

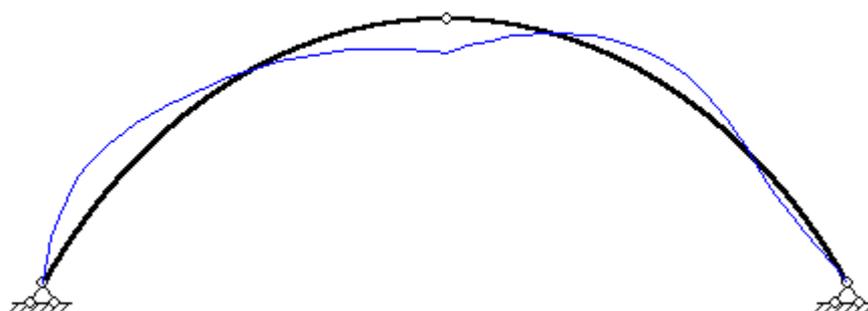
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЯ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

# Расчет трехшарнирных арок

Методические указания по дисциплине “Строительная механика”  
для студентов строительных специальностей  
дневной и заочной форм обучения



Брест 2007

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждения образования  
«Брестский государственный технический университет»  
Кафедра строительной механики

## Расчет трехшарнирных арок

Методические указания по дисциплине “Строительная механика”  
для студентов строительных специальностей  
дневной и заочной форм обучения

Брест 2007

УДК 624.04

Расчет трехшарнирных арок: Методические указания по дисциплине “Строительная механика” для студентов строительных специальностей дневной и заочной форм обучения / Сост. В.И. Игнатюк, С.В. Загуляев, В.В. Молош; УО “Брестский государственный технический университет”. – Брест, 2007. – 32 с., 24 ил., 2 табл.

Изложены основы расчета трехшарнирных арок на действие статических нагрузок. Представлены общие принципы расчета, расчет с использованием табличной формы и с помощью учебной компьютерной программы «Арка3». Рассмотрено построение линий влияния усилий в сечениях арок. Приведены примеры расчетов.

Предназначены для студентов строительных специальностей дневной и заочной форм обучения; могут использоваться в самостоятельной работе при изучении курса и при выполнении расчетно-графических заданий.

Составители: В.И. ИГНАТЮК, доцент, канд. техн. наук,  
С.В. ЗАГУЛЯЕВ, ассистент,  
В.В. МОЛОШ, ассистент

Рецензент: зам. директора филиала УП «БелНИИС» – «Научно-технический центр», канд. техн. наук В. Н. ДЕРКАЧ

© Учреждение образования  
«Брестский государственный технический университет» 2007

## 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ И ПРИНЦИПЫ ОБРАЗОВАНИЯ

Трехшарнирные арки состоят из двух дисков, криволинейных стержней, соединенных между собой шарниром, каждый из которых опирается на основание (на землю) обычно с помощью шарнирно неподвижных опор (рис. 1,а). Трехшарнирные арки статически определимы и относятся к распорным системам, в которых при действии только вертикальных нагрузок возникают и горизонтальные опорные реакции (горизонтальные составляющие опорных реакций), называемые распором.

В ряде случаев, для устранения действия распора на опоры, опорные шарниры арок соединяют горизонтальными стержнями – затяжками. В таких случаях одна из опор должна быть шарнирно подвижной. В результате получим трехшарнирную арку с затяжкой (рис. 1,б). Затяжка может быть расположена как на уровне опор, так и выше этого уровня (рис. 1,в).

Рассмотрим основные элементы арки (рис. 2). Опорные сечения называются пятнами. Расстояние между опорами называется пролетом арки. Сечение арки в точке  $C$ , в котором полуарки соединяются между собой шарниром, называется ключевым. Высоту ключевого сечения над линией опор называют стрелой подъема арки. Важной характеристикой арок является отношение стрелы их подъема к пролету ( $f/l$ ), в зависимости от которого арки разделяют на пологие (при малых значениях  $f/l$ ) и крутые (при больших значениях  $f/l$ ). Очертание осей арок характеризуется зависимостями изменения осей, которые могут быть самыми разнообразными – круговыми, параболическими, синусоидальными, стрельчатыми и т. д.

Число неизвестных составляющих опорных реакций в арках равно четырем и, значит, трех уравнений равновесия арки в целом недостаточно для определения всех опорных реакций в ней.

Дополнительно составляют уравнения равновесия для левой или правой (относительно шарнира  $C$ ) полуарок. Заметим, что общее число неизвестных, включающее опорные реакции и внутренние реакции в шарнирах, соединяющих полуарки, в арках как статически определимых системах равно числу независимых уравнений равновесия, которые можно составить для арки в целом и ее

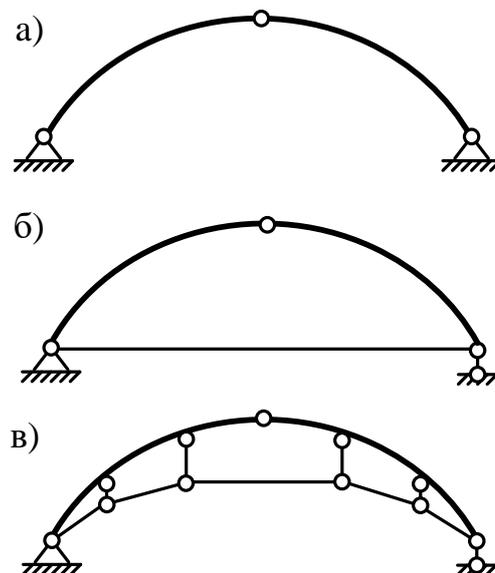


Рис. 1

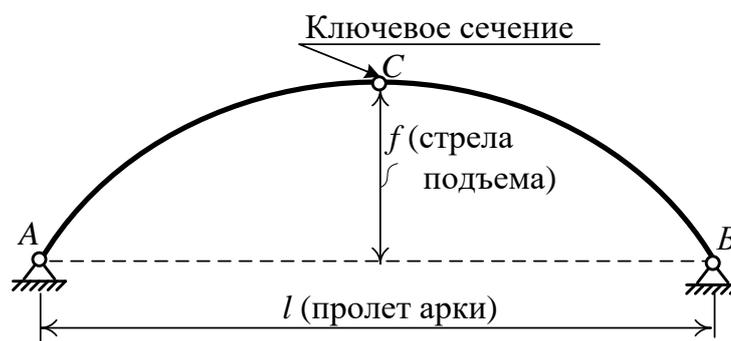


Рис. 2

полуарок. И число этих неизвестных и уравнения равновесия для арки, представленной на рис. 2, равно шести.

Определение внутренних сил и построение их эпюр в трехшарнирных арках после определения опорных реакций практически не отличается от соответствующих процедур для рам.

## 2. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК

Рассмотрим расчет трехшарнирных арок на действие вертикальных нагрузок на примере симметричной арки с опорами в одном уровне (рис. 3,а). В арке неизвестны четыре составляющие опорных реакций. Обозначим вертикальные составляющие через  $R_A$ ,  $R_B$ , а горизонтальные, соответственно, через  $H_A$  и  $H_B$ . Для определения этих реакций используем условия равновесия плоской системы сил.

