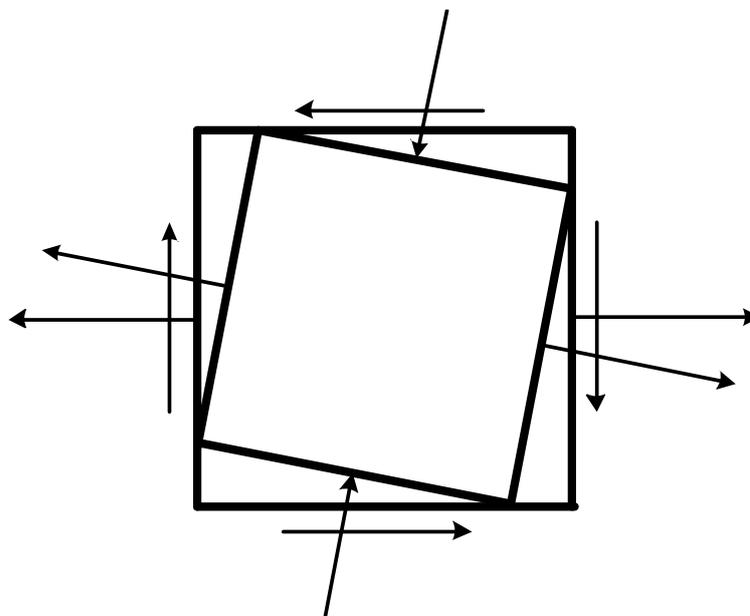


**ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению расчетно-проектировочных работ
по дисциплине «Сопротивление материалов»
для студентов строительных специальностей**



Брест 2019

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра прикладной механики

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению расчетно-проектировочных работ
по дисциплине «Сопротивление материалов»
для студентов строительных специальностей

Брест 2019

УДК 539.3.8
ББК 30.121
И 26

Рецензент: директор ОДО «Брестская инженерная группа»,
канд. техн. наук, доцент Образцов Олег Леонидович

В.И.Игнатюк, В.М.Хвисевич, Н.В.Черноиван

И 26 Задания и методические указания к выполнению расчетно-проектировочных работ по дисциплине «Сопротивление материалов» для студентов строительных специальностей. – Брест : Изд-во БрГТУ, 2019. – 32 с.

ISBN 978-985-493-336-8

В методических указаниях представлены задания к расчетно-проектировочным работам по дисциплине «Сопротивление материалов» по двум темам: «Расчет статически определимых балок при прямом изгибе» и «Расчет внецентренно сжатых колонн», изложены основы теоретического материала, приведены примеры решения задач.

Методические указания предназначены для студентов специальностей 1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций», 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 03 01 «Автомобильные дороги», 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» дневной и заочной форм обучения.

УДК 593.3.8
ББК 30.121

ISBN 978-985-493-336-8

© В.И. Игнатюк, 2019
© В.М. Хвисевич, 2019
© Н.В. Черноиван, 2019
© Издательство БрГТУ, 2019

ВВЕДЕНИЕ

Задания и методические указания к расчетно-проектировочным работам по дисциплине «Сопротивление материалов» соответствуют учебным программам специальностей 1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»; 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»; 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» и включают ряд разделов курса, изучаемых в одном семестре: расчет статически определимых балок при прямом изгибе и расчет внецентренно сжатых колонн. Методические указания содержат основы теоретического материала, расчетные схемы и исходные данные к расчетно-проектировочным работам, примеры решения задач.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТ

Исходные данные и расчетные схемы для выполнения расчетно-проектировочных работ представлены в соответствующих наборах схем и в таблицах исходных данных, и принимаются студентом согласно заданным преподавателем номеру расчетной схемы и варианту для исходных данных.

Расчетно-проектировочные работы следует оформлять на листах формата А4 (210×297 мм) с одной стороны листов. Работа должна включать титульный лист, задания на задачи, расчетные схемы с исходными данными (в общем виде и в численных значениях), основную часть (решение задач, результаты расчета, графика), выводы, перечень использованной литературы.

Графику (чертежи и схемы) рекомендуется выполнять на отдельных листах с соблюдением правил графики и масштабов. Значения величин, полученных в результате вычислений, следует округлять до двух знаков после запятой (до сотых). Необходимо указывать размерности величин. На эпюрах усилий ординаты указываются в численном виде.

Примерами для оформления работ могут служить решения задач, представленные в данных методических указаниях.

1. ПРЯМОЙ ИЗГИБ

1.1 Общие понятия

Для большинства элементов строительных конструкций изгиб является едва ли не самым распространенным видом деформации. Прямой брус, испытывающий изгиб, называют *балкой*.

Изгиб балок вызывают силы (нагрузки), которые перпендикулярны к продольной оси балки, или пары сил (моменты), лежащие в плоскостях, проходящих через эту ось. Если все нагрузки действуют в одной плоскости, называемой силовой, и эта плоскость проходит через геометрическую ось балки и одну из главных центральных осей инерции поперечного сечения, то такой изгиб называется *прямым поперечным изгибом*. При прямом поперечном изгибе в сечениях балок возникают одновременно изгибающие моменты и поперечные силы.

Если в поперечных сечениях будут возникать только изгибающие моменты, то такой изгиб называют *чистым прямым изгибом*.

При прямом изгибе продольная ось (геометрическое место центров тяже-

сти поперечных сечений) из прямолинейной превращается в плавную кривую линию, называемую *изогнутой осью балки* или *упругой линией* балки. Упругая линия показывает вертикальные перемещения центров тяжести поперечных сечений под действием нагрузки.

1.2. Расчет балок на прочность

Расчет балок на прочность сводится к расчетам по наибольшим нормальным напряжениям, по наибольшим касательным напряжениям и по главным напряжениям. Рассмотрим каждый из этих расчетов подробнее.

1.2.1. Расчет по нормальным напряжениям

Условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R, \quad (1.1)$$

где: M_{\max} – наибольший изгибающий момент в балке (расположение его (сечение) устанавливается по эпюре изгибающих моментов M);

R – расчетное сопротивление материала балки (принимается по нормативным документам);

W_x – осевой момент сопротивления поперечного сечения балки.

Используя условие прочности (1.1) можно решить три вида задач: проверка прочности, подбор сечения и определение нагрузки, которую выдержит балка.

Наибольший интерес представляет проектная задача, когда выполняется подбор сечения балки. В этом случае определяется требуемый момент сопротивления поперечного сечения балки из условия:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{R} \quad \text{или} \quad W_x^{mp} = \frac{M_{\max}}{R}, \quad (1.2)$$

после чего принимаются вид и размеры поперечного сечения, момент сопротивления которого должен быть равен или больше требуемого. В отдельных случаях при подборе сечений, геометрические характеристики которых изменяются скачкообразно, может допускаться перенапряжение балок (но не более 3%).

1.2.2. Расчет по касательным напряжениям

сводится к проверке прочности балок с использованием условия:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{x,\max}^{\text{отс}}}{I_x \cdot b} \leq R_s, \quad (1.3)$$

где: Q_{\max} – наибольшая поперечная сила в сечении (определяется по эпюре Q);

I_x – осевой момент инерции поперечного сечения балки относительно главной центральной оси x ;

$S_{x,\max}^{\text{отс}}$ – максимальный статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно нейтральной оси x ;

b – ширина поперечного сечения балки на уровне точек, в которых определяется касательное напряжение.

Условия прочности (1.3) при расчете по касательным напряжениям составляют для опасных точек опасных поперечных сечений. Опасными являются те сечения, в которых действуют наибольшие поперечные силы (Q_{\max}), а опасными точками – точки поперечных сечений, в которых касательные напряжения наибольшие. Эти точки располагаются обычно на нейтральной оси сечения, для симметричных сечений – на центральной оси x .

В случаях, когда условие прочности по касательным напряжениям не выполняется, поперечное сечение должно быть увеличено.

1.2.3. Определение внутренних сил

В поперечных сечениях плоских балок могут возникнуть два вида внутренних сил (усилий) (рисунок 1.1):

– изгибающий момент M , действующий в плоскости балки относительно центральной оси поперечного сечения балки, перпендикулярной к этой плоскости (оси z);

– поперечная сила Q , действующая в плоскости поперечного сечения в направлении центральной оси, перпендикулярной к оси балки.

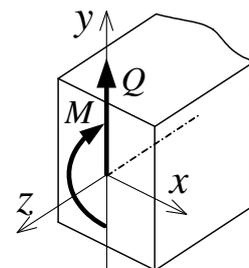


Рисунок 1.1

Определение усилий M , Q в сечениях балки выполняется методом сечений. Метод основан на том, что балка при действии внешней нагрузки должна находиться в равновесии, и при этом равновесие должно соблюдаться как для балки в целом, так и для любой ее части. В месте определения усилия проводится сечение, разделяющее балку на две части, и рассматривается равновесие одной из этих частей, любой (левой или правой). К рассматриваемой части при этом прикладываются силы, соответствующие внутренним силам в сечении, и представляющие действие на эту часть отброшенной части балки. Из уравнений равновесия этой части и определяются усилия в рассматриваемом сечении балки.

Метод сечений позволяет сформулировать следующие

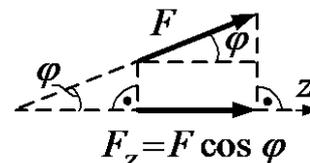
Правила определения внутренних сил в сечениях балок:

⊙ Поперечная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил (включая опорные реакции), приложенных к части балки с одной стороны от сечения, на ось, перпендикулярную к оси балки.

⊙ Изгибающий момент в сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил (включая и опорные реакции), приложенных к части балки с одной стороны от сечения, относительно центра тяжести сечения.

Напомним, что проекция силы на ось равна произведению величины силы на косинус угла между линией действия силы и рассматриваемой осью (см. рисунок справа):

$$F_z = F \cos \varphi.$$



Момент силы относительно некоторой точки равен произведению величины этой силы на ее плечо относительно этой точки, где плечо силы относительно точки определяется как длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию действия силы (h_F на рисунок 1.2,а). Тогда: $M_A(F) = F \cdot h_F$.

Согласно данным определениям легко вычисляются момент относительно любой точки и проекция на любую ось нагрузок, распределенных по любым зависимостям, если эти нагрузки привести к равнодействующим силам (R_q). Например, величина момента относительно некоторой точки A равномерно распределенной нагрузки q (рисунок 1.2, б) (равнодействующая R_q которой приложена в середине участка, на который действует нагрузка) будет равна:

$$M_A(q) = R_q \cdot h_{Rq} = (q \cdot a) \cdot h_{Rq},$$

Заметим, что момент относительно любой точки от действия сосредоточенного момента равен самому сосредоточенному моменту, а его проекция на любую ось равна нулю.

Для наглядного представления об изменении усилий в сечениях систем строят эпюры усилий. **Эпюрой усилия** (M , Q и др.) называется график (диаграмма), отражающий зависимость изменения этого усилия по длинам всех участков системы (балки).

Отметим некоторые правила, применяемые при построении эпюр усилий:

1. Ось (базу), на которой строится эпюра, всегда выбирают так, чтобы она была параллельна оси балки.
2. Ординаты эпюр откладывают от базовой оси перпендикулярно к ней. Каждая из ординат эпюры усилий представляет собой (в принятом масштабе) величину усилия, для которого построена эпюра, в поперечном сечении балки, в котором эта ордината отложена.
3. Штриховать эпюры принято линиями, перпендикулярными к базовой оси (каждая из линий штриховки – это ордината эпюры усилий).
4. Ординаты усилий откладывают в определенном масштабе, одинаковом в пределах одной эпюры; в характерных точках проставляют значения ординат усилий, а в полях эпюр (в кружочках) обычно ставят знаки ординат эпюр.

