmatrix}, \quad (10.25)$$

где  $A_{ii}^s$  – блок реакций на  $i$ -ом конце элемента (узловых усилий в соответствующих связях, соединяющих этот конец элемента с узлом  $i$ ) (рис. 10.17) от перемещений этого же ( $i$ ) конца элемента (и соответственно узла  $i$ );  $A_{kk}^s$  – аналогично, только применительно к концу  $k$  элемента (и к узлу  $k$ );  $A_{ik}^s$  – блок реакций (узловых усилий взаимодействия) на  $i$ -ом конце конечного элемента (и соответственно в  $i$ -ом узле) от перемещений  $k$ -го его конца ( $k$ -го узла);  $A_{ki}^s$  – аналогично  $A_{ik}^s$ , если поменять местами  $i$  и  $k$ .

Таким образом, блок  $A_{ii}^s$  описывает связь реакций и перемещений на  $i$ -том конце стержня (примыкающем к  $i$ -тому узлу), блок  $A_{kk}^s$  – такую же связь на  $k$ -том конце стержня (примыкающем к  $k$ -тому узлу), а блоки  $A_{ik}^s$ ,  $A_{ki}^s$  связывают реакции и перемещения противоположных концов конечного элемента. Размер этих блоков определяется числом независимых перемещений узлов дискретной модели: для общего случая плоских стержневых систем оно равно трем, для ферм и балок (при отсутствии нагрузок вдоль осей балок) – двум.

При этом при рассмотрении общего случая плоских стержневых систем и в матрицах жесткости конечных элементов, которые присоединяются к узлам

шарнирно (типы 2, 3, 4), блоки  $A_{ii}^s$ ,  $A_{ik}^s$ ,  $A_{ki}^s$ ,  $A_{kk}^s$  (2.47), соответствующие шарнирному соединению, целесообразно представлять на основе одного типоразмера  $3 \times 3$ , записывая строки и столбцы, соответствующие отсутствующим перемещениям (углам поворота в шарнирных узлах), равными нулю.

Такое однообразие формы записи позволяет описывать любое присоединение конечных элементов к узлам, в том числе и случаи присоединения КЭ к узлам одновременно как жестко, так и шарнирно (рис. 10.18).

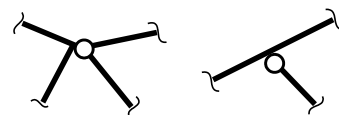


Рисунок 10.18.

Матрицу жесткости системы (10.10) в соответствии с (10.25) также можно структурно разделить на отдельные блоки  $A_{ik}$ , каждый из которых будет описывать реакции в  $i$ -том узле от перемещений  $k$ -того узла рассматриваемой дискретной модели и в соответствии с числом перемещений и реакций в узле в общем случае плоской стержневой системы будет иметь порядок  $3 \times 3$ :

$$[K] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nm} \end{bmatrix}. \quad (10.26)$$

При этом необходимо иметь в виду, что перемещение любого из узлов системы будет вызывать, как уже указывалось, деформации всех, присоединяющихся к этому узлу стержней (КЭ), и, следовательно, при определении реакций в этом узле от его же перемещений необходимо учитывать (суммировать) реакции от всех стержней, примыкающих к узлу, то есть блоки  $A_{ii}$  (с равными обоими индексами) матрицы  $[K]$  (в отличие от блоков  $A_{ik}$  – с разными индексами) будут представлять собой сумму соответствующих блоков  $A_{ii}^s$  матриц жесткости конечных элементов, примыкающих к  $i$ -тому узлу, а каждый из элементов  $k_{mj}$  блоков  $A_{ii}$  – сумму реакций  $r_{mj}^s$  от этих элементов (10.11).

Положение каждого из элементов  $r_{mj}^s$  блоков  $A_{ik}^s$  в общей матрице жесткости  $[K]$  можно легко определить, если ввести единую для всей расчетной дискретной модели нумерацию всех направлений возможных перемещений узлов (и соответственно реакций в узлах). Число этих перемещений будет определять порядок матрицы жесткости системы  $[K]$ . И если теперь пронумеровать все столбцы и строки матрицы  $[K]$ , то положение элементов  $k_{mj}$  (и  $r_{mj}^s$ ) будет определяться значениями их индексов:  $m$  будет соответствовать номеру строки, а  $j$  – номеру столбца, на пересечении которых этот коэффициент должен находиться. В соответствии с указанным процесс формирования матрицы жесткости системы можно представить и графически. На рис. 10.19 – 10.22 приведены

примеры такого представления.

Например, в раме, изображенной на рис. 10.19а, в 3-ем узле, характеризующемся перемещениями в направлениях 7, 8 и 9 (рис. 10.19б), соединяется три стержневых конечных элемента (2, 3 и 4-ый). На схеме матрицы  $[K]$  (рис. 10.20) для дискретной модели рамы (рис. 10.19б) этому отвечает сумма (наложение) блоков  $A_{33}^2, A_{33}^3, A_{33}^4$  матриц жесткости соответственно 2, 3 и 4-го элементов в области пересечения 7, 8 и 9 строк и столбцов.

Блок же, например,  $A_{35}^4$  четвертого элемента (элемента 3–5) находится (рис. 10.20) на пересечении 7, 8, 9 строк, определяющих направление реакций в 3-ем узле, и 13, 14, 15 столбцов, представляющих направления перемещений 5-го узла, вызывающих эти реакции.