Вертикальные составляющие реакций определим из уравнений равновесия арки, составив суммы моментов всех сил относительно опорных точек  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad -R_B l + \sum_{i=1}^{n_F} F_i a_{F_i} = 0; \quad R_B = \frac{\sum_{i=1}^{n_F} F_i a_{F_i}}{l}; \\ \sum M_B = 0; \quad R_A l - \sum_{i=1}^{n_F} F_i b_{F_i} = 0; \quad R_A = \frac{\sum_{i=1}^{n_F} F_i b_{F_i}}{l}. \end{aligned}$$

где  $n_F$  – число всех сил, действующих на арку.

Нетрудно заметить, что реакции  $R_A$  и  $R_B$  в опорах арки определяются аналогично опорным реакциям в простой двухопорной балке, нагруженной той же нагрузкой (рис. 3,б). Получаем, что

$$R_A = R_A^0; \quad R_B = R_B^0, \quad (1)$$

где  $R_A^0$  и  $R_B^0$  – опорные реакции соответствующей двухопорной балки.

Для определения горизонтальных составляющих опорных реакций  $H_A$  и  $H_B$  (распора арки) рассмотрим равновесие полуарок  $AC$  и  $CB$ . Составив уравнения равновесия сил, действующих соответственно на левую и правую полуарки, в виде сумм моментов их относительно шарнира  $C$ , получим:

$$\begin{aligned} \sum M_C^{лев} = 0; \quad R_A \frac{l}{2} - \sum_{i=1}^{n_F^{лев}} F_i \left( \frac{l}{2} - a_{F_i} \right) - H_A f = 0; \quad H_A = \frac{R_A \frac{l}{2} - \sum_{i=1}^{n_F^{лев}} F_i \left( \frac{l}{2} - a_{F_i} \right)}{f}; \\ \sum M_C^{прав} = 0; \quad -R_B \frac{l}{2} + \sum_{i=1}^{n_F^{прав}} F_i \left( \frac{l}{2} - b_{F_i} \right) + H_B f = 0; \quad H_B = \frac{R_B \frac{l}{2} - \sum_{i=1}^{n_F^{прав}} F_i \left( \frac{l}{2} - b_{F_i} \right)}{f}. \quad (2) \end{aligned}$$

Если арка находится под действием только вертикальных нагрузок, как в рассматриваемом случае (рис. 3,а), то из уравнения проекций сил на горизонтальную ось ( $\sum X = 0$ ) получим, что горизонтальные составляющие опорных реакций для левой и правой опор одинаковы

$$H_A = H_B = H.$$

Числители в выражениях (2) представляют собой изгибающий момент в сечении С соответствующей двухопорной балки. Поэтому выражение для определения распора можно записать в виде

$$H = \frac{M_C^0}{f}, \quad (3)$$

где  $M_C^0$  – изгибающий момент в ключевом сечении С соответствующей двухопорной балки.

Из формулы (3) видно, что чем больше стрела подъема арки  $f$ , тем меньше распор. Следует помнить, что данная формула справедлива при действии на арку только вертикальных нагрузок.

Для определения внутренних сил в арке воспользуемся методом сечений. Рассечем арку в месте определения усилий и рассмотрим одну из ее частей. Действие второй части на рассматриваемую передадим через внутренние силы в сечении – изгибающий момент, поперечную и продольную силы, которые приложим к рассматриваемой части в месте разреза. По отношению к рассматриваемой части арки эти усилия будут выступать в качестве внешних сил. Рассмотрев после этого равновесие отсеченной части, найдем внутренние силы  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  в сечении арки.

Обозначим координаты центра тяжести произвольного сечения  $x$  в арке через  $x$  и  $y$ , а угол наклона касательной к оси арки (и соответственно угол между нормалью к оси арки и вертикалью) в сечении  $x$  через  $\varphi_x$  (рис. 3,а).

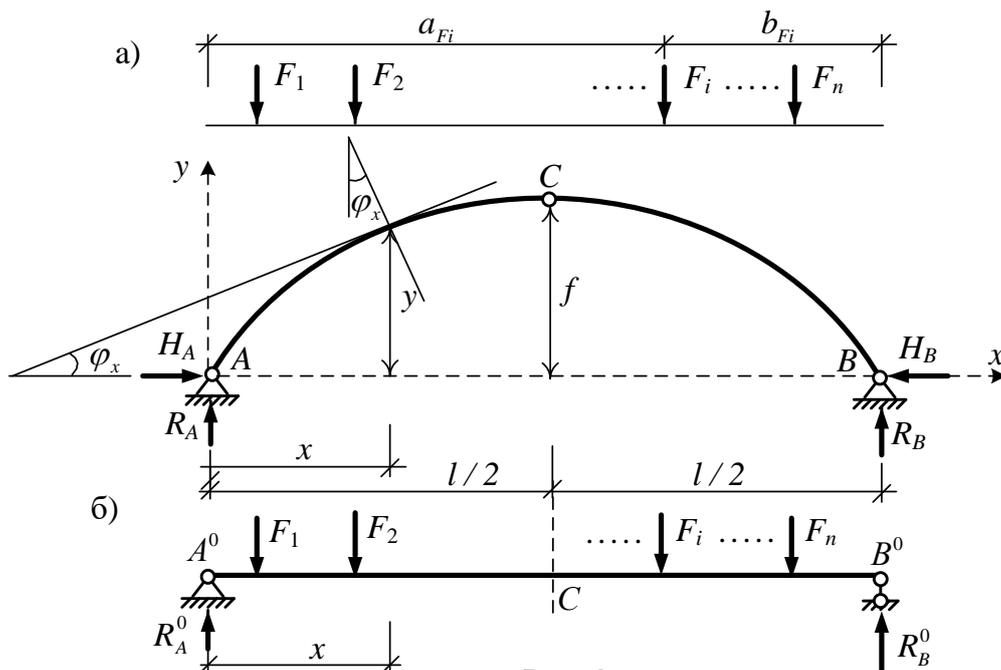


Рис. 3

Из уравнения равновесия левой части арки получим, что изгибающий момент в сечении будет равен алгебраической сумме моментов всех сил, действующих на эту часть относительно центра тяжести данного сечения

$$M_x = M_x^{лев} = R_A x - \sum_{i=1}^{n_F} F_i (x - a_{Fi}) - H_A y. \quad (4)$$

Два первых слагаемых этого выражения представляют собой изгибающий момент в сечении  $x$  соответствующей двухопорной балки (рис. 3,б), который будем называть балочным. Тогда выражение (4) получим в виде

$$M_x = M_x^0 - H y. \quad (5)$$

Видно, что изгибающие моменты в арке при действии вертикальных нагрузок одного направления будут меньше изгибающих моментов в соответствующей двухопорной балке на значения изгибающих моментов, вызываемых в сечениях распором  $H$ . Следует заметить, что разгружающее влияние распора в арках достаточно велико, и именно в этом состоит преимущество арочных систем в сравнении с балками.

Из (5) следует, что эпюра изгибающих моментов в арке может быть построена сложением двух эпюр, одна из которых является эпюрой изгибающих моментов в соответствующей двухопорной балке ( $M^0$ ), а вторая представляет собой эпюру, получаемую умножением ординат оси арки на значение распора (рис. 4).