При определении поперечных сил и изгибающих моментов и построении их эпюр принимают следующие правила знаков:

– **Поперечная сила** в сечении, определенная по вышеуказанному правилу, **положительна**, если стремится повернуть эту часть относительно сечения по часовой стрелке, и **отрицательна**, если стремится повернуть эту часть относительно сечения против часовой стрелки – см. рисунок 1.3.

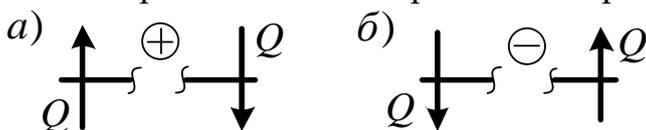


Рисунок 1.3



Рисунок 1.4

Изгибающие моменты на эпюрах будем откладывать на растянутых волокнах (со стороны растянутых волокон) и считать положительными, если растягиваются нижние волокна балки.

Растянутые волокна в сечении при этом определяются следующим обра-

зом. В той части системы, из равновесия которой в расчетном сечении определен изгибающий момент, выделяем бесконечно малый элемент балки, прилегающий к рассматриваемому сечению (на схемах этот бесконечно малый элемент стержня для наглядности изображается в виде элемента конечной длины). Считаем далее, что в расчетном сечении указанный элемент имеет защемление, и прикладываем к нему вычисленный для этого сечения изгибающий момент. Анализируя теперь изгиб рассматриваемого элемента балки (см., например, рисунок 1.4), несложно определить, с какой стороны стержня волокна будут растянуты (пунктирная линия), а с какой – сжаты.

1.2.4. Расчет на прочность по главным напряжениям

Проверка прочности балок по главным напряжениям сводится к составлению условий прочности с использованием одной из теорий прочности. Для балок, выполненных из пластичных материалов, применяют третью или четвертую теорию прочности. Более экономичной является четвертая теория прочности. Условия прочности по третьей и четвертой теориям прочности имеют вид:

$$\sigma_{r_3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R; \quad \sigma_{r_4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R; \quad (1.3)$$

где: $\sigma_{r_3}, \sigma_{r_4}$ – расчетные (или эквивалентные – $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}, \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}}$) напряжения для проверяемых точек сечений;

σ, τ – нормальные и касательные напряжения для соответствующих точек.

По главным напряжениям следует проверять те сечения, в которых одновременно действуют наибольшие, или близкие к ним, поперечные силы Q и изгибающие моменты M . Опасными точками таких сечений являются, обычно, точки, расположенные в местах резкого изменения ширины поперечных сечений. Так, например, в двутаврах, швеллерах – это точки примыкания стенок к полкам, ширина (b) которых на порядок больше толщины стенок.

1.3 Задание к расчетно-проектировочной работе № 3

«Расчет на прочность статически определимой двутавровой балки»

Дано: Двутавровая балка (принять по номеру схемы), нагруженная внешней нагрузкой (все числовые данные принимаются согласно номеру варианта).

Расчетные сопротивления материала балки принимаются равными:

Требуется:

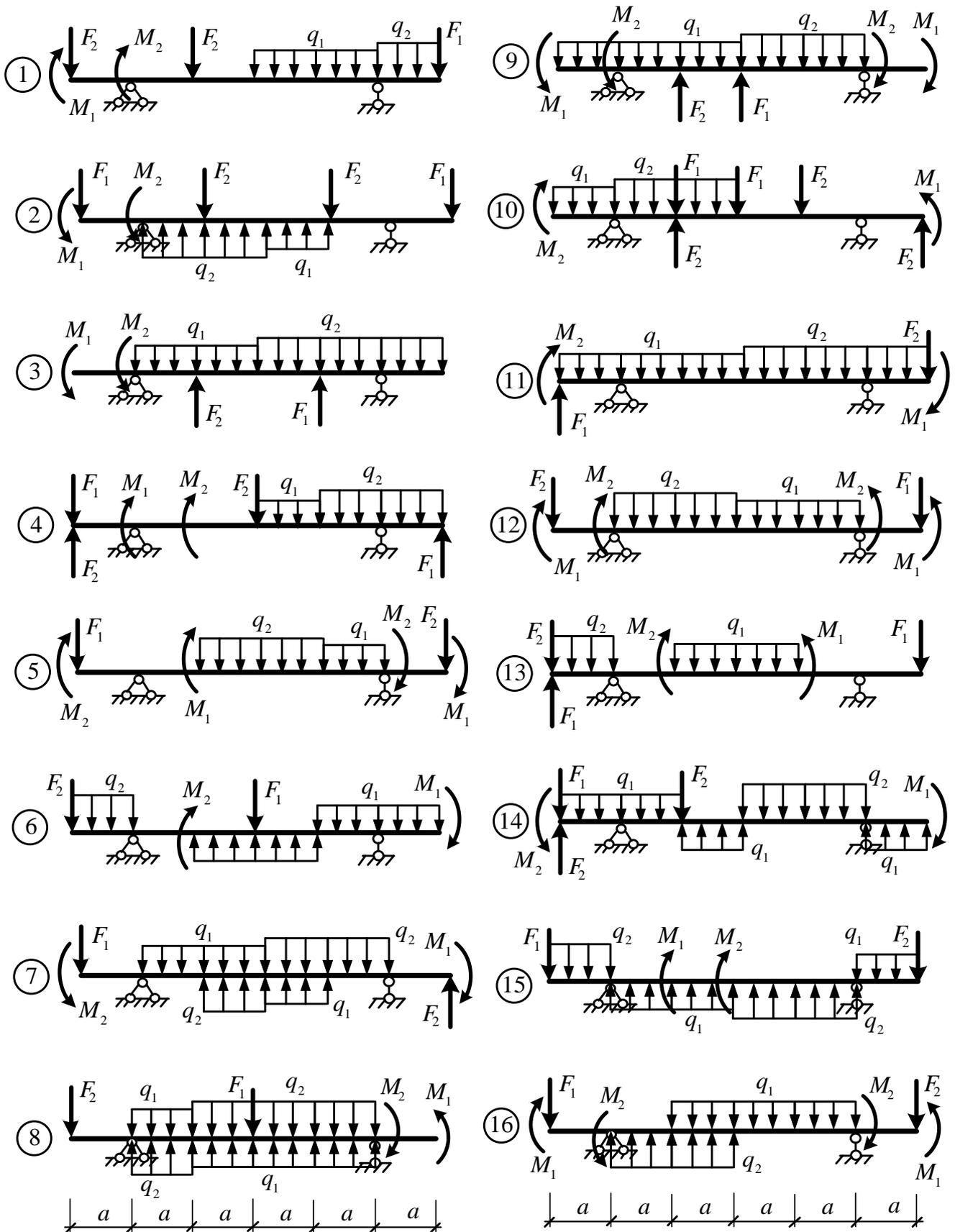
$$R = 230 \text{ МПа}, R_s = 133 \text{ МПа}.$$

- 1) определить опорные реакции;
- 2) построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M ;
- 3) подобрать сечение балки по нормальным напряжениям и проверить прочность по касательным и главным напряжениям с использованием четвертой теории прочности;

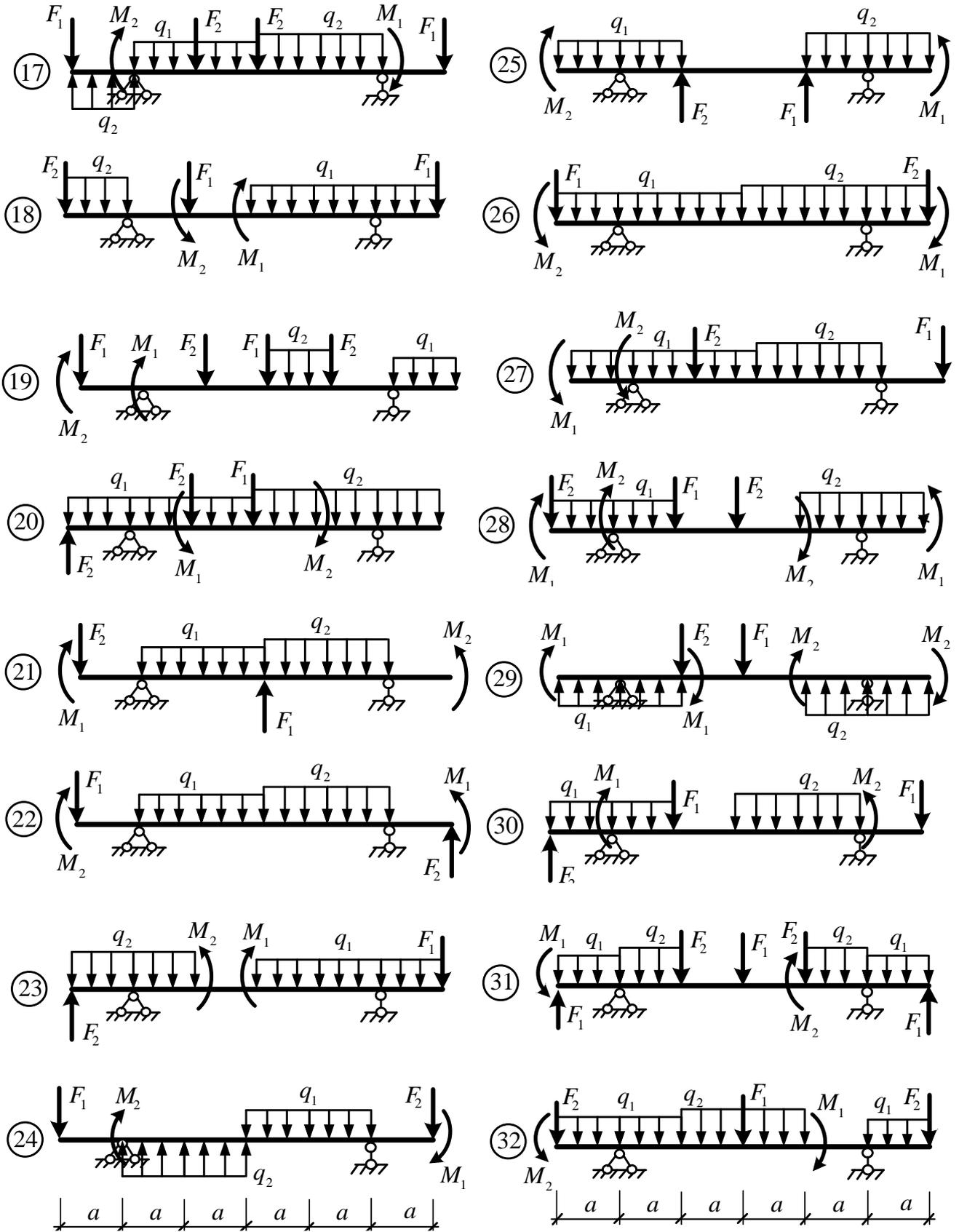
4) определить главные напряжения для составного сечения в виде двутавра в точке, расположенной в месте примыкания стенки к полке (в точке 2 на рисунке 1.8);

5) построить эпюры нормальных, касательных, главных и экстремальных касательных напряжений для опасного сечения по главным напряжениям.