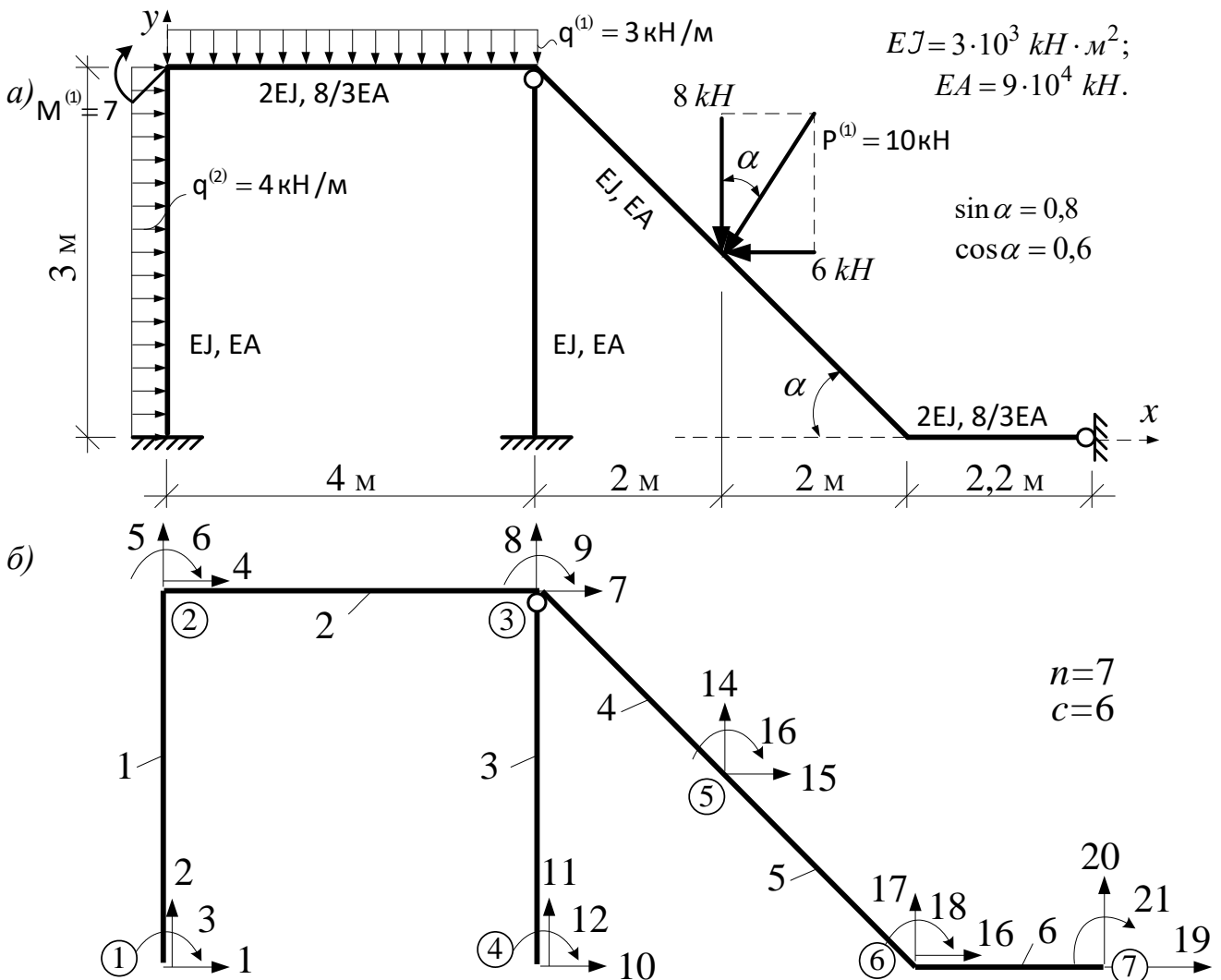
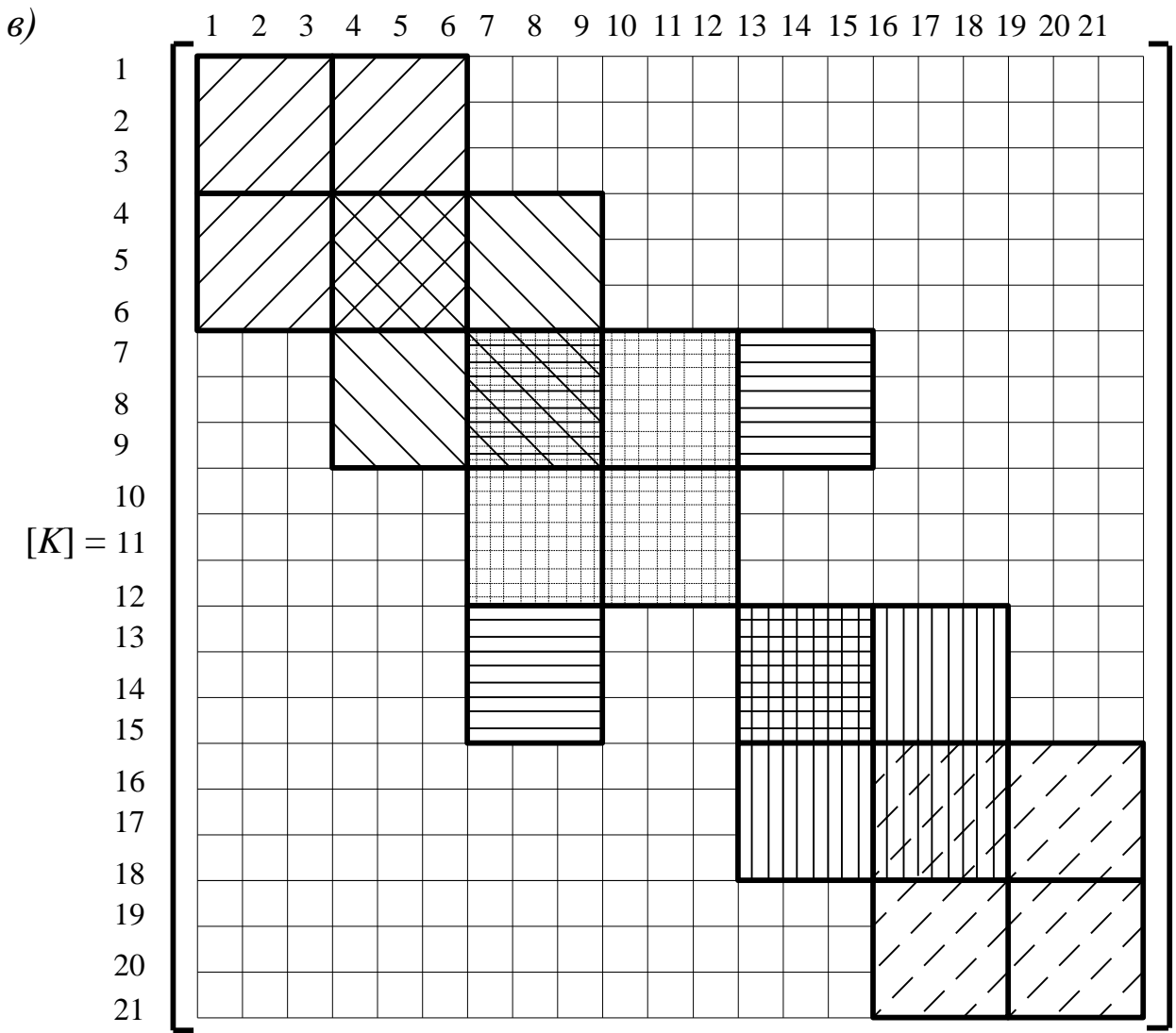