Эпюры усилий в арке могут строиться как непосредственно на оси арки, так и на горизонтальной оси, которая в этом случае рассматривается как проекция оси арки на горизонталь.

Например, для арки параболического очертания, нагруженной одной сосредоточенной силой (рис. 4,а), эпюра изгибающих моментов в соответствующей двухопорной балке показана на рис. 4,б, эпюра  $H y$  – на рис. 4,в, а окончательная эпюра изгибающих моментов в арке, построенная на горизонтальной оси, представлена на рис. 4,г.

Поперечная сила в сечении арки равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, включая опорные реакции, действующих по одну сторону от сечения, на нормаль к оси арки в этом сечении. Для сечения  $x$  (рис. 3,а), рассматривая левую часть арки, получим

$$Q_x = R_A \cos \varphi_x - F_1 \cos \varphi_x - F_2 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x = (R_A - F_1 - F_2) \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x.$$

Выражение в скобках  $R_A - F_1 - F_2$  представляет собой балочную поперечную силу, то есть поперечную силу в соответствующей двухопорной балке на расстоянии  $x$  от левой опоры. Обозначив балочную поперечную силу через  $Q_x^0$ , получим для определения поперечной силы в произвольном сечении арки следующее выражение

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x. \quad (6)$$

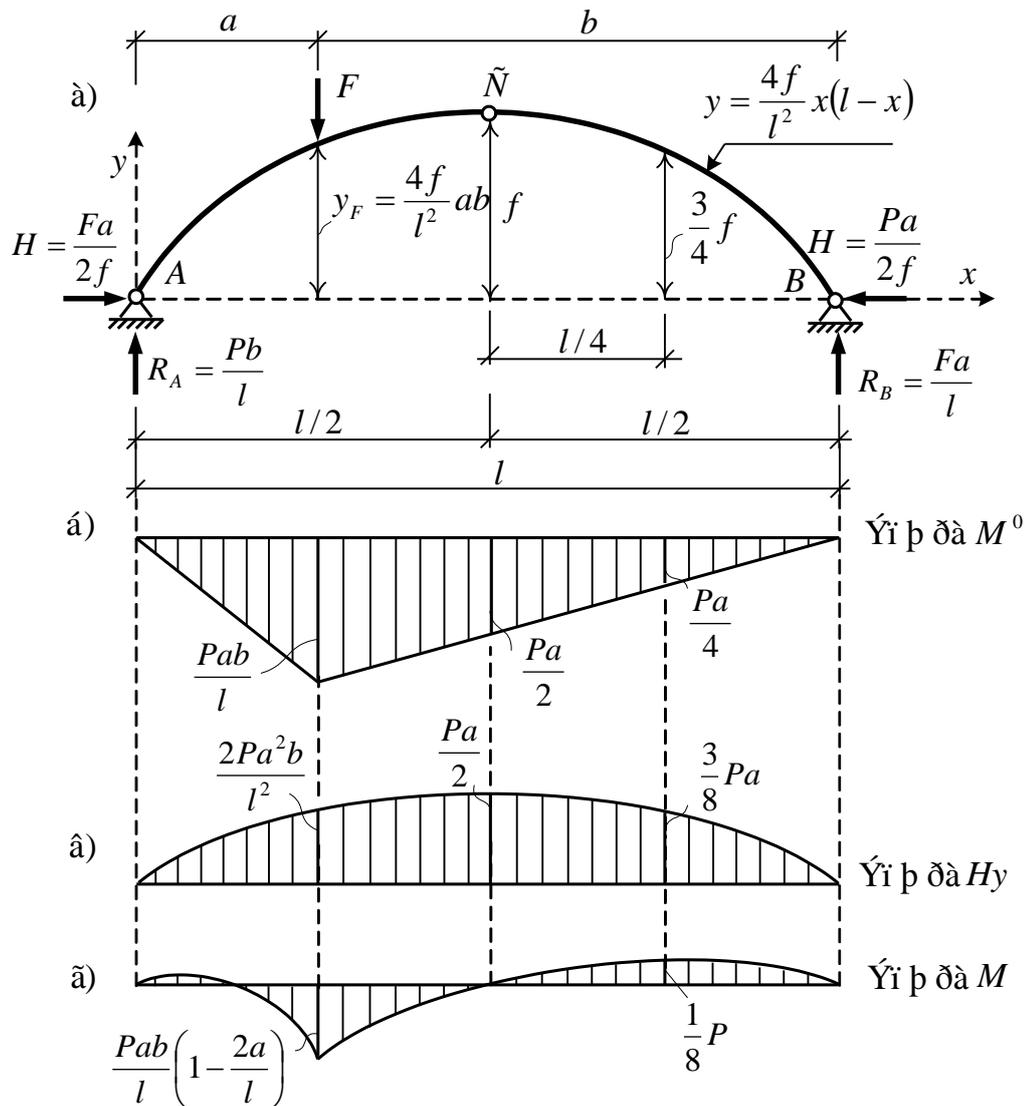


Рис. 4

Продольная сила в поперечном сечении арки равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, включая опорные реакции, действующих по одну сторону от сечения, на касательную к оси арки в рассматриваемом сечении. Для произвольного сечения  $x$  (рис. 3,а), рассматривая левую часть арки и учитывая, что продольную силу принимаем положительной, если она вызывает растяжение, получим

$$N_x = -R_A \sin \varphi_x + F_1 \sin \varphi_x + F_2 \sin \varphi_x - H \cos \varphi_x = -(R_A - F_1 - F_2) \sin \varphi_x - H \cos \varphi_x.$$

С учетом того, что выражение в скобках представляет балочную поперечную силу в сечении  $x$  ( $Q_x^0$ ), общее выражение для определения продольных сил в сечениях арок при действии на них только вертикальных нагрузок можно представить в виде

$$N_x = -(Q_x^0 \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x). \quad (7)$$

Рассмотрим особенности расчета арок с затяжками (рис. 1,б,в). Определение опорных реакций и усилий в сечениях таких арок производится аналогично изложенному выше. Различие связано с тем, что распор здесь воспринимают не горизонтальные опорные связи, а затяжка. Для определения усилия в затяжке проведем сечение I–I через ключевой шарнир  $C$  (рис. 5) и рассмотрим равновесие одной из частей арки, например, левой. Составим уравнение суммы моментов сил для рассматриваемой части арки относительно ключевого шарнира  $C$ :

$$\sum M_C^{лев} = 0; \quad R_A \frac{l}{2} - P \left( \frac{l}{2} - a \right) - H_{зат} f = 0;$$

Два первых слагаемых в уравнении представляют собой балочный момент в сечении  $C$  соответствующей двухопорной балки, поэтому для усилия в затяжке получаем такое же выражение, как и для распора в обычной трехшарнирной арке

$$H_{зат} = \frac{M_C^0}{f}.$$

Для внутренних сил в сечениях арок с затяжками будут справедливы выражения (5) – (7), если вместо  $H$  подставить  $H_{зат}$ .