1.4 Схемы двутавровых балок с нагрузками



Схемы двутавровых балок (продолжение)



1.5. Исходные данные к расчету двутавровой балки

Таблица 1.1

Номер варианта	a , м	Величины нагрузок			Индексы нагрузок		
		q , кН/м	F , кН	M , кН·м	q	F	M
1	0,9	30	110	40	2	1, 2	2
2	1,1	40	100	30	2	1	1
3	1,0	32	120	34	1	1	1, 2
4	0,8	34	90	36	1, 2	2	1
5	1,1	30	70	32	2	1	2
6	1,0	36	80	38	1	2	1, 2
7	1,2	38	90	28	1, 2	1	1
8	0,9	40	100	30	2	2	2
9	1,0	30	110	32	1, 2	1	1, 2
10	1,1	40	80	30	1	2	2
11	0,9	34	90	40	2	1	1
12	1,2	36	65	38	1, 2	2	1
13	1,1	38	70	32	1	1	2
14	0,9	40	75	30	2	2	1
15	1,2	42	80	28	1	1	1, 2
16	1,1	44	60	34	1, 2	2	1
17	1,0	32	70	42	2	2	2
18	0,8	42	80	40	1, 2	1	1, 2
19	0,9	34	90	32	1	2	2
20	1,1	36	100	36	1	1	1
21	0,8	30	110	28	2	2	2
22	0,9	38	120	30	2	1	1
23	1,0	40	95	42	1	2	1, 2
24	1,1	32	110	28	1, 2	2	1
25	1,2	34	105	40	1	1	2
26	1,1	38	110	30	2	1	1, 2
27	1,2	40	80	40	1	2	1
28	0,8	34	90	36	2	1	2
29	0,9	30	100	38	1	2	1
30	1,0	32	110	32	1, 2	1	1, 2
31	1,1	50	90	40	1	2	2
32	0,8	45	60	30	2	1	1
33	0,9	40	70	35	1, 2	2	1
34	0,8	50	80	32	1	2	2
35	1,0	44	120	30	2	1	1
36	1,1	30	140	36	1, 2	2	2
37	0,9	34	70	38	2	1	2
38	1,1	32	110	28	1	2	1
39	1,0	40	80	40	1, 2	2	1
40	0,8	36	70	50	2	1	1, 2

1.6. Пример расчета двутавровой балки на прочность

Рассмотрим двутавровую балку, представленную на рисунке 1.5 ($a = 1$ м) и нагруженную внешними силами, показанными на рисунке. Выполним расчет балки согласно позициям, требуемым в задании № 3.

Расчетные сопротивления материала балки: на изгиб – $R = 230$ МПа, на сдвиг – $R_s = 133$ МПа.

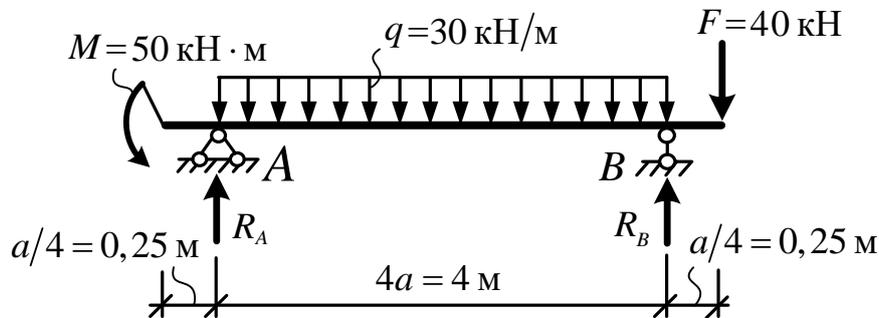


Рисунок 1.5. Расчетная схема балки

Решение

1. Определение опорных реакций

Составим уравнения статического равновесия (положительным принят момент, действующий по часовой стрелке):

$$\sum M_A = 0; \quad F \cdot 4,25a + (q \cdot 4a) \cdot 2a - M - R_B \cdot 4a = 0;$$

$$R_B = \frac{4,25 \cdot F \cdot a + 8 \cdot q \cdot a^2 - M}{4 \cdot a}; \quad R_B = \frac{40 \cdot 4,25 \cdot 1 + (30 \cdot 4) \cdot 2 \cdot 1 - 50}{4 \cdot 1}; \quad R_B = 90 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0; \quad -M - (q \cdot 4a) \cdot 2a + F \cdot 0,25a + R_A \cdot 4a = 0; \quad R_A = 70 \text{ кН.}$$

Проверка: $\sum Y = 0; \quad R_A + R_B - 4 \cdot q \cdot a - F = 0; \quad 70 + 90 - 120 - 40 = 160 - 160 = 0.$

2. Построение эпюр Q и M

Определяем значения Q , M в характерных сечениях балки:

$$Q_1^{лев} = 0; \quad Q_2^{лев} = R_A = 70 \text{ кН}; \quad Q_3^{прав} = -R_B + F = -50 \text{ кН}; \quad Q_4^{прав} = +F = +40 \text{ кН};$$

$$M_1^{лев} = -M = -50 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3^{лев} = -M + R_A \cdot 0 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3^{прав} = -F \cdot \frac{a}{4} + R_B \cdot 0 = -40 \cdot 0,25 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4^{прав} = -40 \cdot 0,25 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{cp}^{лев} = -M + R_A \cdot \frac{a}{2} - q \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = -50 + 70 \cdot 2 - 30 \cdot 2 \cdot 1 = +30 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

На участке действия равномерно распределенной нагрузки определим положение сечения (z_0), в котором поперечная сила равна нулю ($Q = 0$):

$$Q_{z_0} = R_A - q \cdot z_0 = 0; \quad z_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{70}{30} = 2,33 \text{ м,}$$

и в котором величина изгибающего момента будет максимальной:

$$M_{max}^{лев} = -M + R_A \cdot z_0 - q \cdot \frac{z_0^2}{2} = 50 + 70 \cdot 2,33 - 30 \cdot \frac{2,33^2}{2} = 32 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

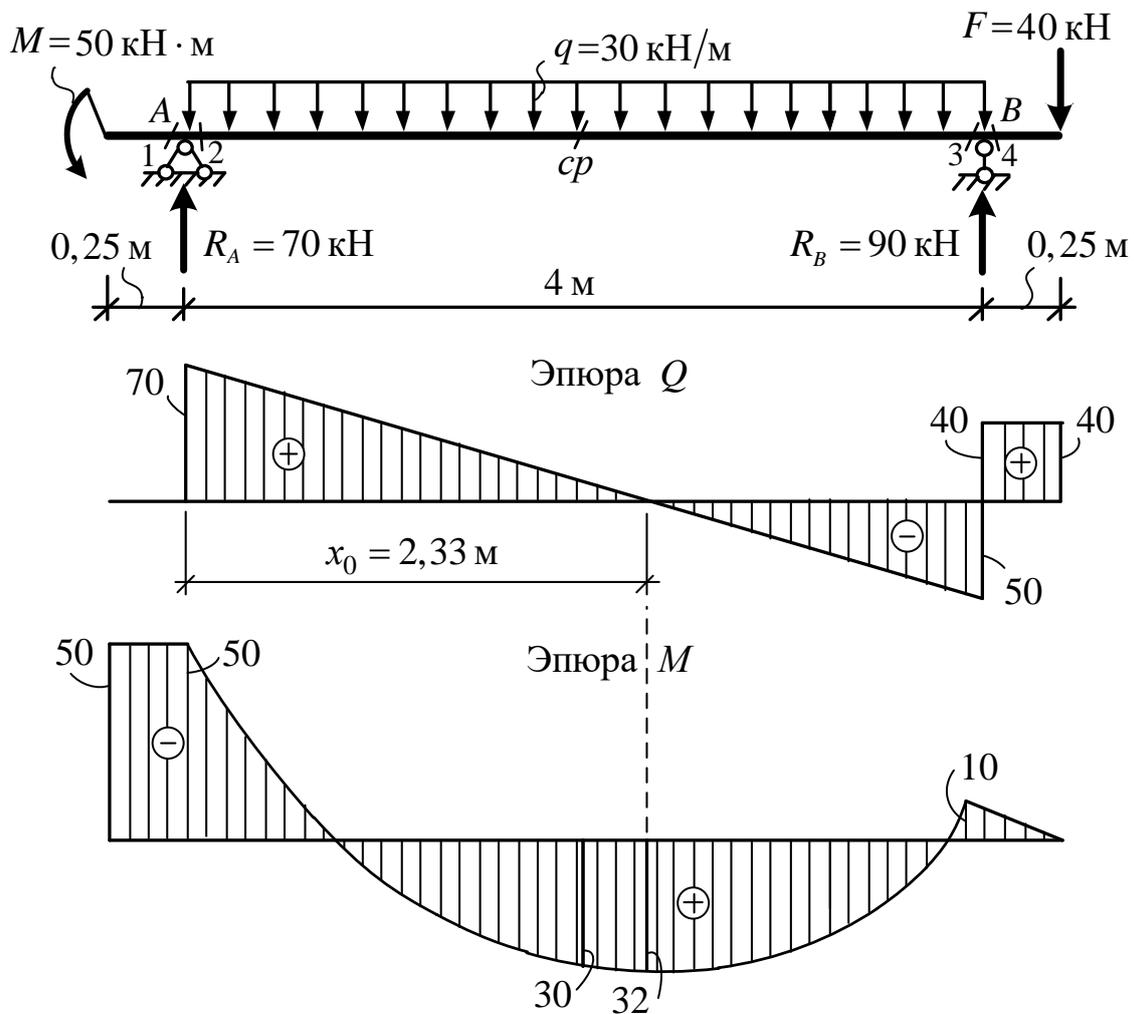


Рисунок 1.6. Эпюры поперечных сил, изгибающих моментов

Из эпюры изгибающих моментов (см. рисунок 1.6) принимаем по модулю:

$$M_{\max} = 50 \text{ кН} \cdot \text{м} = 5000 \text{ кН} \cdot \text{см}.$$

3. Подбор сечения балки и проверка на прочность

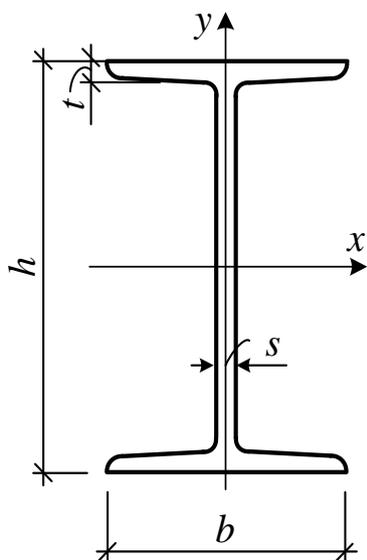
Сечение подбираем из условия прочности по нормальным напряжениям (1.1):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R.$$

Требуемый момент сопротивления равен (1.2):

$$W_x^{\text{тр}} = \frac{M_{\max}}{R} = \frac{5000}{230 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4}} = 217 \text{ см}^3.$$

По таблицам прокатных профилей согласно ГОСТ 8239-89 предварительно выбираем двутавр № 22, геометрические характеристики которого представлены ниже:



$$\begin{aligned}
 A &= 30,6 \text{ см}^2; \\
 h &= 22 \text{ см}; \\
 b &= 11 \text{ см}; \\
 t &= 0,87 \text{ см}; \\
 s &= 0,54 \text{ см}; \\
 I_x &= 2550 \text{ см}^4; \\
 W_x &= 232 \text{ см}^3; \\
 S_{x,\max}^{\text{отс}} &= 131 \text{ см}^3.
 \end{aligned}$$

Рисунок 1.7. Сечение прокатного двутавра

Для сравнения заменим прокатное сечение равным по габаритным размерам составным сварным сечением (см. рисунок 1.8). При этом толщины полок и стенки первоначально округляем до ближайших целых чисел.