Рисунок 10.19. Схема рамы и ее расчетная дискретная модель

После определения перемещений узлов расчетной модели путем решения системы уравнений (10.13) усилия по концам КЭ могут быть определены с помощью выражения:

$$\{r'_s\} = [K'_s] \cdot [T_{\alpha s}] \cdot \{\Delta_s\} - \{P'_{qs}\}, \quad (10.27)$$



Здесь обозначено:

$[K_1] \rightarrow$  ;  $[K_2] \rightarrow$  ;  $[K_3] \rightarrow$  ;  $[K_4] \rightarrow$  ;  $[K_5] \rightarrow$  ;  $[K_6] \rightarrow$

Рисунок 10.20. Схема матрицы жесткости системы, изображенной на рис. 10.19

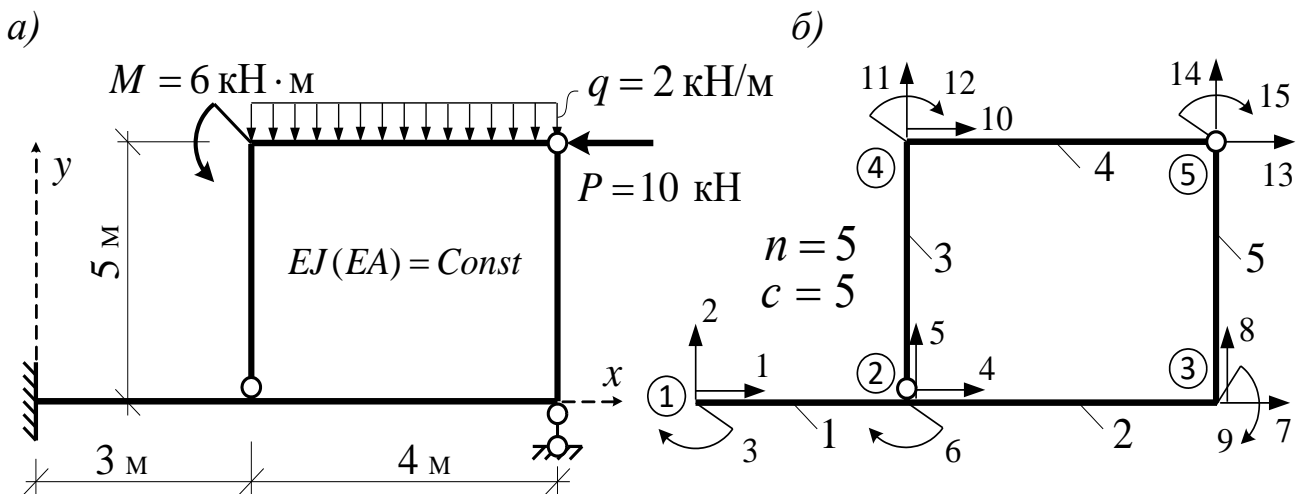


Рисунок 10.21. Схема рамы (а) и ее расчетная дискретная модель (б)

где:  $\{\Delta_s\}$  – перемещения концов КЭ (стержня), равные соответствующим перемещениям узлов, к которым присоединяется рассматриваемый КЭ (стержень);  $\{P'_{qs}\}$  – вектор узловых нагрузок в местной системе координат от действия на стержень распределенной нагрузки  $q_s$ ; если на КЭ не действует распределенная нагрузка, то этой матрицы в выражении (10.27) не будет.

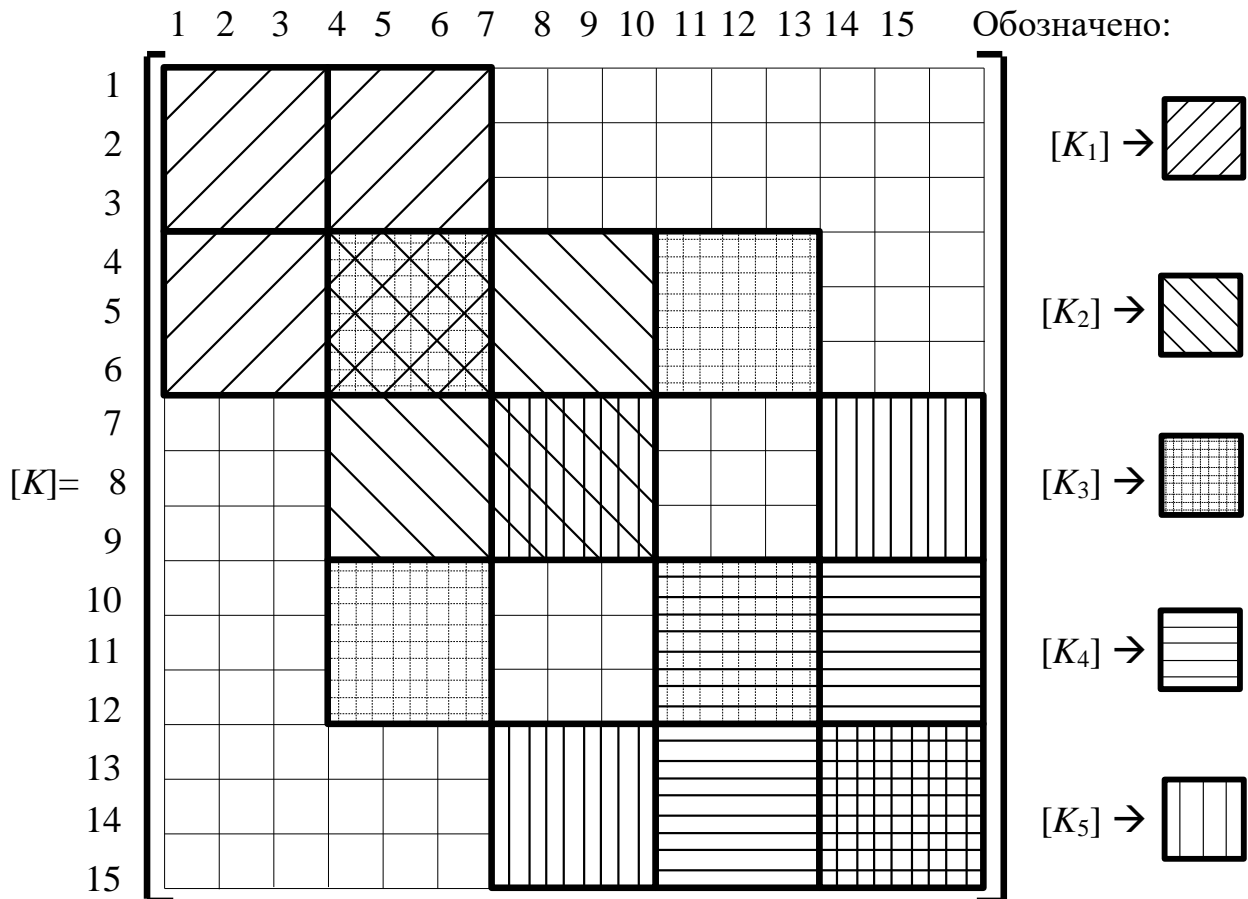


Рисунок 10.22. Схема матрицы жесткости расчетной модели

### 10.9. Порядок расчета

Порядок расчета МКЭ применительно к стержневым системам:

1. Определение расчетной дискретной модели системы (разделение ее на конечные элементы, назначение узлов, определение их общего числа) и описание ее структуры (нумерация узлов и стержней).
2. Выбор общей и местных систем координат и определение координат узлов в общей системе координат.
3. Составление вектора перемещений узлов  $\{\Delta\}$  расчетной дискретной модели системы.
4. Идентификация КЭ (определение их типов, длин  $l_s$ , жесткостей  $EA_s$  и  $EJ_s$ , установление соответствия (связи) между стержнями и узлами системы и определение направляющих синусов и косинусов КЭ ( $\sin \alpha_s$  и  $\cos \alpha_s$ )).

5. Преобразование внешних нагрузок (преобразование пролетных равномерно распределенных нагрузок на стержни к узловым нагрузкам, преобразование сосредоточенных узловых сил из местных систем в общую систему координат, определение суммарных узловых сил в каждом узле дискретной модели).

6. Построение матриц жесткости конечных стержневых элементов  $[K'_s]$  в местных системах координат.

7. Составление матриц преобразования конечных элементов  $[T_{\alpha s}]$ .

8. Получение матриц жесткости элементов  $[K_s]$  в общей системе координат.

9. Формирование матрицы жесткости  $[K]$  всей системы в глобальной системе координат.

10. Получение системы разрешающих уравнений с учетом граничных условий (опорных связей) системы (10.13).

11. Решение системы разрешающих уравнений и определение узловых перемещений  $\{\Delta\}$  расчетной модели.

12. Определение усилий и перемещений в конечных элементах, построение эпюр усилий в системе и определение ее деформированного вида.

### 10.10. Пример расчета

Покажем процедуру метода конечных элементов на примере расчета рамы, представленной на рис. 10.23.

1. Расчетная дискретная модель заданной рамы представлена на рис. 10.24 и состоит из трех стержневых КЭ, соединенных между собой и с основанием с помощью четырех узлов.

2. Общая и местные системы координат показаны на рис. 10.24.

3. Все возможные перемещения узлов дискретной модели показаны на рис. 10.25, при этом для узла 2 опущен угол поворота, в котором вследствие конструктивной особенности узла (шарнир) не может быть поворота. Ряд из представленных перемещений узлов будут равны нулю в связи с наличием в узлах опорных связей:  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_6 = \Delta_9 = \Delta_{10} = \Delta_{11} = 0$ . Неизвестными останутся только четыре перемещения –  $\Delta_4$ ,  $\Delta_5$ ,  $\Delta_7$  и  $\Delta_8$ . Вектор перемещений расчетной дискретной модели показан в (10.28).

4. Идентификация конечных элементов:

1-ый КЭ: тип 2;  $l_1 = 4$  м;  $\alpha_1 = 90^\circ$ ;  $EJ_1 = 1000$  кН·м<sup>2</sup>;  $EA_1 = 10000$  кН;

2-ой КЭ: тип 3;  $l_2 = 5$  м;  $\alpha_2 = 323,13^\circ$ ;  $EJ_2 = 2000$  кН·м<sup>2</sup>;  $EA_2 = 20000$  кН;

3-ий КЭ: тип 1;  $l_3 = 1$  м;  $\alpha_3 = 270^\circ$ ;  $EJ_3 = 1000$  кН·м<sup>2</sup>;  $EA_3 = 10000$  кН.

5. На рассматриваемую раму действует сосредоточенная сила в узле 2 и равномерно распределенная нагрузка на 2-ой КЭ, которую преобразовываем согласно к узловым силам и моменту, после чего эти нагрузки приведем к общей системе координат (эти преобразования показаны на рис. 10.26). В результате матрицы узловых нагрузок в местных системах координат для 1-го и 3-го конечных элементов будут нулевыми, а для 2-го КЭ согласно рис. 10.26 будет

иметь вид, представленный в (10.30). Полная матрица узловых нагрузок в глобальной системе координат будет иметь вид, представленный в (10.28).

6. Матрицы жесткости конечных элементов в местных системах координат вычисляются для 1-го, 2-го и 3-го КЭ согласно (10.18), (10.19) и (10.17) и имеют вид, представленный для 1-го и 2-го КЭ в выражениях (10.29) и (10.30).

7. Матрицы преобразованных координат  $[T_\alpha]$  для конечных элементов получим, если в (2.40) подставим:

- для 1-го КЭ:  $\sin \alpha_1 = \sin 90^\circ = 1; \quad \cos \alpha_1 = 0;$
- для 2-го КЭ:  $\sin \alpha_2 = \sin 323,13^\circ = -0,6; \quad \cos \alpha_2 = 0,8;$
- для 3-го КЭ:  $\sin \alpha_3 = \sin 270^\circ = -1; \quad \cos \alpha_3 = 0.$

8. Матрицы жесткости в общей системе координат вычисляются для 1, 2 и 3 конечных элементов соответственно по выражениям (10.23), (10.24) и (10.22).