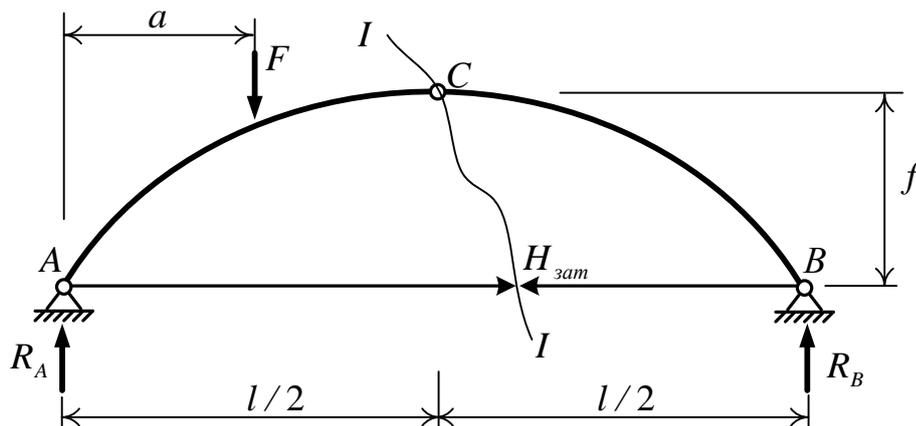


Рис. 5

Учитывая криволинейный характер изменения осей арок (ординат  $y$ ) и функций  $\sin \varphi_x$ ,  $\cos \varphi_x$ , эпюры усилий  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  в арках на всех участках независимо от вида нагрузок будут всегда криволинейными. Поэтому точность представления эпюр  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  в арках будет зависеть от числа ординат, по которым эти эпюры могут быть построены. Чем больше будет этих ординат, тем точнее будут изображены эпюры. Обычно расчетные сечения выбираются путем разбиения длины пролета на определенное число частей, чаще всего равных друг другу. Вычисления ординат эпюр усилий в расчетных сечениях представляют собой повторяющиеся вычисления, поэтому при расчете вручную их удобно выполнять, используя табличную форму записи расчетных величин, промежуточных и окончательных результатов.

### 3. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ В ТАБЛИЧНОЙ ФОРМЕ

Рассмотрим трехшарнирную арку кругового очертания, представленную на рис. 6. Вначале определим геометрические характеристики арки. Изменение оси круговой арки определяется зависимостью

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f, \quad \text{где} \quad R = \frac{4f^2 + l^2}{8f} = \frac{4 \cdot 6^2 + 18^2}{8 \cdot 6} = 9,75 \text{ м}. \quad (8)$$

Для ординат оси арки получим выражение

$$y = \sqrt{9,75^2 - (9 - x)^2} - 9,75 + 6 = \sqrt{95,063 - (9 - x)^2} - 3,75. \quad (9)$$

Разобьем пролет арки на 12 частей с  $\Delta x = l/12 = 18/12 = 1,5 \text{ м}$ . В результате получим 13 расчетных точек, начиная с опорной точки  $A$  и кончая опорной точкой  $B$ , нумерация (обозначения) и абсциссы ( $x$ ) которых представлены на рис. 6 и в столбцах 1 и 2 таблицы 1. Подставляя значения абсцисс в выражение (9), найдем ординаты расчетных сечений, лежащих на оси арки. Например, для сечений 2 ( $x_2 = 3 \text{ м}$ ) и 7 ( $x_7 = 12 \text{ м}$ ) получим:

$$y_2 = \sqrt{95,063 - (9 - 3)^2} - 3,75 = 3,935 \text{ м}; \quad y_7 = \sqrt{95,063 - (9 - 12)^2} - 3,75 = 5,527 \text{ м}.$$

Аналогично вычисляются ординаты остальных расчетных сечений (см. столбец 3 в таблице 1).

Тригонометрические функции угла наклона касательной к оси стержня круговой арки определяются по выражениям:

$$\sin \varphi = \frac{l - 2x}{2R}; \quad \cos \varphi = \frac{y + R - f}{R}. \quad (10)$$

Например, для тех же сечений 2 и 7 получим:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_2 &= \frac{18 - 2 \cdot 3}{2 \cdot 9,75} = 0,6154; & \cos \varphi_2 &= \frac{3,935 + 9,75 - 6}{9,75} = 0,7882; \\ \sin \varphi_7 &= \frac{18 - 2 \cdot 12}{2 \cdot 9,75} = -0,3077; & \cos \varphi_7 &= \frac{5,527 + 9,75 - 6}{9,75} = 0,9515. \end{aligned}$$

Вычисленные аналогично тригонометрические функции  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  для всех расчетных сечений арки представлены в таблице 1 (столбцы 4 и 5).

Прежде, чем приступать к расчету внутренних сил в расчетных сечениях арки, необходимо определить опорные реакции (составляющие опорных реакций). Вертикальные реакции найдем, составив суммы моментов всех сил, действующих на арку, относительно опорных шарниров – точек  $A$  и  $B$ :

$$\sum \dot{M}_A = 0; \quad 12 \cdot 1,5 + (1,5 \cdot 6) \cdot \left(1,5 + \frac{1}{2} \cdot 6\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6\right) \cdot \left(1,5 + \frac{1}{3} \cdot 6\right) +$$

$$\begin{aligned}
 &+ 9 \cdot 7,5 + 16 \cdot 14 + (3 \cdot 4) \cdot 16 - R_B \cdot 18 = 0; & R_B = 31,861 \text{ êÍ } ; \\
 \sum \dot{I}_B = 0; & -12 \cdot 16,5 - (1,5 \cdot 6) \cdot (10,5 + 3) - \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6\right) \cdot \left(10,5 + \frac{2}{3} \cdot 6\right) - \\
 &- 9 \cdot 10,5 - 16 \cdot 4 - (3 \cdot 4) \cdot 2 + R_A \cdot 18 = 0; & R_A = 35,139 \text{ êÍ.}
 \end{aligned}$$

Проверка правильности расчета вертикальных реакций:

$$\sum Y = 0; \quad 31,861 + 35,139 - 12 - 9 - 16 - \frac{1}{2}(4,5 + 1,5) \cdot 6 - (3 \cdot 4) = 67 - 67 = 0.$$

Распор найдем, составив уравнение равновесия, например, левой полуарки в виде суммы моментов всех сил, действующих на эту полуарку, относительно ключевого шарнира С:

$$\begin{aligned}
 \sum \dot{I}_{\bar{N}}^{\ddot{a}\dot{a}} = 0; & \quad 35,139 \cdot 9 - 12 \cdot 7,5 - (1,5 \cdot 6) \cdot 4,5 - \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6\right) \cdot \left(1,5 + \frac{2}{3} \cdot 6\right) - \\
 & - 9 \cdot 1,5 - H_A \cdot 6 = 0; \quad H_A = 20,459 \text{ êÍ.}
 \end{aligned}$$

При действии на арку только вертикальных нагрузок горизонтальная составляющая реакции правой опоры будет такой же, как и горизонтальная составляющая реакции левой опоры:

$$\sum X = 0; \quad H_A - H_B = 0; \quad H_A = H_B = H,$$

то есть распор системы  $H$  равен 20,459 кН.

Для проверки правильности определения распора рассмотрим равновесие правой полуарки:

$$\sum \dot{I}_{\bar{N}}^{\ddot{a}\dot{a}} = 0; \quad -31,861 \cdot 9 + 16 \cdot 5 + (3 \cdot 4) \cdot 7 + H \cdot 6 = 0; \quad H = 20,459 \text{ êÍ.}$$

Теперь можем перейти к расчету усилий в сечениях арки. Это можно делать на основе общего подхода определения усилий.