Отметим, что данной работе при подборе составного сечения двутавров не рассматриваются вопросы проверки местной устойчивости полок и стенок балок. Эти вопросы будут рассмотрены в курсе «Металлические конструкции».

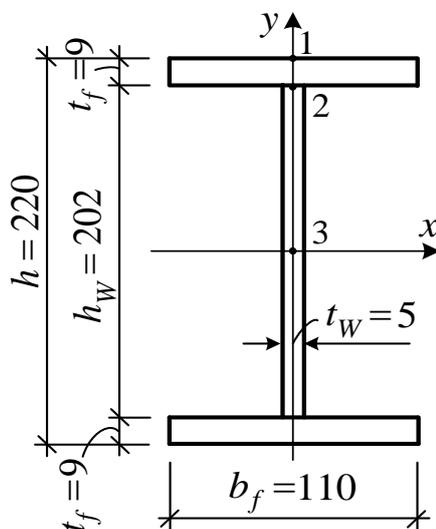


Рисунок 1.8. Сечение составного двутавра

Найдем геометрические характеристики принятого составного двутавра:

$$\begin{aligned}
 I_x &= t_w \cdot \frac{h_w^3}{12} + 2 \cdot \left[b_f \cdot \frac{t_f^3}{12} + b_f \cdot t_f \cdot \left(\frac{t_f}{2} + \frac{h_w}{2} \right)^2 \right] = \\
 &= 0,5 \cdot \frac{20,2^3}{12} + 2 \cdot \left[11 \cdot \frac{0,9^3}{12} + 11 \cdot 0,9 \cdot \left(\frac{0,9}{2} + \frac{20,2}{2} \right)^2 \right] = 2549 \text{ см}^4;
 \end{aligned}$$

$$W_x = 2 \cdot \frac{I_x}{h} = 2 \cdot \frac{2549}{22} = 231,7 \text{ см}^3 > W_x^{\text{тр}}.$$

Проверка прочности балки по нормальным напряжениям выполняется для сечения балки, в котором изгибающий момент максимален, (для сечений рядом с опорой А, где $M_{\max} = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$) в точке 1 сечения (рисунок 1.6), для которой нормальные напряжения в сечении наибольшие:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{5000}{231,7} = 21,58 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 215,8 \text{ МПа} < R = 230 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по наибольшим нормальным напряжениям выполняется. Запас прочности составляет: $\left| \frac{(215,8 - 230)}{230} \right| \cdot 100\% = 6,17\% > 5\%$.

Проверка прочности балки по главным напряжениям, используя четвертую теорию прочности.

Проверку производим для точек примыкания стенки двутавра к полкам (точка 2 – см. рисунок 1.8) в сечении, расположенном справа от опоры А, в котором внутренние силы равны: $Q_A = 70 \text{ кН}$; $M_A = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Условие прочности по четвертой теории прочности имеет вид:

$$\sigma_{r_4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R.$$

Для точки 2: $y_2 = \frac{h_w}{2} = \frac{20,2}{2} = 10,1 \text{ см};$

$$S_{x,2}^{\text{отс}} = b_f \cdot t_f \cdot \frac{h_w + t_f}{2} = 11 \cdot 0,9 \cdot \frac{20,2 + 0,9}{2} = 104,4 \text{ см}^3;$$

$$\sigma_2 = \frac{M_A \cdot y_2}{I_x} = \frac{50 \cdot 10^2 \cdot 10,1}{2549} \cdot 10 = 198,1 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{Q_A \cdot S_{x,2}^{\text{отс}}}{I_x \cdot t_w} = \frac{70 \cdot 104,4}{25} \cdot 10 = 57,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{r_4} = \sqrt{198,1^2 + 3 \cdot 57,3^2} = 221,6 \text{ МПа} < R = 230 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по главным напряжениям выполняется. Запас прочности составляет $\left| \frac{(221,6 - 230)}{230} \right| \cdot 100\% = 3,65\% < 5\%$, что допустимо.

Примечание. Составное сечение считается подобранным верно в случае, когда запас прочности не превышает 5%. В случаях, когда запас прочности при подборе не удается выдержать в пределах до 5%, допускается (по согласованию с преподавателем) принимать сечение с перенапряжением, которое при этом не должно превышать 3%.

В случае необходимости корректировки поперечного сечения рекомендуется увеличивать (при перенапряжении) или уменьшать (при большом недонапряжении) высоту стенки (и высоту составного двутавра соответственно) с градацией 5–10 мм, не изменяя при этом другие размеры.

Проверку прочности балки по касательным напряжениям (1.3) выполним для сечения в балке 2 (справа от опоры А – см. рисунок 1.6), где поперечная сила имеет наибольшее значение ($Q_{\max}=70$ кН), для точки 3 поперечного сечения (см. рисунок 1.8), где касательные напряжения в сечении максимальны:

$$S_{x,3}^{\text{отс}} = b_f \cdot t_f \cdot \frac{h_w + t_f}{2} + \frac{h_w}{2} \cdot t_w \cdot \frac{h_w}{4} = 11 \cdot 0,9 \cdot \frac{20,2 + 0,9}{2} + \frac{20,2}{2} \cdot 0,5 \cdot \frac{20,2}{4} = 129,9 \text{ см}^3;$$

$$\tau_{\max} = \frac{70 \cdot 129,9}{2549 \cdot 0,5} = 7,13 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 71,3 \text{ МПа}; \quad \tau_{\max} = 71,3 \text{ МПа} < R_s = 133 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

4. Определение главных напряжений для одной из опасных точек опасного сечения графическим путем

Покажем напряженное состояние в точке 2 сечения А (справа). В соответствии с правилом знаков векторов растягивающего (положительного) нормального напряжения ($\sigma = 98,1$ МПа) направляем от граней куба (от сторон квадрата, как проекции куба на плоскость), а вектора положительного касательного напряжения ($\tau = 57,3$ МПа) по вертикальным граням куба направляем таким образом, чтобы они вращали куб (квадрат) по часовой стрелке. Согласно закону парности касательных напряжений дополняем горизонтальные грани куба векторами касательного напряжения. Относительно вершин куба вектора касательного напряжения должны либо сходиться, либо расходиться (рисунок 1.9).

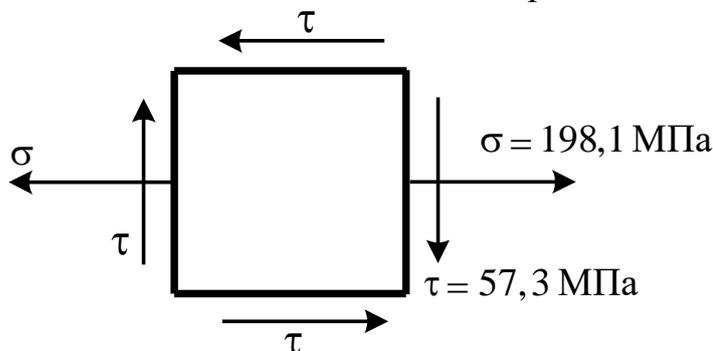


Рисунок 1.9. Напряжения σ и τ в точке 2.

В системе координат τ – σ (рисунок 1.10) откладываем в масштабе отрезки:

$$OK = \sigma = 198,1 \text{ МПа}, \quad KK_1 = \tau = 57,3 \text{ МПа}, \quad OK_2 = -57,3 \text{ МПа}.$$

Соединив точки K_1 и K_2 получим диаметр искомого круга напряжений с центром в точке С, на котором описываем окружность. Пересечение круга с осью σ даёт две точки А и В, которые характеризуют главные напряжения.

Так, отрезок OB в масштабе представляет $\sigma_1 = 213,5$ МПа, а OA представляет $\sigma_3 = -15,4$ МПа.

Проведя прямые через точки K_1 и K_2 до их пересечения, находим полюс Р. Соединив точки Р и В, получим направление действия напряжения σ_1 , а точки Р и А – направление действия σ_3 .

Переносим параллельно направлению действия напряжений σ_1 и σ_3 на элемент, представленный на рисунке 1.9, и покажем положение главных площадок, которые перпендикулярны к соответствующим напряжениям σ_1 , σ_3 (см. рисунок 1.11). Значение угла поворота граней элемента α можно вычислить и по аналитической формуле:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = -2 \cdot \frac{\tau}{\sigma} = -2 \cdot \frac{57,3}{198,1} = -0,578,$$

откуда $\alpha = -15,02^\circ$. Отметим, что отрицательные величины угла α соответствует повороту граней элемента по часовой стрелке.

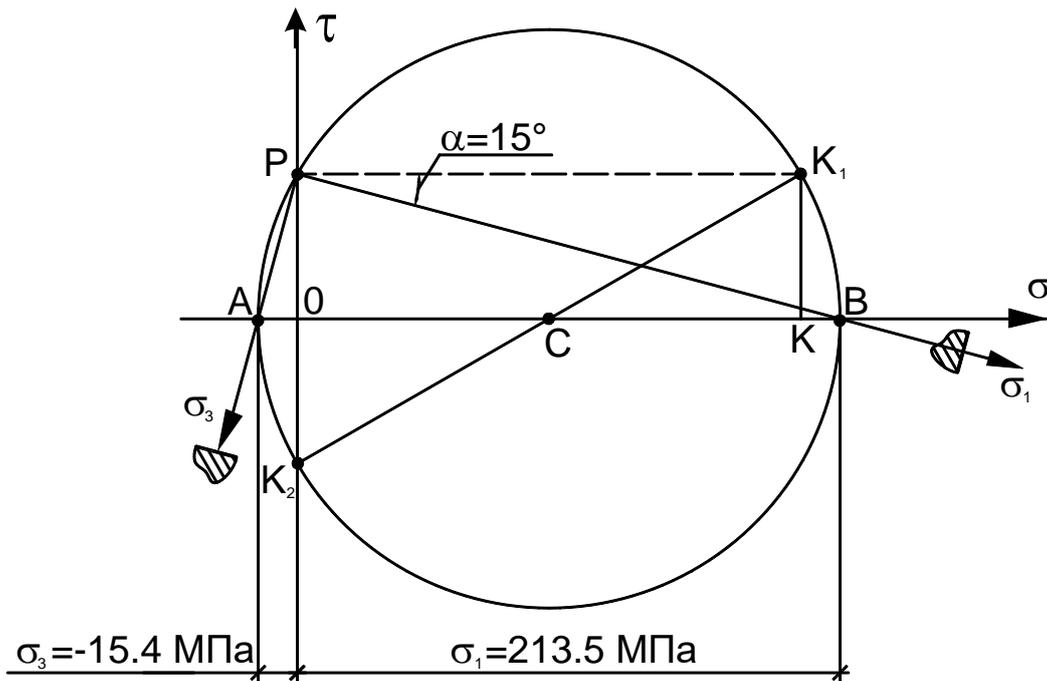


Рисунок 1.10. Круг Мора

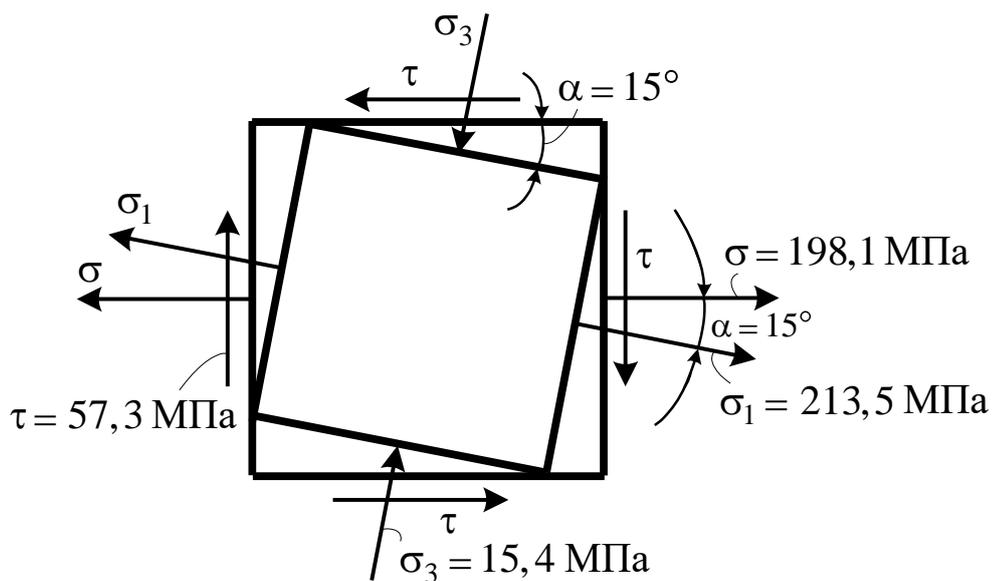


Рисунок 1.11. Напряженное состояние в точке 2

5. Построение эпюр нормальных, касательных, главных и экстремальных касательных напряжений для опасного сечения по главным напряжениям

При определении величины главных напряжений и экстремальных касательных напряжений воспользуемся теорией плоского напряженного состояния:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right); \quad \tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} \left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) \rightarrow = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2};$$

где: σ и τ для соответствующих точек сечения определяются по формулам:

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} \cdot y; \quad \tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b}$$

Величины Q , M и y необходимо подставлять в формулы с учетом их знаков.