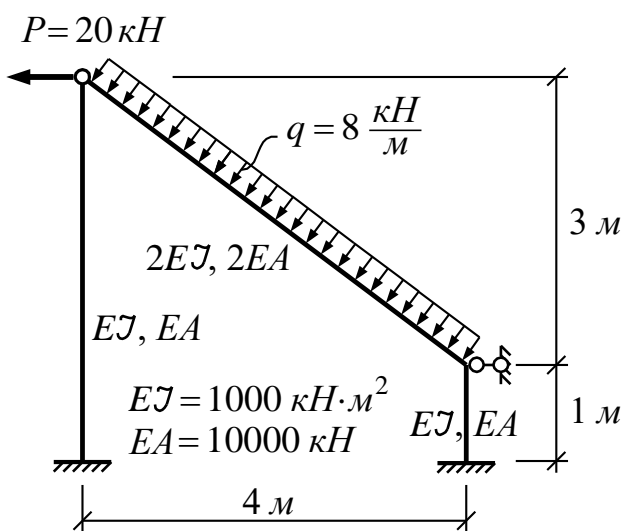


Рисунок 10.23

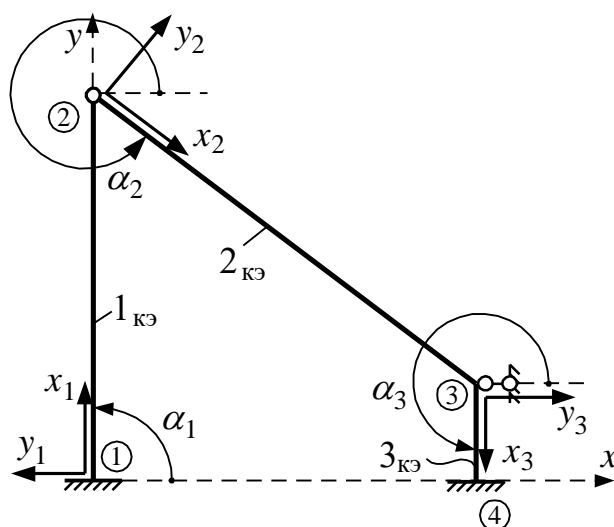


Рисунок 10.24

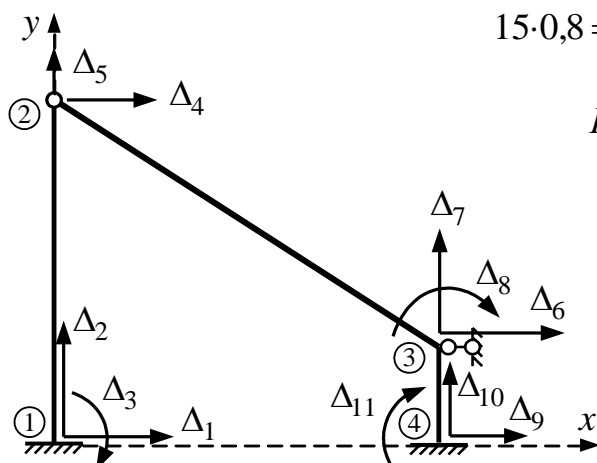


Рисунок 10.25

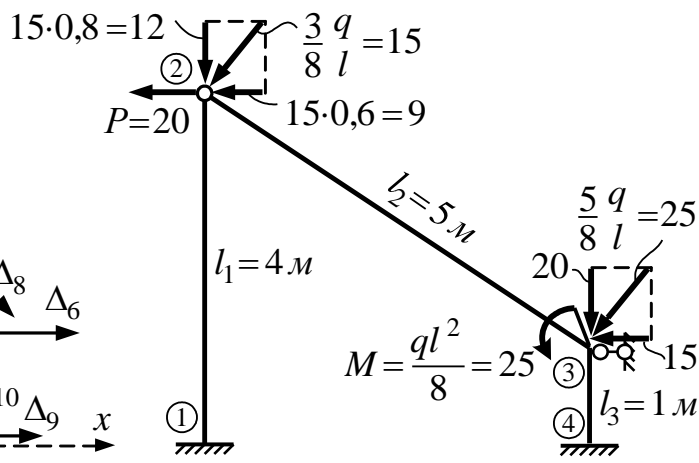


Рисунок 10.26

Учитывая, что в разрешающей системе уравнений вычеркиваются строки и столбцы, соответствующие нулевым перемещениям по направлениям опорных связей, будут вычеркнуты и соответствующие элементы матрицы жесткости, нам нужны только элементы матрицы жесткости, оставшимся после вычерки-

вания, и отвечающие ненулевым перемещениям узлов системы. Эти элементы на структурной схеме матрицы жесткости системы в (10.28) отмечены кружками.

Покажем вычисление ряда элементов матриц жесткости конечных элементов в общей системе координат:

– **для 1-го КЭ (2.45):**

$$r_{44}^1 = \frac{EA_1}{l_1} \cos^2 \alpha_1 + \frac{3EJ_1}{l_1^3} \sin^2 \alpha_1 = \frac{10000}{4} \cos^2 90^\circ + \frac{3 \cdot 1000}{4^3} \sin^2 90^\circ = 46,875;$$

$$r_{45}^1 = r_{54}^1 = \left( \frac{EA_1}{l_1} - \frac{3EJ_1}{l_1^3} \right) \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = 0; \quad r_{55}^1 = \frac{EA_1}{l_1} \sin^2 \alpha_1 + \frac{3EJ_1}{l_1^3} \cos^2 \alpha_1 = 2500;$$

– **для 2-го КЭ (2.46):**

$$r_{44}^2 = \frac{EA_2}{l_2} \cos^2 \alpha_2 + \frac{3EJ_2}{l_2^3} \sin^2 \alpha_2 = \frac{20000}{5} \cos^2 323,13^\circ + \frac{3 \cdot 2000}{5^3} \sin^2 323,13^\circ = 2577,28$$

аналогично получим:

$$r_{45}^2 = r_{54}^2 = -1896,96; \quad r_{55}^2 = 1470,72; \quad r_{47}^2 = r_{74}^2 = 1896,96; \quad r_{48}^2 = r_{84}^2 = -144;$$

$$r_{57}^2 = r_{75}^2 = -1470,72; \quad r_{58}^2 = r_{85}^2 = -192; \quad r_{77}^2 = 1470,72; \quad r_{78}^2 = r_{87}^2 = 192; \quad r_{88}^2 = 1200.$$

– **для 3-го КЭ (2.44):**

$$r_{77}^3 = \frac{EA_3}{l_3} \sin^2 \alpha_3 + \frac{12EJ_3}{l_3^3} \cos^2 \alpha_3 = \frac{10000}{1} \sin^2 270^\circ + \frac{12 \cdot 1000}{1^3} \cos^2 270^\circ = 10000;$$

$$\text{аналогично } r_{78}^3 = r_{87}^3 = 0; \quad r_{88}^3 = 4000.$$

9. Схема полной системы разрешающих уравнений рассматриваемой рамы вида  $[K] \cdot \{\Delta\} = \{P\}$  со структурной схемой матрицы жесткости расчетной дискретной модели имеет вид, представленный в (10.28).