При определении изгибающих моментов необходимо составить сумму моментов всех сил с одной стороны от сечения относительно центра тяжести сечения.

Поперечная сила в сечении равна алгебраической сумме проекций всех сил с одной стороны от сечения на ось, нормальную к оси стержня в сечении.

Продольная сила равна сумме проекций указанных сил на прямую, касательную к оси стержня в сечении.

Например, изгибающий момент в сечении 2, рассматривая левую часть арки, получим в виде:

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_2^{\ddot{a}\dot{a}} = & 35,139 \cdot 3 - 12 \cdot 1,5 - (3,75 \cdot 1,5) \frac{1,5}{2} - \left(\frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 1,5\right) \frac{2}{3} \cdot 1,5 - \\
 & - 20,459 \cdot 3,935 = 2,128 \text{ êÍ} \cdot \dot{i} ,
 \end{aligned}$$

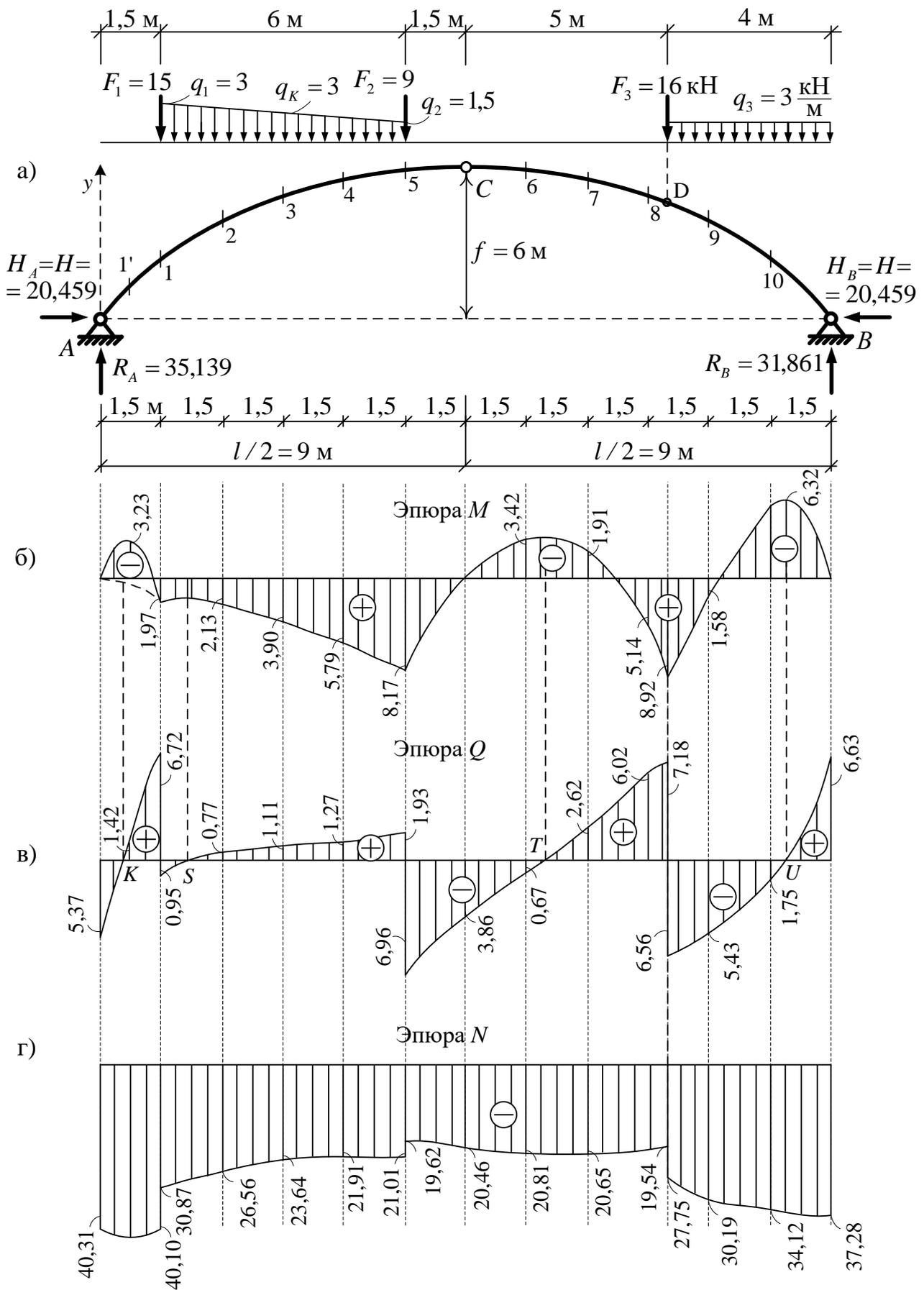


Рис. 6



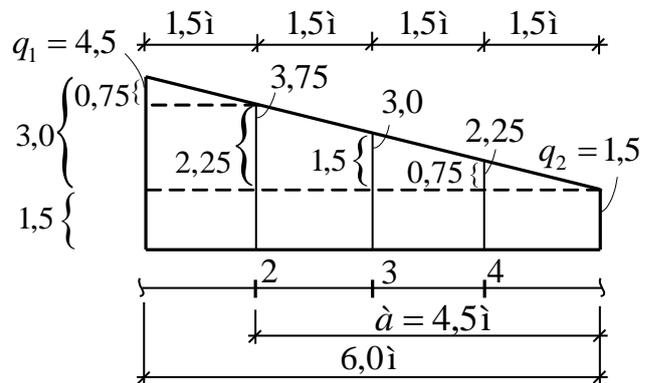
где интенсивность трапециевидально распределенной нагрузки в сечении 2 равна 3,75 кН/м, что следует из геометрических соображений (рис. 7) и вычисления приращений интенсивности нагрузки в промежуточных точках:

$$\frac{3,0}{6} = \frac{\Delta q}{a}; \quad \Delta q = \frac{3}{6}a = 0,5a;$$

для сеч. 2  $a = 4,5 \text{ м}$   $\Rightarrow \Delta q = 2,25 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ;

для сеч. 3  $a = 3 \text{ м}$   $\Rightarrow \Delta q = 1,5 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ;

для сеч. 4  $a = 1,5 \text{ м}$   $\Rightarrow \Delta q = 0,75 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ .



Растянутые волокна в сечении 2 находятся снизу сечения (рис. 8,а).