Вычисляем нормальные и касательные напряжения в точках 1 и 2.

Получаем:

в точке 1:
$$\sigma = -\frac{M_x}{W_x} = \frac{50 \cdot 10^2}{231,7} \cdot 10 = 215,8 \text{ МПа};$$

$$\tau = 0 \quad \text{так как} \quad S_x^{\text{отс}} = 0; \quad \sigma_1 = 215,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = 0; \quad \tau_{\max, \min} = \pm \frac{\sigma_1}{2} = \pm 107,9 \text{ МПа}.$$

в точке 2:
$$\sigma = \frac{50 \cdot 10^2}{2549} \cdot 10,1 \cdot 10 = 198,1 \text{ МПа};$$

$$\tau^{\text{пол}} = \frac{70 \cdot 104,4}{2549 \cdot 11} \cdot 10 = 2,61 \text{ МПа}; \quad \tau^{\text{ст}} = \frac{70 \cdot 104,4}{2549 \cdot 0,5} \cdot 10 = 57,3 \text{ МПа};$$

Далее процесс вычислений сведем в таблицу 1.2 и по полученным результатам построим эпюры напряжений, которые показаны на рисунке 1.12.

Результаты расчетов для построения эпюр напряжений:

Таблица 1.2

Точка сечения	y , см	$S_{x,i}^{\text{отс}}$, см ³	σ , МПа	τ , МПа	$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$, МПа	σ_1 , МПа	σ_3 , МПа	$\tau_{\max, \min}$, МПа	
1	11	0	215,8	0	215,8	215,8	0	$\pm 107,9$	
2	полка	10,10	104,4	198,1	2,61	198,2	198,15	-0,05	$\pm 99,1$
	стенка	10,10	104,4	198,1	57,3	228,9	213,5	-15,4	$\pm 114,4$
3	0	129,9	0	71,3	142,6	71,3	-71,3	$\pm 71,3$	
2'	полка	-10,10	104,4	-198,1	2,61	198,2	0,05	-198,15	$\pm 99,1$
	стенка	-10,10	104,4	-198,1	57,3	228,9	15,4	-213,5	$\pm 114,4$
1'	11	0	-215,8	0	215,8	0	-215,8	$\pm 107,9$	

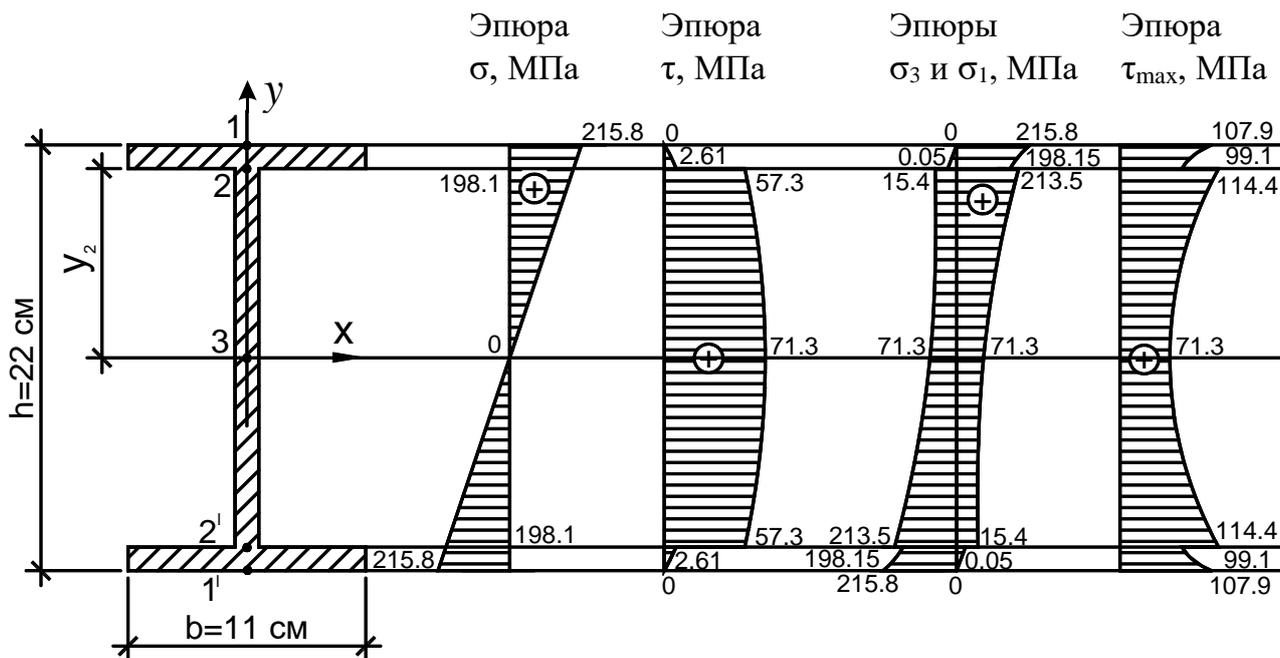


Рисунок 1.12. Эпюры напряжений в сечении А (справа)

6. Определение коэффициентов запаса по прочности по напряжениям:

– по нормальным напряжениям: $K_{\sigma} = \frac{R}{\sigma_{\max}} = \frac{230}{215,8} = 1,066;$

– по касательным напряжениям: $K_{\tau} = \frac{R_s}{\sigma_{\max}} = \frac{133}{71,3} = 1,865;$

– по главным напряжениям: $K_{\sigma_{r_4}} = \frac{R}{\sigma_{r_4}} = \frac{230}{221,6} = 1,038.$

Площадь подобранного составного двутавра составляет:

$$A = t_w \cdot h_w + 2 \cdot b_f \cdot t_f = 0,5 \cdot 20,2 + 2 \cdot (11 \cdot 0,9) = 29,9 \text{ см}^2,$$

что на 2,2% меньше прокатного двутавра.

2. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

2.1. Общие сведения

В реальных конструкциях часто встречаются случаи, когда в поперечных сечениях действуют два или более внутренних силовых фактора, вызывающих два или более простых вида деформации. В таких случаях элементы конструкций испытывают сложное сопротивление (сложную деформацию). Имеют место следующие виды сложного сопротивления: кривой изгиб; внецентренное сжатие (растяжение); кручение с изгибом и др.

2.2. Кривой изгиб

Кривой изгиб возникает тогда, когда силовая плоскость, проходящая через продольную ось бруса, не совпадает ни с одной из главных осей инерции поперечного сечения, или одновременное сочетание двух прямых изгибов, действующих во взаимно перпендикулярных плоскостях.

При поперечном кривой изгибе в поперечных сечениях балок действуют четыре внутренних силовых фактора: поперечные силы Q_x , Q_y и изгибающие моменты M_x , M_y . Однако, как правило, влияние поперечных сил незначительно и в расчетах ими пренебрегают. При определении напряжений и перемещений при кривой изгибе используют принцип независимости действия сил. Так, суммарные нормальные напряжения определяют по следующей формуле:

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \pm \left(\frac{M_x}{I_x} \right) \cdot y \pm \left(\frac{M_y}{I_y} \right) \cdot x,$$

где: M_x , M_y – изгибающие моменты относительно осей координат x и y ;

x , y – координаты точек, в которых определяют напряжения;

I_x , I_y – главные центральные моменты инерции поперечного сечения.

Знаки слагаемых напряжений устанавливаются исходя из характера деформирования продольных слоёв балки.

Расчет на прочность при кривой изгибе сводится к составлению условия прочности для опасного сечения балки:

$$\sigma_{\min, \max} = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq R,$$

где: W_x , W_y – осевые моменты сопротивления поперечного сечения при изгибе; R – расчетное сопротивление материала балки (здесь рассматриваются материалы, имеющие одинаковые расчетные сопротивления на растяжение и сжатие).

По условию прочности, как обычно, можно решить три типа задач. Наибольший интерес представляет проектная задача. Так как в условии прочности здесь входит две неизвестные величины W_x и W_y , поэтому при решении проектной задачи предварительно задаются соотношением $k = \frac{W_x}{W_y}$, с учетом которого

условие прочности принимает вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{W_x} \cdot (M_x + kM_y) \leq R.$$

Отсюда:

$$W_x = \frac{M_x + kM_y}{R} \quad \text{и соответственно} \quad W_y = \frac{W_x}{k}.$$

При этом коэффициент соотношения осевых моментов сопротивления поперечного сечения зависит от формы сечения. Так, например, для прямоугольного сечения $k = \frac{h}{b}$, для двутавров – $k = \frac{8}{10}$; для швеллеров – $k = \frac{8}{9}$ и т.д.

2.3. Внецентренное сжатие

Внецентренное сжатие (растяжение) возникает в том случае, когда брус нагружен в продольном направлении силой, приложенной внецентренно, т.е. на некотором расстоянии от центра тяжести поперечного сечения. Деформация внецентренного сжатия является более характерной для элементов строительных конструкций.

В любом поперечном сечении бруса при внецентренном сжатии возникают три внутренних силовых фактора:

$$N = F; \quad M_x = F \cdot y_F; \quad M_y = F \cdot x_F;$$

где: x_F, y_F – координаты точки приложения внешней силы.

Следовательно, общий случай внецентренного сжатия сводится к центральному сжатию (N) и чистому косому изгибу (M_x, M_y), который, как описано в пункте 2.2, можно представить в виде двух чистых прямых изгибов, действующих во взаимно перпендикулярных плоскостях. С учетом принципа независимости действия сил, нормальные напряжения в поперечном сечении бруса равны алгебраической сумме напряжений от каждого внутреннего силового фактора:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{N}{A} + \frac{M_x \cdot y}{I_x} + \frac{M_y \cdot x}{I_y}.$$

Данная формула позволяет определить напряжения в любой точке поперечного сечения, характеризуемой координатами: x, y . Путем преобразования полученную формулу для определения напряжений можно представить в виде:

$$\sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} \right)$$

где: F – внешняя нагрузка (принимается со знаком «плюс», если вызывает растяжение, и со знаком «минус», если вызывает сжатие); i_x^2, i_y^2 – квадраты главных радиусов инерции поперечного сечения; x, y – координаты точки, в которой определяется напряжение; x_F, y_F – координаты точки приложения внешней нагрузки. Отметим, что координаты точек x, y, x_F, y_F при их подстановке в вы-

ражения напряжений следует учитывать с их знаками.