10. После вычеркивания в (10.28) 1, 2, 3, 6, 9, 10, 11 строк и столбцов, соответствующих, исходя из граничных условий, нулевым перемещениям, получим систему четырех уравнений относительно  $\Delta_4, \Delta_5, \Delta_7$  и  $\Delta_8$ , коэффициенты которой в соответствии с предыдущими вычислениями будут равны:

$$k_{44} = r_{44}^1 + r_{44}^2 = 46,875 + 2577,28 = 2624,155;$$

$$k_{45} = r_{45}^1 + r_{45}^2 = 0 + (-1896,96) = -1896,96; \quad k_{47} = r_{47}^2 = 1896,96;$$

$$k_{48} = r_{48}^2 = -144; \quad k_{55} = r_{55}^1 + r_{55}^2 = 2500 + 1470,72 = 3970,72;$$

$$k_{77} = r_{77}^2 + r_{77}^3 = 1470,72 + 10000 = 11470,72; \quad k_{78} = r_{78}^2 = 192;$$

$$k_{88} = r_{88}^2 + r_{88}^3 = 1200 + 4000 = 5200 \quad \text{и т.д.}$$





$$\{r'_2\} = [K'_2] \cdot [T_{\alpha 2}] \cdot \{\Delta_2\} - \{P'_{q2}\} = \begin{bmatrix} 4000 & 0 & -4000 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 0 & -48 & -240 \\ -4000 & 0 & 4000 & 0 & 0 \\ 0 & -48 & 0 & 48 & 240 \\ 0 & -240 & 0 & 240 & 1200 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -21,12 \cdot 10^{-3} \\ -13,347 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0,137 \cdot 10^{-3} \\ -5,89 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ -15 \\ 0 \\ -25 \\ -25 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -35,228 \\ 15,287 \\ 35,228 \\ 24,712 \\ 23,562 \end{Bmatrix} \quad (10.30)$$

Для **3-го элемента** усилие находится аналогично. Схемы действия усилий по концам конечных элементов представлены на рис. 10.27.

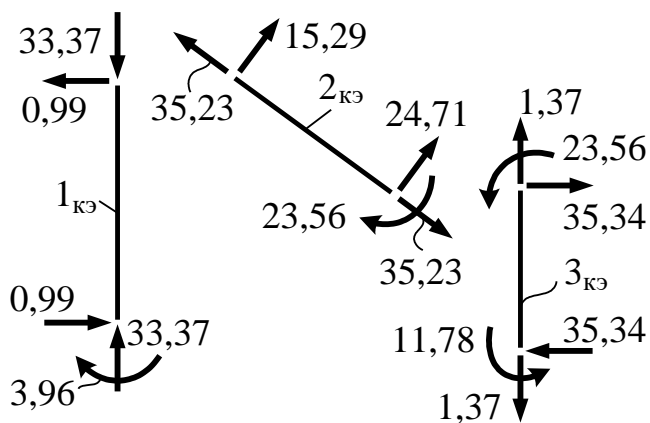


Рисунок 10.27

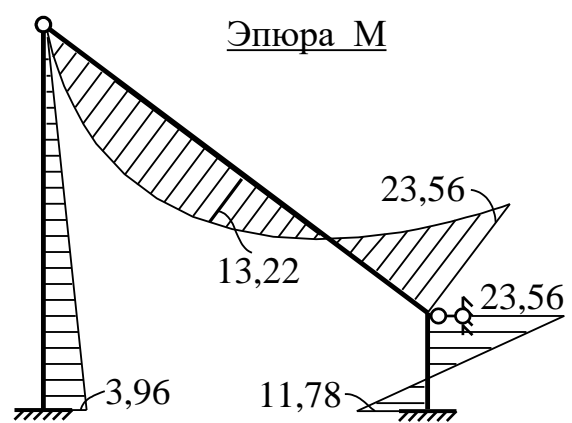


Рисунок 10.28

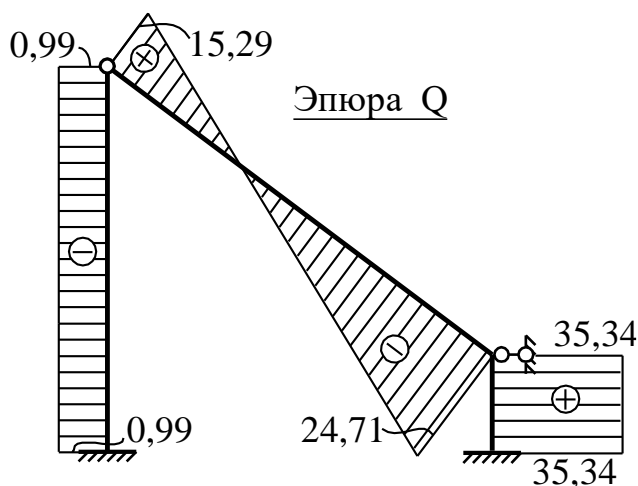


Рисунок 10.29

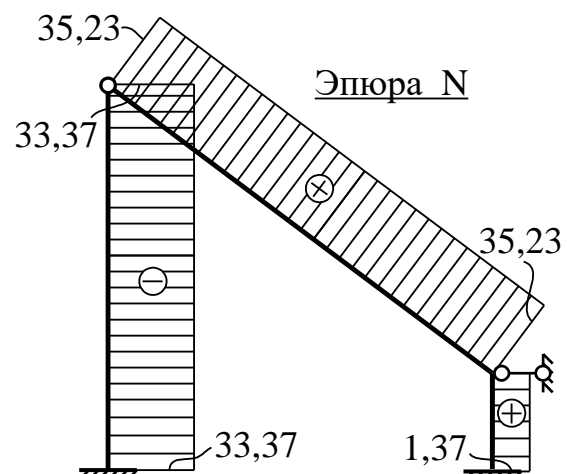


Рисунок 10.30

12. Окончательные эпюры внутренних сил  $M$ ,  $Q$  и  $N$ , построенные согласно вычисленным усилиям по концам КЭ и с учетом известных закономерностей изменений усилий в пределах КЭ, показаны на рис. 10.28–10.30.

## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА**

1. Ильин, В.П. Численные методы решения задач строительной механики / В.П. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников. – Мн. : Выш. школа, 1990. – 349 с.
2. Масленников, А.М. Расчет строительных конструкций численными методами: учебное пособие. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 224 с.
3. Турчак, Л.И. Основы численных методов : учебное пособие. – М. : Наука, 1987. – 320 с.
4. Борисевич, А.А. Строительная механика : учебное пособие / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2007. – 821 с.
5. Боглаев, Ю.П. Вычислительная математика и программирование : учебное пособие. – М. : Высшая школа, 1990. – 544 с.
6. Борисевич, А.А. Общие уравнения строительной механики и оптимальное проектирование конструкций. – Мн. : Дизайн ПРО, 1998. – 144 с.
7. Босаков, С.В. Метод Ритца в примерах и задачах по строительной механике и теории упругости : учебное пособие. – Мн. : БГПА, 2000. – 143 с.
8. Галлагер, Р. Метод конечных элементов: Основы. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
9. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.–554 с.
10. Игнатюк, В.И. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем: учебное пособие. – Брест: БрГТУ, 2004. – 172 с.
11. Караманский, Т.Д. Численные методы строительной механики / Пер с болг. ; под ред. Г.К. Клейна. – М. : Стройиздат, 1981. – 436 с.
12. Матричные алгоритмы в строительной механике стержневых систем : учебное пособие / Д.К. Бендюг и др. – М. : Высшая школа, 1980. – 124 с.
13. Перельмутер, А.В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М. : ДМК Пресс, 2007. – 600 с.
14. Самарский, А.А. Введение в численные методы : учебное пособие. – М. : Наука, 1987. – 288 с.
15. Сеницын, С.Б. Строительная механика в методе конечных элементов стержневых систем : учебное пособие. – М. : Изд-во АСВ, 2002. – 320 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение в численные методы . . . . .	3
1. Решение систем линейных уравнений . . . . .	6
2. Общая система уравнений равновесия и ее использование в расчетах .	11
2.1. Расчет статически определимых ферм . . . . .	11
2.2. Расчет статически определимых многопролетных балок . . . . .	12
2.3. Расчет статически определимых рам . . . . .	13
3. Определение усилий с помощью матриц влияния . . . . .	16
4. Расчет трехшарнирных арок . . . . .	21
5. Аппроксимация функций . . . . .	25
6. Численное интегрирование . . . . .	31
6.1. Общие понятия . . . . .	31
6.2. Интегрирование функции одной переменной . . . . .	32
6.3. Интегрирование произведения двух функций . . . . .	32
6.4. Особенности определения перемещений в арочных системах . . .	35
6.5. Расчет двухтрехшарнирных арок . . . . .	37
7. Матричная форма определения перемещений . . . . .	48
7.1. Расчетные зависимости . . . . .	48
7.2. Пример расчета . . . . .	51
7.3. Возможные упрощения расчета . . . . .	53
8. Численное дифференцирование . . . . .	54
8.1. Общие понятия . . . . .	54
8.2. Метод конечных разностей . . . . .	56
8.3. Вариационно-разностный метод . . . . .	60
9. Нелинейные уравнения и их решение . . . . .	62
9.1. Общие понятия и методы . . . . .	62
9.2. Метод деления отрезков пополам (метод бисекции) . . . . .	64
9.3. Метод хорд . . . . .	66
10. Основы метода конечных элементов для плоских стержневых систем .	67
10.1. Основные положения, принципы и подходы . . . . .	67
10.2. Основные этапы расчета . . . . .	70
10.3. Расчетная дискретная модель системы . . . . .	72
10.4. Аппроксимация перемещений . . . . .	75
10.5. Расчетная дискретная модель плоской стержневой системы . . .	77
10.6. Разрешающие уравнения МКЭ . . . . .	79
10.7. Матрицы жесткости КЭ и дискретной модели системы . . . . .	82
10.8. Формирование матрицы жесткости системы. . . . .	88
10.9. Порядок расчета . . . . .	92
10.10. Пример расчета . . . . .	93
Список использованных источников и рекомендуемая литература . . . . .	98

Учебное издание

*Игнатюк Валерий Иванович  
Бочарова Наталья Владимировна*

## **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ**

Рекомендовано Советом университета  
в качестве пособия  
по дисциплине «Численные методы решения задач»  
для студентов специальностей  
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»  
1-74 04 01 «Сельское строительство и обустройство территорий»  
дневной и заочной форм обучения

Ответственный за выпуск Игнатюк В.И.  
Редактор Боровикова Е.А.  
Компьютерный набор и верстка Игнатюк В.И.  
Корректор Никитчик Е.В.

---

Издательство БрГТУ.

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/235 от 24.03.2014.

Подписано к печати 09.02.2015. Формат 60×84/16

Бумага «Снегурочка». Гарнитура Times New Roman.

Усл. печ. л. 5,1. Уч.-изд. л. 5,5. Тираж 300 экз. Заказ № 122.

Отпечатано на ризографе Учреждения образования

«Брестский государственный технический университет».

224017, Брест, ул. Московская, 267.



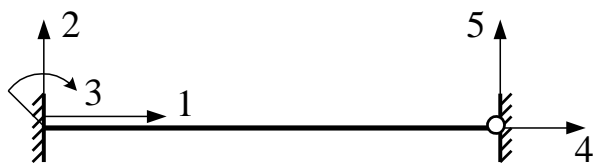


Тип 1

$[K_{\Theta}] =$

(10.22)

$$= \begin{bmatrix} \left( \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EJ}{l^3} \sin^2 \alpha \right) & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{6EJ}{l^2} \sin \alpha & \left( -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{12EJ}{l^3} \sin^2 \alpha \right) & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{6EJ}{l^2} \sin \alpha \\ \left( \frac{EA}{l} - \frac{12EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EJ}{l^3} \cos^2 \alpha \right) & -\frac{6EJ}{l^2} \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{12EJ}{l^3} \cos^2 \alpha \right) & -\frac{6EJ}{l^2} \cos \alpha \\ \frac{6EJ}{l^2} \sin \alpha & -\frac{6EJ}{l^2} \cos \alpha & \frac{4EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l^2} \sin \alpha & \frac{6EJ}{l^2} \cos \alpha & \frac{2EJ}{l} \\ \left( -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{12EJ}{l^3} \sin^2 \alpha \right) & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{6EJ}{l^2} \sin \alpha & \left( \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EJ}{l^3} \sin^2 \alpha \right) & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{6EJ}{l^2} \sin \alpha \\ \left( -\frac{EA}{l} + \frac{12EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{12EJ}{l^3} \cos^2 \alpha \right) & \frac{6EJ}{l^2} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{12EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EJ}{l^3} \cos^2 \alpha \right) & \frac{6EJ}{l^2} \cos \alpha \\ \frac{6EJ}{l^2} \sin \alpha & -\frac{6EJ}{l^2} \cos \alpha & \frac{2EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l^2} \sin \alpha & \frac{6EJ}{l^2} \cos \alpha & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}$$