Рис. 7. Трапециевидально распределенная нагрузка

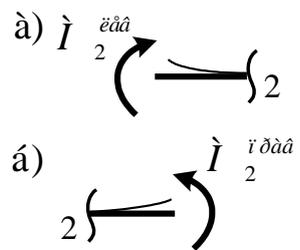
Поперечная и продольные силы в сечении 2 равны:

$$Q_2^{\text{зад}} = 35,139 \cdot 0,7882 - 12 \cdot 0,7882 - \frac{1}{2}(4,5 + 3,75) \cdot 1,5 \cdot 0,7882 - 20,459 \cdot 0,6154 = 0,771 \text{ кН};$$

$$N_2^{\text{зад}} = -35,139 \cdot 0,6154 + 12 \cdot 0,6154 + \frac{1}{2}(4,5 + 3,75) \cdot 1,5 \cdot 0,6154 - 20,459 \cdot 0,7882 = -26,557 \text{ кН}.$$

Для проверки полученных значений рассмотрим правую часть арки:

$$I_2^{\text{зад}} = (1,5 \cdot 4,5) \frac{4,5}{2} + \left( \frac{1}{2} 2,25 \cdot 4,5 \right) \cdot \frac{1}{3} 4,5 + 9 \cdot 4,5 + 16 \cdot 11 + (3 \cdot 4) \cdot 13 + 20,459 \cdot 3,935 - 31,861 \cdot 15 = -2,128 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



Значение изгибающего момента здесь такое же, как и из расчета левой части арки, и растягиваются, как видно из рис. 8,б, нижние волокна сечения. Таким образом, результаты определения изгибающего момента сечения 2 при рассмотрении левой и правой частей арки полностью совпадают, что и должно быть.

Рис. 8

$$Q_2^{\text{зад}} = (1,5 \cdot 4,5) \cdot 0,7882 + \left( \frac{1}{2} 2,25 \cdot 4,5 \right) \cdot 0,7882 + 9 \cdot 0,7882 + 16 \cdot 0,7882 + (3 \cdot 4) \cdot 0,7882 - 31,861 \cdot 0,7882 - 20,459 \cdot 0,6154 = 0,771 \text{ кН};$$

$$N_2^{\text{зад}} = -(1,5 \cdot 4,5) \cdot 0,6154 - \left( \frac{1}{2} 2,25 \cdot 4,5 \right) \cdot 0,6154 - 9 \cdot 0,6154 - 16 \cdot 0,6154 + 31,861 \cdot 0,6154 - 20,459 \cdot 0,7882 = -26,557 \text{ кН}.$$

Оба значения равны величинам, полученным выше из расчета левой части арки.

Усилия в сечениях арки можно также определять, используя выражения (5) – (7), и часто это удобнее, чем применение общего подхода. В этом случае предварительно необходимо получить значения балочных изгибающих моментов  $M^0$  и поперечных сил  $Q^0$ .

Найдем с использованием такого подхода усилия в сечении 7.

Значения балочных изгибающего момента (положительными приняты изгибающие моменты, вызывающие растяжение нижних волокон) и поперечной силы в сечении 7 из рассмотрения правой части балки (рис. 9) равны:

$$\dot{I}_7^{0(i\delta\lambda\lambda)} = -16 \cdot 2 - (4 \cdot 3) \cdot 4 + 31,861 \cdot 6 = 111,166 \text{ êÍ } \cdot \text{ì};$$

$$Q_7^{0(i\delta\lambda\lambda)} = 16 + 3 \cdot 4 - 31,861 = -3,861 \text{ êÍ } ;$$

Эпюры балочных усилий  $M^0$  и  $Q^0$  для всей арки с учетом принятой разбивки пролета на 12 частей представлены на рис. 9.

Теперь вычислим усилия в сечении 7 арки по формулам (5) – (7):

$$\dot{I}_7 = \dot{I}_7^0 - H \cdot y_7 = 111,166 - 20,459 \cdot 5,527 = -1,911 \text{ êÍ } \cdot \text{ì};$$

$$Q_7 = Q_7^0 \cos \varphi_7 - H \sin \varphi_7 = (-3,861) \cdot 0,9515 - 20,459 \cdot (-0,3077) = 2,621 \text{ êÍ } ;$$

$$N_7 = -(Q_7^0 \sin \varphi_7 + H \cos \varphi_7) = -[(-3,861) \cdot (-0,3077) + 20,459 \cdot 0,9515] = -20,654 \text{ êÍ } .$$

Аналогично, с использованием общего подхода определения усилий в сечениях, или с использованием выражений (5) – (7), что удобнее, можно выполнить расчет усилий во всех расчетных (а при необходимости, в характерных и дополнительных) сечениях арки. Промежуточные и окончательные результаты расчетов при этом удобно свести в таблицу – см. табл. 1. Заметим, что для сечений под сосредоточенными силами (моментами), в которых происходит скачок в изменениях эпюр усилий, необходимо вычислять все расчетные величины, по существу, в двух сечениях – слева и справа от сосредоточенных нагрузок (см. табл. 1 столбцы 1, 9, 10, 12, 13,15).

Для построения эпюр усилий их ординаты откладываются во всех расчетных и характерных сечениях, и последовательно соединяются между собой плавными кривыми, которые будут представлять изменение усилий во всех промежуточных точках. Естественно, чем больше будет расчетных сечений, тем точнее можно представить эпюры усилий. Если расчетных точек немного, как в рассматриваемом случае, то на отдельных участках, на которых усилия изменяются достаточно резко, соединение рядом расположенных ординат плавными кривыми может приводить к результату, который будет далек от действительного характера изменения усилий. Например, для рассматриваемой арки при построении эпюры изгибающих моментов на участке А–1, на первый