Расчет на прочность при внецентренном сжатии сводится к составлению условия прочности для опасных точек поперечного сечения. Положения опасных точек определяются при помощи нулевой линии, т. е. линии, в точках которой нормальные напряжения (σ) равны нулю. Для определения положения нулевой линии вычисляют отрезки, отсекаемые этой линией на осях координат:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_F}.$$

По полученным отрезкам изображают в сечении нулевую линию, а проведя две касательные к сечению параллельно нулевой линии, находят две наиболее напряженные (наиболее удаленные) точки поперечного сечения в растянутой и сжатой зонах, условия прочности для которых получают вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{|F|}{A} \left(1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} \right) \leq R_p;$$
$$\sigma_{\min} = \frac{|F|}{A} \left(1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} \right) \leq R_c;$$

где: x, y – координаты опасных точек сечения; R_p, R_c – расчетные сопротивления материала бруса на растяжение и сжатие соответственно. При решении проектной задачи (подбор сечений) в общем случае приходится пренебрегать либо деформацией центрального сжатия, либо деформацией чистого косоугольного изгиба из-за трудностей решения кубического уравнения. При этом полученные результаты округляют в большую сторону и окончательно проверяют по общему условию прочности. Но в тех случаях, когда можно выразить размеры поперечного сечения через один неизвестный параметр (например, b), решение задачи несколько упрощается.

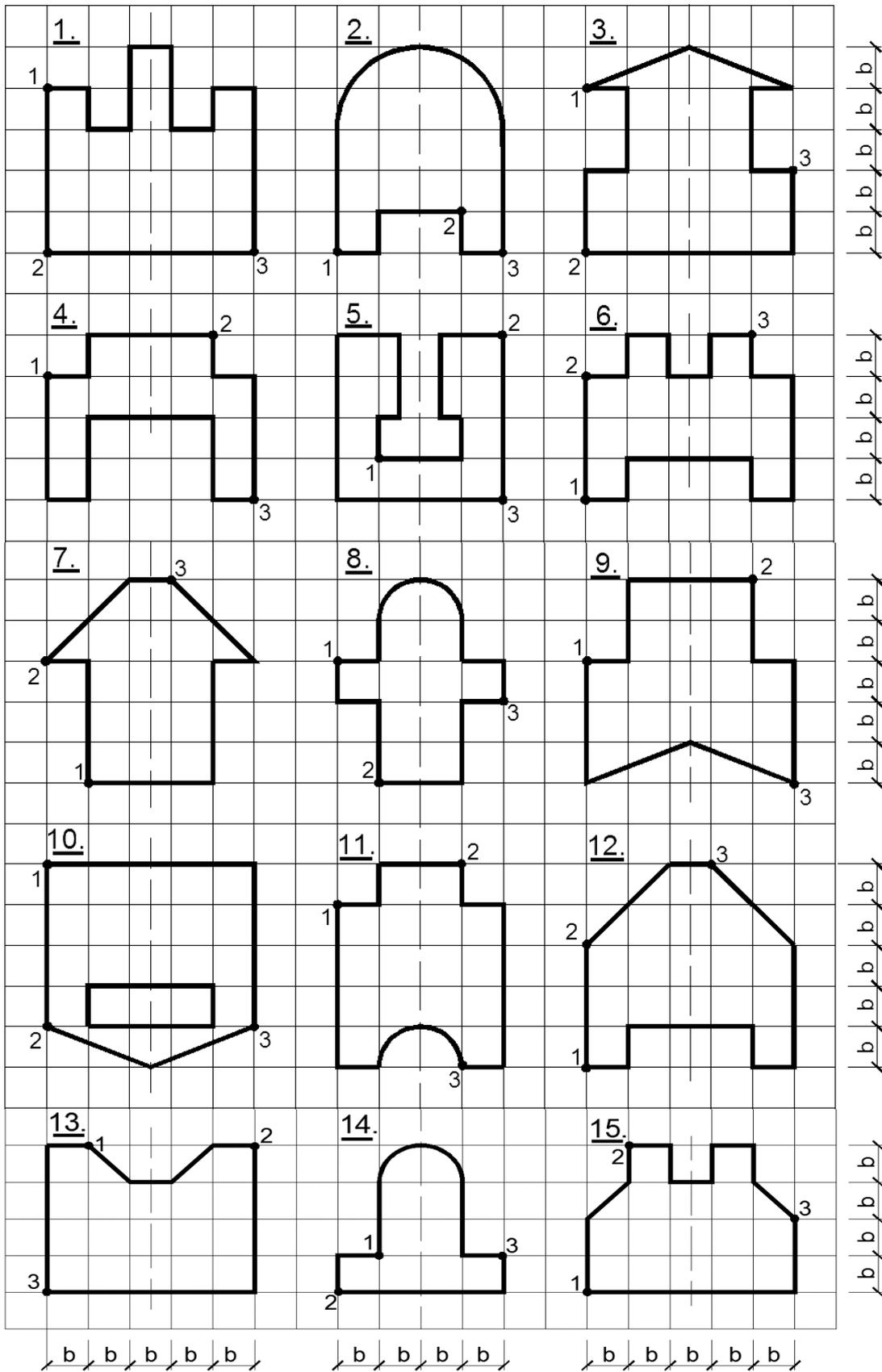
2.4. Задание к расчетно-проектировочной работе № 4 на тему «Расчет внецентренно сжатой колонны»

Для внецентренно сжатой колонны, поперечное сечение которой следует принять по заданному номеру схемы (см. п. 2.5), нагруженной силой F (величина которой и точка ее приложения принимаются по номеру варианта из таблицы 2.1 в п. 2.6), требуется:

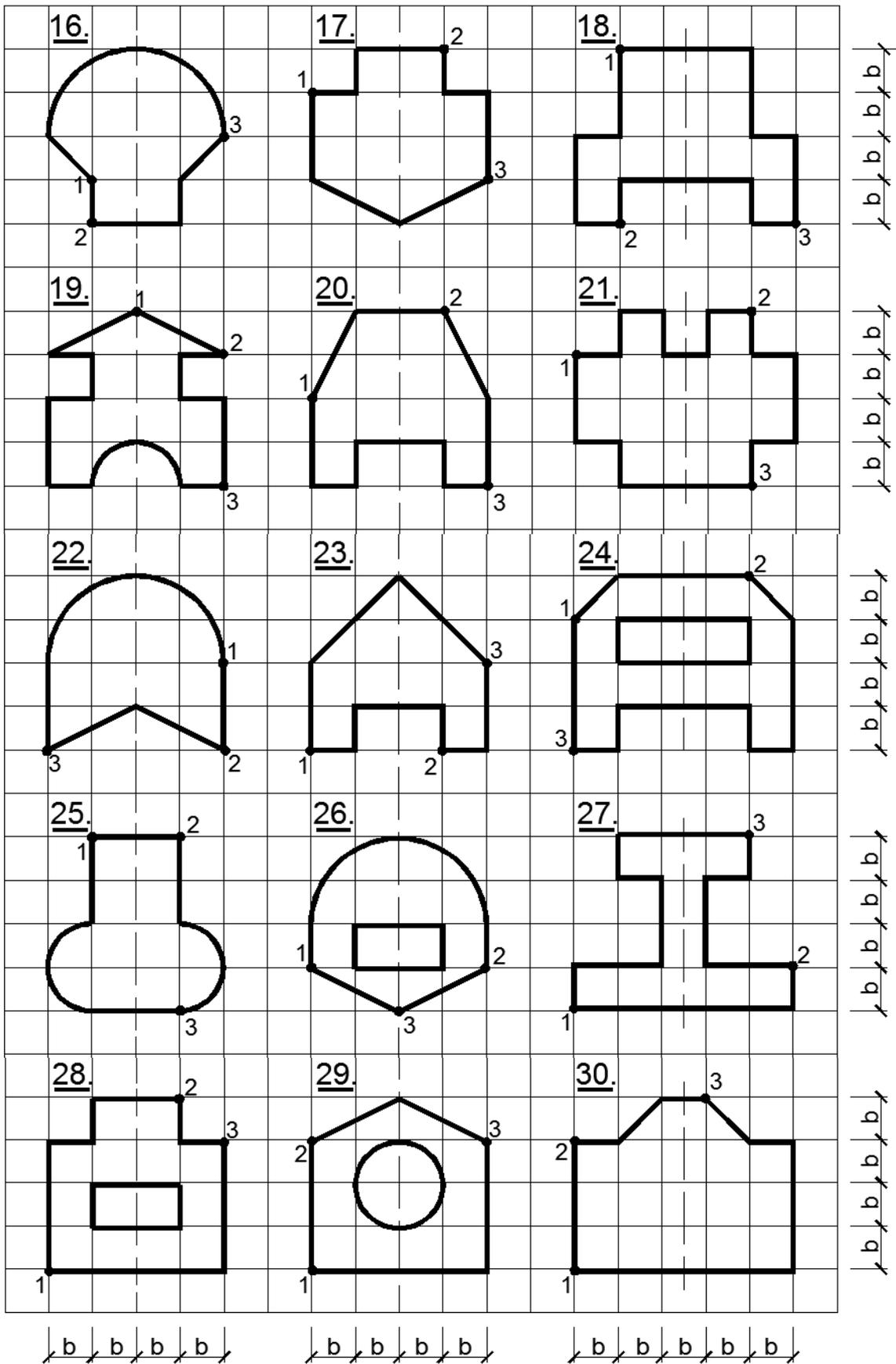
- 1) определить геометрические характеристики поперечного сечения;
- 2) определить положение нулевой линии и опасных точек сечения;
- 3) вычислить наибольшие сжимающее и растягивающее напряжения;
- 4) подобрать размеры поперечного сечения из расчета на прочность;
- 5) построить эпюру нормальных напряжений;
- 6) построить и исследовать ядро сечения.

Примечание. Расчетное сопротивление материала колонны на сжатие следует принять равным $R_c = 10$ Мпа, на растяжение – $R_p = 1$ Мпа,

2.5. Схемы поперечных сечений колонны и точки приложения сжимающей силы



Продолжение схем поперечных сечений колонны



2.6. Величины нагрузок и точки их приложения

Таблица 2.1

Номер варианта	F , кН	Точка приложения силы	Номер варианта	F , кН	Точка приложения силы
1	- 450	1	26	- 710	2
2	- 480	2	27	- 750	3
3	- 490	3	28	- 775	1
4	- 460	1	29	- 740	2
5	- 440	2	30	- 700	3
6	- 430	3	31	- 310	1
7	- 420	1	32	- 320	2
8	- 470	2	33	- 330	3
9	- 410	3	34	- 340	1
10	- 550	1	35	- 350	2
11	- 530	2	36	- 360	3
12	- 540	3	37	- 370	1
13	- 505	1	38	- 380	2
14	- 515	2	39	- 390	3
15	- 525	3	40	- 400	1
16	- 535	1	41	- 200	2
17	- 640	2	42	- 220	3
18	- 620	3	43	- 230	1
19	- 610	1	44	- 240	2
20	- 630	2	45	- 250	3
21	- 660	3	46	- 260	1
22	- 680	1	47	- 270	2
23	- 655	2	48	- 280	3
24	- 745	3	49	- 290	1
25	- 720	1	50	- 300	2

2.7. Пример расчета внецентренно сжатой колонны

Для колонны сложной формы поперечного сечения (см. рисунок 2.1), подверженной внецентренному сжатию внешней нагрузкой $F = - 250$ кН, выполним расчеты согласно позициям 1–6 в разделе 2.4.