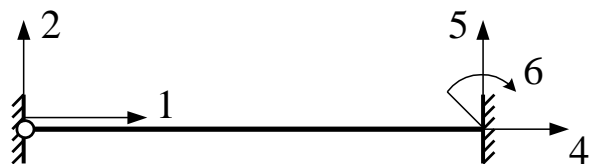


Тип 2

$$[K_{\mathcal{D}}] = \quad (10.23)$$

$$= \begin{bmatrix} \left( \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EJ}{l^3} \sin^2 \alpha \right) & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{3EJ}{l^2} \sin \alpha & \left( -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EJ}{l^3} \sin^2 \alpha \right) & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ \left( \frac{EA}{l} - \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EJ}{l^3} \cos^2 \alpha \right) & -\frac{3EJ}{l^2} \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EJ}{l^3} \cos^2 \alpha \right) & 0 \\ \frac{3EJ}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EJ}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EJ}{l} & -\frac{3EJ}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EJ}{l^2} \cos \alpha & 0 \\ \left( -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EJ}{l^3} \sin^2 \alpha \right) & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{3EJ}{l^2} \sin \alpha & \left( \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EJ}{l^3} \sin^2 \alpha \right) & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EJ}{l^3} \cos^2 \alpha \right) & \frac{3EJ}{l^2} \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EJ}{l^3} \cos^2 \alpha \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





Тип 3

$$[K_{\mathcal{O}}] = \quad (10.24)$$

$$= \begin{bmatrix} \left( \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EJ}{l^3} \sin^2 \alpha \right) & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 & \left( -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EJ}{l^3} \sin^2 \alpha \right) & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{3EJ}{l^2} \sin \alpha \\ \left( \frac{EA}{l} - \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EJ}{l^3} \cos^2 \alpha \right) & 0 & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EJ}{l^3} \cos^2 \alpha \right) & -\frac{3EJ}{l^2} \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left( -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EJ}{l^3} \sin^2 \alpha \right) & \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 & \left( \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EJ}{l^3} \sin^2 \alpha \right) & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{3EJ}{l^2} \sin \alpha \\ \left( -\frac{EA}{l} + \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \left( -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EJ}{l^3} \cos^2 \alpha \right) & 0 & \left( \frac{EA}{l} - \frac{3EJ}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \left( \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EJ}{l^3} \cos^2 \alpha \right) & \frac{3EJ}{l^2} \cos \alpha \\ \frac{3EJ}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EJ}{l^2} \cos \alpha & 0 & -\frac{3EJ}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EJ}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EJ}{l} \end{bmatrix}$$

Таблица расчета двухшарнирной арки

Таблица 6.1

№ то- чек	x, м	y, м	sin φ	cos φ	$\frac{y}{\cos \varphi}$	$\frac{y^2}{\cos \varphi}$	$M_P,$ кН·м	$\frac{yM_P}{\cos \varphi}$	$M = -yX_1 + \frac{yM}{\cos \varphi}$		$Q_P^0,$ кН	Q, кН			N, кН		
									$-yX_1 +$	$\frac{yM}{\cos \varphi}$		$-X_1 \sin \varphi$	$Q_P^0 \cos \varphi$	Q	$-X_1 \cos \varphi$	$-Q_P^0 \sin \varphi$	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	0	0,000	0,800	0,600	—	—	0	—	0	—	23,25	-16,666	13,95	-2,716	-12,500	-18,6	-31,100
1	0,5	0,639	0,774	0,633	1,0095	0,645	11,625	11,735	-1,685	-1,701	23,25	-16,125	14,717	-1,407	-13,187	-18,0	-31,187
2	1,5	1,750	0,707	0,707	2,4752	4,332	34,875	86,324	-1,584	-3,921	23,25	-14,729	16,438	1,709	-14,729	-16,438	-31,167
3	2,5	2,639	0,614	0,789	3,3447	8,827	57,396	191,975	2,418	8,088	20,375	-12,791	16,076	3,284	-16,437	-12,510	-28,947
4	3,5	3,306	0,486	0,874	3,7826	12,505	75,188	284,407	6,321	23,910	15,375	-10,125	13,438	3,313	-18,208	-7,472	-25,680
5	4,5	3,750	0,316	0,949	3,9515	14,818	88,479	349,627	10,353	40,910	11,375	-6,583	10,795	4,212	-19,771	-3,594	-23,365
D	5,0	3,889	0,217	0,976	—	—	93,750	—	12,730	—	9,75 -8,25	-4,521	9,516 -8,052	4,995 -12,573	-20,330	-2,116	-22,449 -18,543
6	5,5	3,972	0,110	0,994	3,9960	15,872	89,625	358,142	6,869	27,449	-8,25	-2,292	-8,201	-10,493	-20,708	+0,908	-19,800
7	6,5	3,972	-0,110	0,994	3,9960	15,872	81,375	325,175	-1,381	-5,518	-8,25	2,292	-8,201	-6,909	-20,708	-0,908	-21,616
8	7,5	3,750	-0,316	0,949	3,9515	14,818	73,125	288,953	-5,001	-19,761	-8,25	6,583	-7,829	-1,246	-19,771	-2,571	-22,342
9	8,5	3,306	-0,486	0,874	3,7826	12,505	64,625	244,451	-4,242	-16,046	-9,25	10,085	-8,085	2,040	-18,208	-4,496	-22,704
10	9,5	2,639	-0,614	0,789	3,3447	8,827	54,375	181,868	-0,603	-2,017	-11,25	12,791	-9,074	3,718	-16,437	-7,061	-23,498
K	10,0	2,222	-0,664	0,747	—	—	48,500	—	2,203	—	-12,25 -24,25	13,833	-9,151 -18,115	4,682 -4,282	-15,562	-8,134 -16,102	-23,700 -31,664
11	10,5	1,750	-0,707	0,707	2,4752	4,332	36,375	90,035	-0,084	-0,208	-24,25	14,729	-17,145	-2,416	-14,729	-17,145	-31,873
12	11,5	0,639	-0,774	0,633	1,0095	0,645	12,125	12,240	-1,185	-1,196	-24,25	16,125	-15,350	0,775	-13,187	-18,770	-31,957
B	12,0	0	-0,800	0,600	—	—	0	—	0	—	-24,25	16,666	-14,55	2,116	-12,500	-19,4	-31,900
Σ					$\sum \frac{y^2}{\cos \varphi} =$ = 113,998	$\sum \frac{yM_P}{\cos \varphi} =$ = 2424,932	$\sum \frac{yM}{\cos \varphi} =$ +50,368 -100,359	$X_1 = 20,833$									