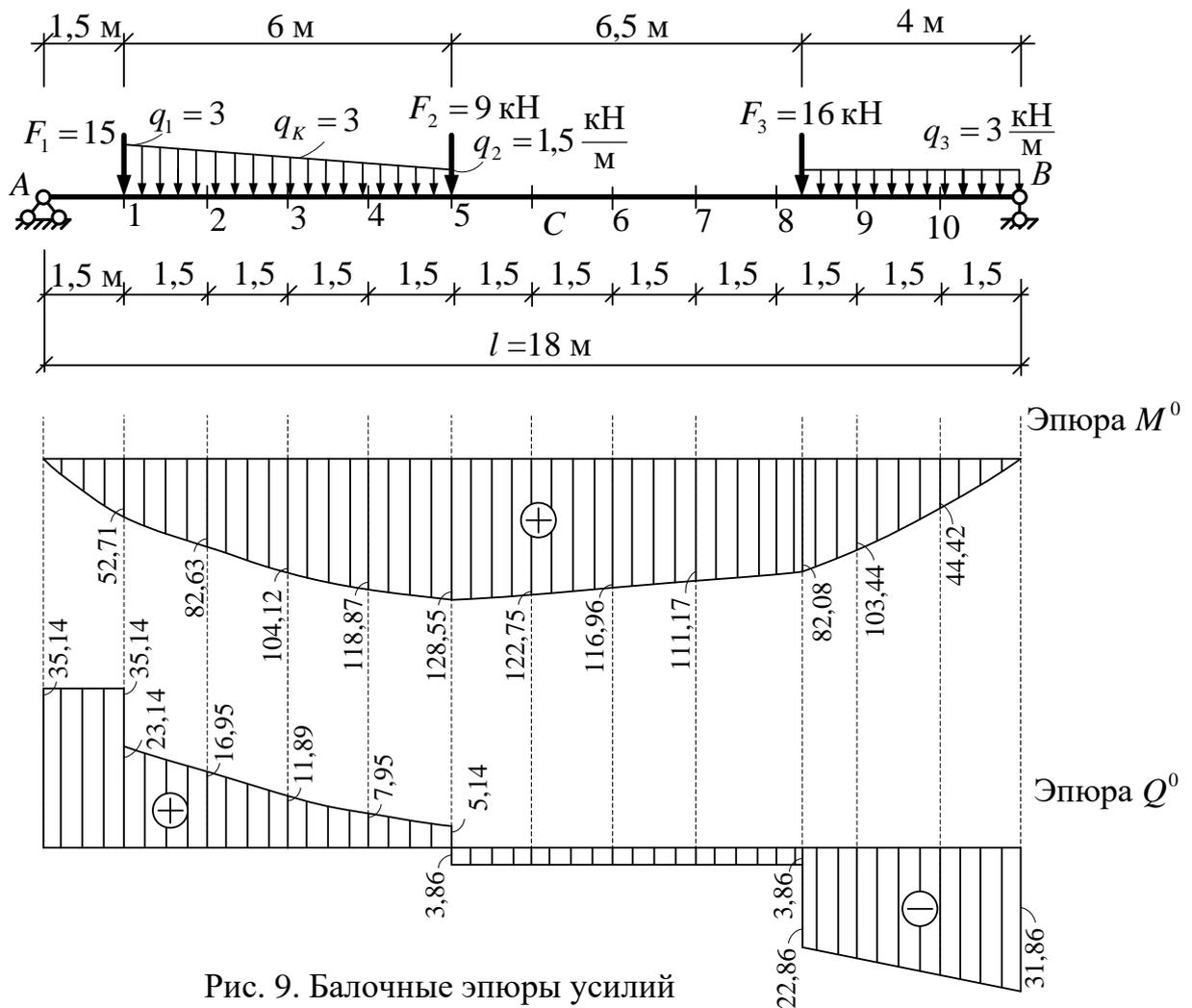


Рис. 9. Балочные эпюры усилий

взгляд, напрашивается соединение ординат 0 и 1,97 кривой, показанной на рис. 6,б пунктиром. Однако такая зависимость на участке  $A-1$  очень далека от действительной. Об этом свидетельствует следующее. Эпюра  $Q$  на участке  $A-1$  пересекает базовую ось, то есть имеет в одном из сечений нулевое значение. И значит, в этом сечении эпюра изгибающих моментов должна иметь, как известно из дифференциальных зависимостей

$$Q = \frac{dM}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{\text{экстр}} (M_{\text{max}}, M_{\text{min}}), \quad (11)$$

экстремальное (максимальное, минимальное) значение. Но его явно нет на проведенной пунктирной линии кривой.

Если дополнительно выполнить расчет усилий на участке  $A-1$  еще в одном сечении, например, в сечении 1', расположенном посередине этого участка, то получим (табл. 1) изгибающий момент в этом сечении равным 3,23 кН·м, и при этом растянутые волокна в этом сечении будем иметь вверху. Поперечная сила в сечении 1' будет равна +1,42 кН. Получим, что действительная линия эпюры изгибающих моментов на участке  $A-1$  должна проходить так, как показано на рис. 6,б сплошной линией, при этом максимальное на участке значение

изгибающего момента будет располагаться слева от сечения 1'.

Как видим, построение эпюр усилий путем соединения полученных ординат в расчетных сечениях плавными кривыми, не всегда будет давать достаточно точное представление об изменении усилий. Поэтому необходимо производить анализ выполнения ряда закономерностей, которые должны соблюдаться в изменениях эпюр усилий, и с помощью которых, при необходимости, можно выполнить корректировку полученных эпюр усилий. К таким закономерностям относятся следующие:

- в сечении, в котором поперечная сила равна нулю, изгибающий момент будет иметь экстремальное (максимальное, минимальное) значение на участке;

- при принятых правилах знаков для поперечных сил и при построении эпюры  $M$  на растянутых волокнах должно соблюдаться правило:

если стержень (базовая ось), на котором построена эпюра изгибающих моментов, для совмещения его с касательной к кривой эпюры  $M$  на участке, необходимо по кратчайшему пути поворачивать по часовой стрелке, то эпюра  $Q$  на этом участке должна иметь знак «плюс»; если указанный поворот необходимо производить против часовой стрелки, то  $Q$  на таком участке будет иметь знак «минус»;

- в точке приложения сосредоточенного момента на эпюре  $M$  всегда будет иметь место «скачок» на величину этого момента;

- в точках приложения сосредоточенной силы  $F$  на эпюре  $Q$  должен быть «скачок» на величину  $F \cos \varphi$ , на эпюре  $N$  – скачок на величину  $F \sin \varphi$ , на эпюре  $M$  – излом, направленный в сторону действия силы, где  $\varphi$  – угол между касательной к оси стержня арки под сосредоточенной силой и осью  $x$ .

Применение двух первых закономерностей вместе при анализе изменения эпюр  $M$  и  $Q$  вблизи точек экстремумов позволяет четко определить, какого вида экстремум будет иметь место в рассматриваемой точке – максимум или минимум.

Представленные закономерности позволяют выполнить проверку правильности изменения эпюр усилий и при необходимости откорректировать их. Для этих целей, при необходимости, может быть выполнено определение усилий в дополнительных точках (см. сеч. 1' на рис. 6,а).

Совместный анализ эпюр  $M$  и  $Q$  для арки на рис. 6 показывает, что эпюра  $M$  будет иметь экстремумы в целом ряде сечений (в которых поперечная сила равна нулю) – в точках  $K, S, T, U$  и под силами  $F_1, F_2, F_3$ . И если под силами экстремумы получаются практически автоматически, то в точках  $K, S, T$  и  $U$  это уже не так. Поэтому на участках, в пределах которых поперечная сила имеет нулевые значения, проводить соединительные прямые между соседними ординатами необходимо так, чтобы в сечениях, в которых поперечная сила равна нулю, эпюра  $M$  имела соответствующий экстремум (см. рис. 6,б).

## 4. УЧЕБНАЯ КОМПЬЮТЕРНАЯ ПРОГРАММА «АРКАЗ»

### 4.1. Общая характеристика программы

В программе «АркаЗ»\* предусмотрен расчет симметричных трехшарнирных арок на неподвижные вертикальные и горизонтальные сосредоточенные и распределенные (в том числе трапецеидальные) нагрузки (рис. 10).