Расчётные сопротивления материала колонны принимаем равными: на сжатие – $R_c = 10$ МПа, на растяжение – $R_p = 1$ МПа.

Решение

1. Определение геометрических характеристик поперечного сечения

Покажем поперечное сечение колонны в масштабе и выберем вспомогательные оси координат x , y . Разбиваем сечение на две простые фигуры (на полукруг и прямоугольник) и определяем координаты их центров тяжести и площади:

1. Для первой фигуры поперечного сечения (для полукруга):

$$x_1 = 3 \cdot b + \frac{4 \cdot b}{3 \cdot \pi} = 3,43b; \quad y_1 = 0; \quad A_1 = 1,57 \cdot b^2.$$

2. Для второй фигуры поперечного сечения (для прямоугольника):

$$x_2 = 1,5 \cdot b; \quad y_2 = 0; \quad A_2 = 6 \cdot b^2.$$

Ось x совпадает с осью симметрии сечения, следовательно, она является одной из главных центральных осей инерции.

Определим статический момент сечения относительно оси y :

$$S_y = S_y^I + S_y^{II} = A_1 x_1 + A_2 x_2 = 1,57b^2 \cdot 3,43b + 6b^2 \cdot 1,5b = 14,38b^3,$$

и общую площадь поперечного сечения:

$$A = A_1 + A_2 = 1,57b^2 + 6b^2 = 7,57b^2.$$

Вычислим вторую координату центра тяжести сечения x_c :

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{14,38b^3}{7,57b^2} = 1,9b.$$

Покажем на схеме сечения главные центральные оси x_c y_c и найдем координаты центров тяжести составляющих поперечное сечение простых фигур

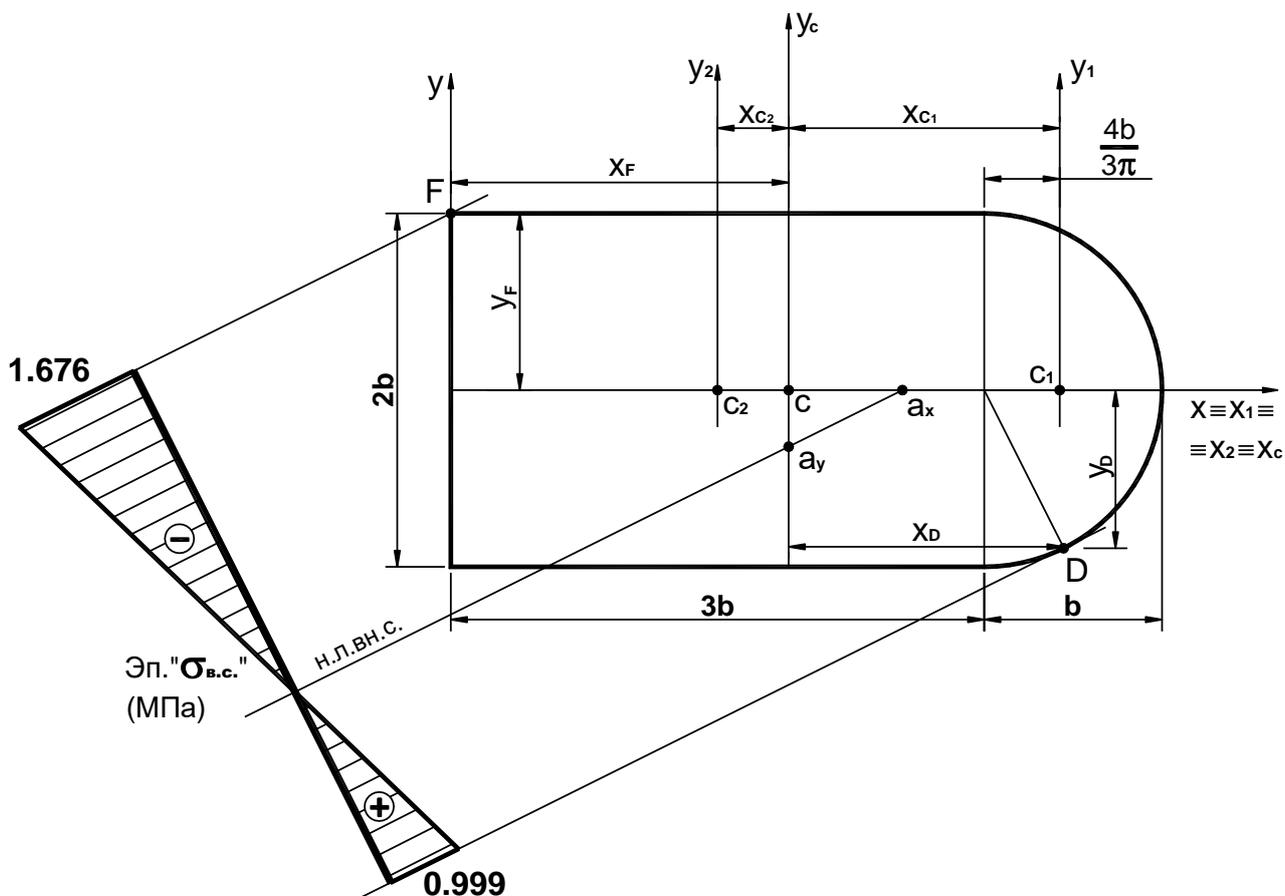


Рисунок 2.1. Схема сечения колонны, нулевая линия и эпюра напряжений

относительно главных центральных осей:

$$\begin{aligned}x_{c_1} &= x_1 - x_c = 1,53b; & y_{c_1} &= 0; \\x_{c_2} &= x_2 - x_c = -0,4b; & y_{c_2} &= 0.\end{aligned}$$

Вычислим главные центральные моменты инерции всего сечения:

$$I_{x_c} = I_{x_c}^I + I_{x_c}^{II} = \frac{\pi(2b)^4}{128} + \frac{3b(2b)^3}{12} = 2,39b^4;$$

$$\begin{aligned}I_{y_c} &= I_{y_c}^I + I_{y_c}^{II} = I_{y_c}^I + x_{c_1}^2 \cdot A_1 + I_{y_c}^{II} + x_{c_2}^2 \cdot A_2 = \\&= 0,11b^4 + (1,53b)^2 \cdot 1,57b^2 + \frac{3b(2b)^3}{12} + (-0,4b)^2 \cdot 6b^2 = 9,2b^4.\end{aligned}$$

Определим квадраты радиусов инерции:

$$i_x^2 = \frac{I_{x_c}}{A} = \frac{2,39b^4}{7,57b^2} = 0,32b^2; \quad i_y^2 = \frac{I_{y_c}}{A} = \frac{9,2b^4}{7,57b^2} = 1,22b^2.$$

2. Определение положения нулевой линии и опасных точек сечения

Координаты точки приложения внешней нагрузки: $x_F = -1,9b$; $y_F = b$.

Вычислим отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F} = \frac{1,22b^2}{-1,9b} = 0,64b; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_F} = \frac{0,32b^2}{b} = -0,32b.$$

Нулевая линия показана на рисунке. 2.1.

Для нахождения положения опасных точек проведем касательные к сечению, параллельные нулевой линии, и получим, что наиболее напряжёнными точками сечения будут точки, которые наиболее удалены от нулевой линии, то есть точки F и D . В точке F действует наибольшее сжимающее, а в точке D – наибольшее растягивающее напряжения.

3. Вычисление наибольших напряжений

Напряжения в опасных точках определим по формулам:

$$\sigma_F = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_F}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x_F}{i_y^2} \right); \quad \sigma_D = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_D}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x_D}{i_y^2} \right);$$

где: $x_F = -1,9b$; $y_F = b$; $x_D = (3b - x_c) + b \cdot \cos \alpha$; $y_D = -b \cdot \sin \alpha$;

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{a_x}{a_y} \right| = \frac{0,64b}{0,32b} = 2; \quad \alpha = 63,7^\circ; \quad \cos \alpha = 0,443; \quad \sin \alpha = 0,897;$$

$$x_D = 1,1b + 0,443b = 1,543b; \quad y_D = -0,897b.$$

4. Подбор размеров поперечного сечения из расчёта на прочность

Составим условие прочности для опасной точки в сжатой области сечения:

$$\begin{aligned}\sigma_F &= \frac{|F|}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_F}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x_F}{i_y^2} \right) \leq R_c; \\ \sigma_F &= \frac{|F|}{7,75b^2} \left(1 + \frac{b \cdot b}{0,32b^2} + \frac{1,9b \cdot 1,9b}{1,22b^2} \right) \leq R_c; \\ \sigma_F &= \frac{|F|}{7,75b^2} \cdot 7,136 = 0,943 \cdot \frac{|F|}{b^2} \leq R_c; \\ b &= \sqrt{\frac{0,943 \cdot |F|}{R_c}} = \sqrt{\frac{0,943 \cdot 250}{1}} = 15,35 \text{ см.}\end{aligned}$$

Составим условие прочности для наиболее удалённой точки в растянутой области сечения

$$\begin{aligned}\sigma_D &= \frac{|F|}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_D}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x_D}{i_y^2} \right) \leq R_p; \\ \sigma_D &= \frac{|F|}{7,57b^2} \left(1 + \frac{b(-0,897b)}{0,32b^2} + \frac{(-1,9b)^2 \cdot 1,543b}{1,22b^2} \right) \leq R_p; \\ \sigma_D &= \frac{|F|}{7,57b^2} \cdot 4,252 = 0,562 \cdot \frac{|F|}{b^2} \leq R_p; \\ \text{откуда: } b &= \sqrt{\frac{0,562 \cdot |F|}{R_p}} = \sqrt{\frac{0,562 \cdot 250}{0,1}} = 37,47 \text{ см.}\end{aligned}$$

За расчётную величину принимаем большее из двух полученных значение с округлением до 0,5 см: $b = 37,5$ см. Определим напряжения в опасных точках сечения и выполним проверку прочности:

$$\begin{aligned}\sigma_F &= \frac{|F|}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_F}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x_F}{i_y^2} \right) = \\ &= 0,943 \cdot \frac{|F|}{b^2} = 0,943 \cdot \frac{|-250|}{37,5^2} = 0,1676 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 1,676 \text{ МПа} < R_c = 10 \text{ МПа}; \\ \sigma_D &= \frac{|F|}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_D}{i_x^2} + \frac{x_F \cdot x_D}{i_y^2} \right) = \\ &= 0,562 \cdot \frac{|F|}{b^2} = 0,562 \cdot \frac{|-250|}{37,5^2} = 0,0999 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 0,999 \text{ МПа} < R_p = 1 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Эпюра напряжений при внецентренном сжатии показана на рисунке 2.1.

5. Построение и исследование ядра сечения

Для построения ядра сечения найдем отрезки, отсекаемые нулевыми линиями, описывающими сечение (касающимися его с разных сторон) (рисунок 2.2), после чего определим соответствующие этим нулевым линиям координаты точек приложения силы:

1) для нулевой линии 1–1, для которой $a_x = -1,9b$; $a_y = \infty$, будем иметь точку приложения силы 1 с координатами:

$$x_{F_1} = -\frac{i_y^2}{a_x} = -\frac{1,22b^2}{-1,9b} = 0,642b = 0,642 \cdot 37,5 = 24,08 \text{ см}; \quad y_{F_1} = -\frac{i_x^2}{a_y} = 0.$$

2) нулевой линии 2–2 ($a_x = \infty$, $a_y = -b$) соответствует точка 2:

$$x_{F_2} = -\frac{i_x^2}{a_x} = 0; \quad y_{F_2} = -\frac{i_y^2}{a_y} = -\frac{0,32b^2}{-b} = 0,32b = 0,32 \cdot 37,5 = 12 \text{ см}.$$

3) для нулевой линии 3–3 ($a_x = -2,1b$; $a_y = \infty$) будем иметь точку 3:

$$x_{F_3} = -\frac{i_y^2}{a_x} = -\frac{1,22b^2}{2,1b} = -0,579b = 0,579 \cdot 37,5 = -21,71 \text{ см}; \quad y_{F_3} = -\frac{i_x^2}{a_y} = 0.$$

4) нулевой линии 4–4, которая отсекает на главных центральных осях отрезки $a_x = \infty$, $a_y = b$, сила должна быть приложена в точке 4, для которой:

$$x_{F_4} = -\frac{i_y^2}{a_x} = 0; \quad y_{F_4} = -\frac{i_x^2}{a_y} = -\frac{0,32b^2}{b} = -0,32b = -12 \text{ см}.$$

Соединяя полученные точки прямыми или соответственно изменению формы сечения кривыми линиями, получаем ядро сечения (рисунок 2.2).

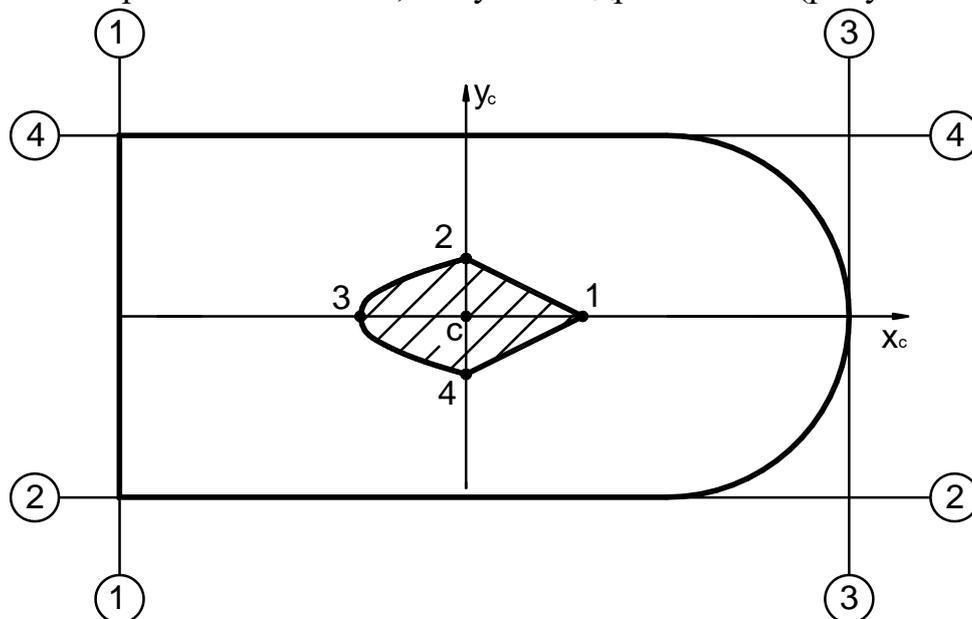


Рисунок 2.2. Построение ядра сечения

Для исследования ядра сечения по напряжениям приложим силу поочередно в точках С, I, II, III (рисунок 2.3) и вычислим напряжения в крайних

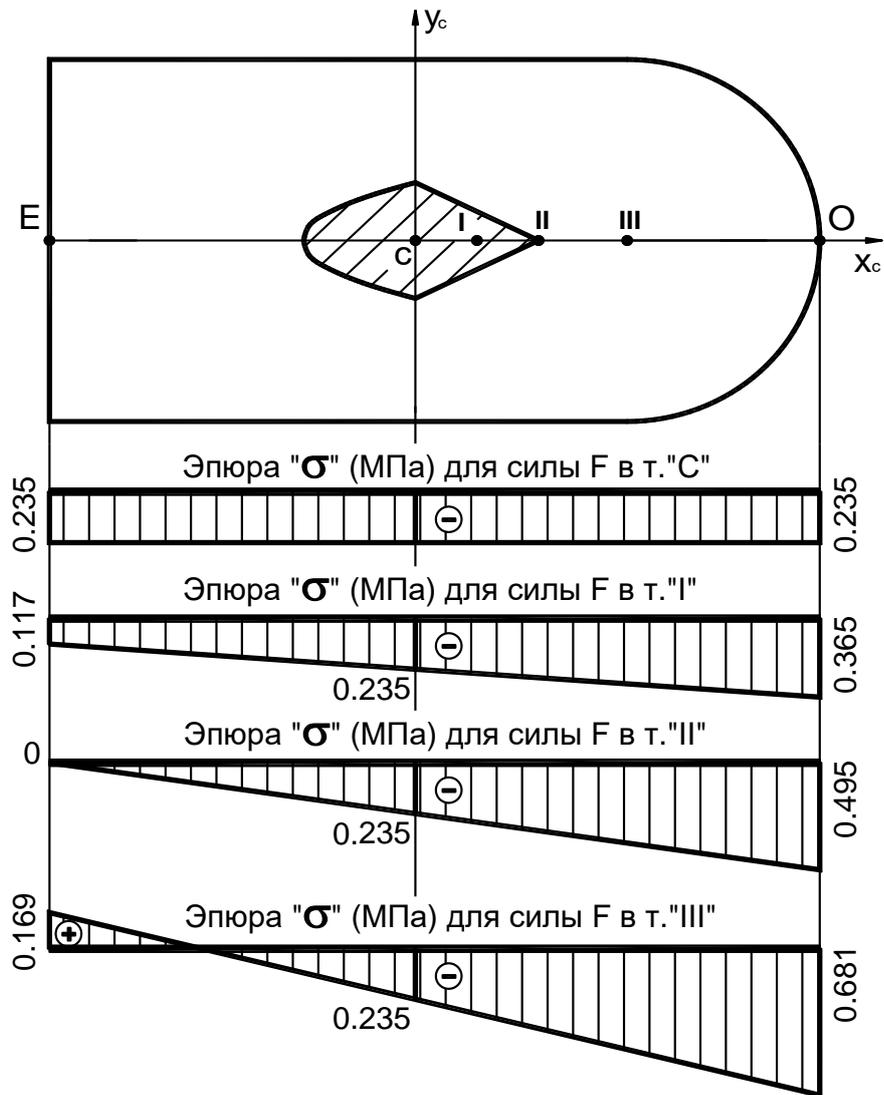


Рисунок 2.3. Исследование ядра сечения

точках сечения, где эти напряжения могут быть наибольшими – в точках E и O :

а) при приложении силы в центре тяжести сечения (в точке C) напряжения будут одинаковы по всему сечению:

$$\sigma_E = \sigma_O = \frac{F}{A} = \frac{-250}{7,57 \cdot 37,5^2} = 0,0235 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -0,235 \text{ МПа};$$

б) при приложении силы в области ядра сечения, например, в точке I с координатами $x_F = 0,32$ м; $y_F = 0$, напряжения в крайних точках будут равны:

$$\begin{aligned} \sigma_E &= \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F \cdot x_E}{i_y^2} \right) = \frac{-250}{7,57b^2} \left(1 + \frac{0,32b \cdot (-1,9b)}{1,22b^2} \right) = \\ &= \frac{-250 \cdot 0,5}{7,57 \cdot 37,5^2} = -0,0117 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -0,117 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\sigma_O = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F \cdot x_O}{i_y^2} \right) = \frac{-250}{7,57b^2} \left(1 + \frac{0,32b \cdot 2,1b}{1,22b^2} \right) =$$

$$= \frac{-250 \cdot 1,55}{7,57 \cdot 37,5^2} = -0,0365 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -0,365 \text{ МПа};$$

в) при приложении силы на границе ядра сечения – в точке II с координатами $x_F = 0,64$ м; $y_F = 0$, напряжения в крайних точках будут равны:

$$\sigma_E = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F + x_E}{i_y^2} \right) = \frac{-250}{7,57b^2} \left(1 + \frac{0,64b \cdot (-1,9b)}{1,22b^2} \right) = 0;$$

$$\begin{aligned} \sigma_O &= \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F \cdot x_O}{i_y^2} \right) = \frac{-250}{7,57b^2} \left(1 + \frac{0,64b \cdot 2,1b}{1,22b^2} \right) = \\ &= \frac{-250 \cdot 2,11}{7,57 \cdot 37,5^2} = -0,0495 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -0,495 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

г) для силы за ядром сечения, в точке III с координатами $x_F = 1$ м; $y_F = 0$, получим в крайних точках следующие напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_E &= \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F \cdot x_E}{i_y^2} \right) = \frac{-250}{7,57b^2} \left(1 + \frac{1,1b \cdot (-1,9b)}{1,22b^2} \right) = \\ &= \frac{-250 \cdot (-0,72)}{7,57 \cdot 37,5^2} = 0,0169 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 0,169 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_O &= \frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_F \cdot x_O}{i_y^2} \right) = \frac{-250}{7,57b^2} \left(1 + \frac{1,1b \cdot 2,1b}{1,22b^2} \right) = \\ &= \frac{-250 \cdot 2,90}{7,57 \cdot 37,5^2} = -0,0681 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -0,681 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

По полученным значениям строим эпюры напряжений (см. рисунок 2.3). Анализ этих эпюр при различных расположениях сжимающей силы F показывает, что наиболее выгодным является нагружение колонны центрально приложенной сжимающей силой. Для получения напряжений одного знака во всех точках поперечного сечения силу следует прикладывать в зоне ядра сечения.

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов / М. Д. Подскребко. – Мн. : Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
2. Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2004. – 376 с.
3. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин; под ред. А. В. Александрова. – М. : Высшая школа, 1995. – 560 с.
4. Заяц, В. Н. Сопротивление материалов / В. Н. Заяц, М. К. Балыкин, И. А. Голубев. – Минск : Изд-во БГПА, 1998. – 367 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТ	3
1. ПРЯМОЙ ИЗГИБ	3
1.1. Общие понятия	3
1.2. Расчет балок на прочность	4
1.2.1. Расчет по нормальным напряжениям	4
1.2.2. Расчет по касательным напряжениям	4
1.2.3. Определение внутренних сил	5
1.2.4. Расчет на прочность по главным напряжениям	7
1.3. Задание к расчетно-проектировочной работе № 3 «Расчет на прочность статически определимой двутавровой балки»	7
1.4. Схемы двутавровых балок с нагрузками	8
1.5. Исходные данные к расчету двутавровой балки	10
1.6. Пример расчета двутавровой балки	11
2. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ	19
2.1. Общие сведения	19
2.2. Косой изгиб	19
2.3. Внецентренное сжатие	20
2.4. Задание к расчетно-проектировочной работе № 4 на тему «Расчет внецентренно сжатой колонны»	21
2.5. Схемы поперечных сечений колонны и точки приложения сжимающей силы	22
2.6. Величины нагрузок и точки их приложения	24
2.7. Пример расчета внецентренно сжатой колонны	24
РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА	30

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:

Игнатюк Валерий Иванович
Хвисевич Виталий Михайлович
Черноиван Николай Вячеславович

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению расчетно-проектировочных работ
по курсу «Соппротивление материалов»
для студентов строительных специальностей

Ответственный за выпуск: Черноиван Н.В.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.

Подписано к печати 04.03.2019. Формат 60×84^{1/16}. Бумага «Снегурочка».
Усл.-печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,15. Заказ № 848. Тираж 70 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.