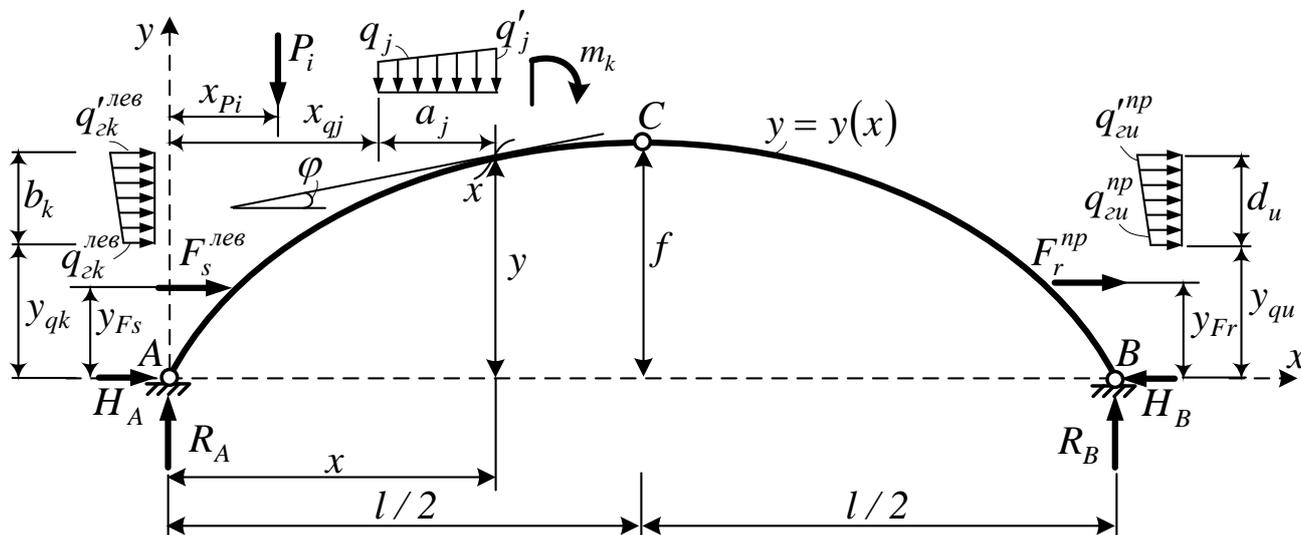


Рис. 10. Расчетная схема трехшарнирной арки

Программа «АркаЗ» составлена в среде программирования Delphi 7, занимает 3,5 Мбт памяти, работает под управлением Windows 98 и выше, не требует специальной установки, может работать в сети. Исходные данные и результаты расчета в программе представляются как в табличном, так и в графическом видах. Программа имеет развитый «Help» (см. меню «Справка»), имеются возможности ряда настроек вида программы и представления исходных данных и результатов расчета, включая масштабирование графических объектов, изображение (удаление) вертикальной сетки, удаление правой панели.

Удобными являются дополнительные инструменты (рис. 11):

- для вычисления ординаты  $y$  оси арки для любого заданного значения  $x$ ;
- для автоматического разложения наклонных сил на горизонтальные и вертикальные составляющие.

Имеется возможность настройки (рис. 12) рабочего каталога (каталога, в котором будут сохраняться файлы данных задач) и ряда параметров программы – максимального числа нагрузок на арку, числа участков разбиения арки в расчете и числа участков расчета арки для вывода на печать.

Программа «АркаЗ» является учебной программой, и для выполнения расчета арки в ней необходимо предварительно вычислить вручную усилия в двух контрольных сечениях арки, значения которых вводятся в программу и проверяются ею. Программа выполнит расчет арки только после того, как значения усилий в контрольных сечениях будут вычислены верно.

\*Программа разработана Игнатьюком В.И. и Игнатовым А.Ю.

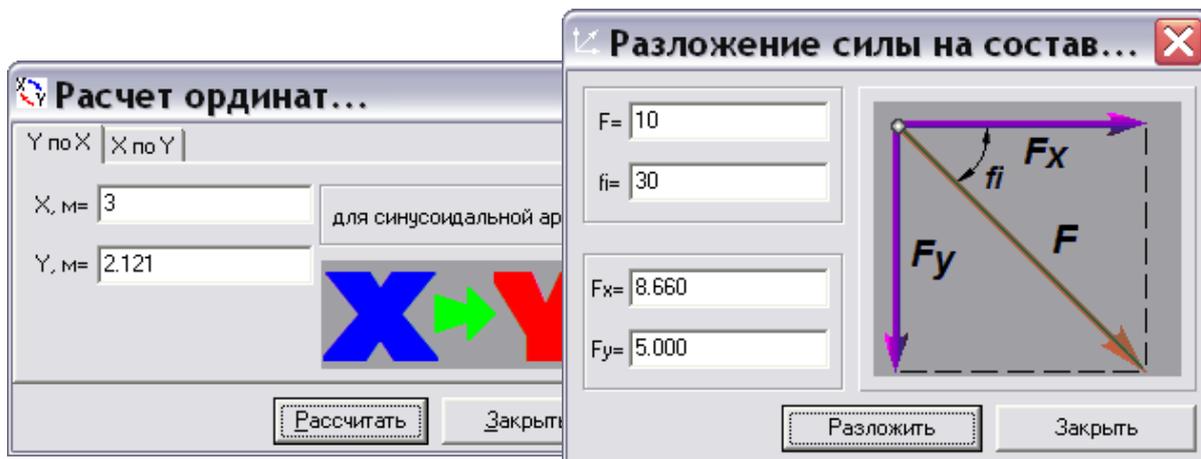


Рис. 11. Окна вычисления ординат арки и разложения сил на составляющие

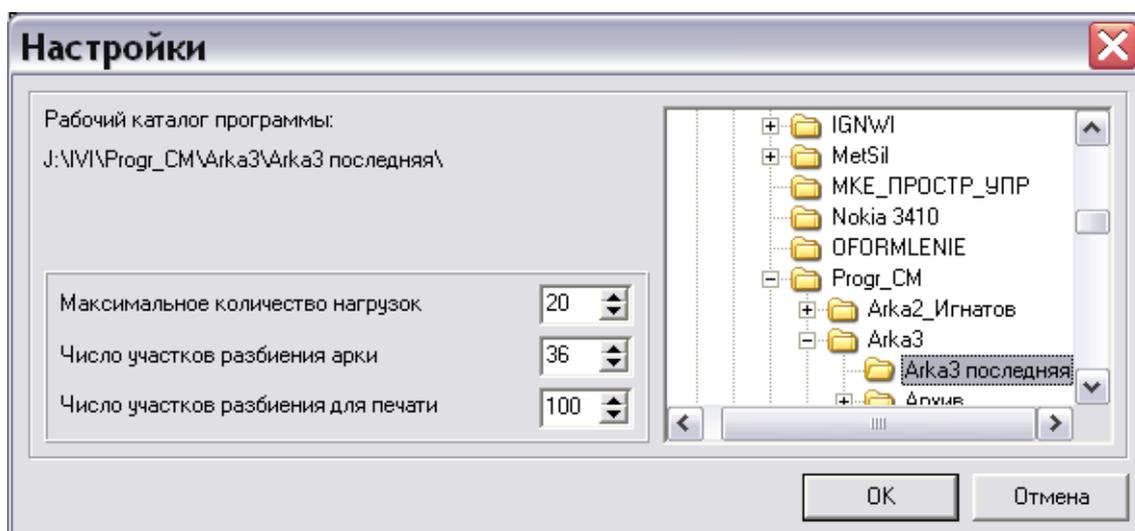


Рис. 12. Окно настроек программы

После расчета с контролем программа позволяет выполнить исследование влияния на напряженно-деформированное состояние арок (расчет будет выполняться уже без контроля) ряда параметров:

- законов изменения оси арки (круговой, параболический, синусоидальный, катеноидальный, эллиптический, гиперболический, стрельчатый);
- относительного подъема арок ( $f/l$ ), характеризующего их крутизну;
- числа участков разбивки арок.

#### 4.2. Ввод исходных данных и расчет арки

Ввод исходных данных осуществляется в основном окне программы (рис. 13), где задаются:

- пролет арки  $l$  (на панели окна обозначен буквой  $L$ );
- стрела подъема арки  $f$  ( $f$ );
- закон изменения оси арки (круговой, параболический, синусоидальный, катеноидальный, эллиптический, гиперболический, стрельчатый);
- внешние нагрузки – сосредоточенные силы (кнопка  $F$ ), сосредоточенные

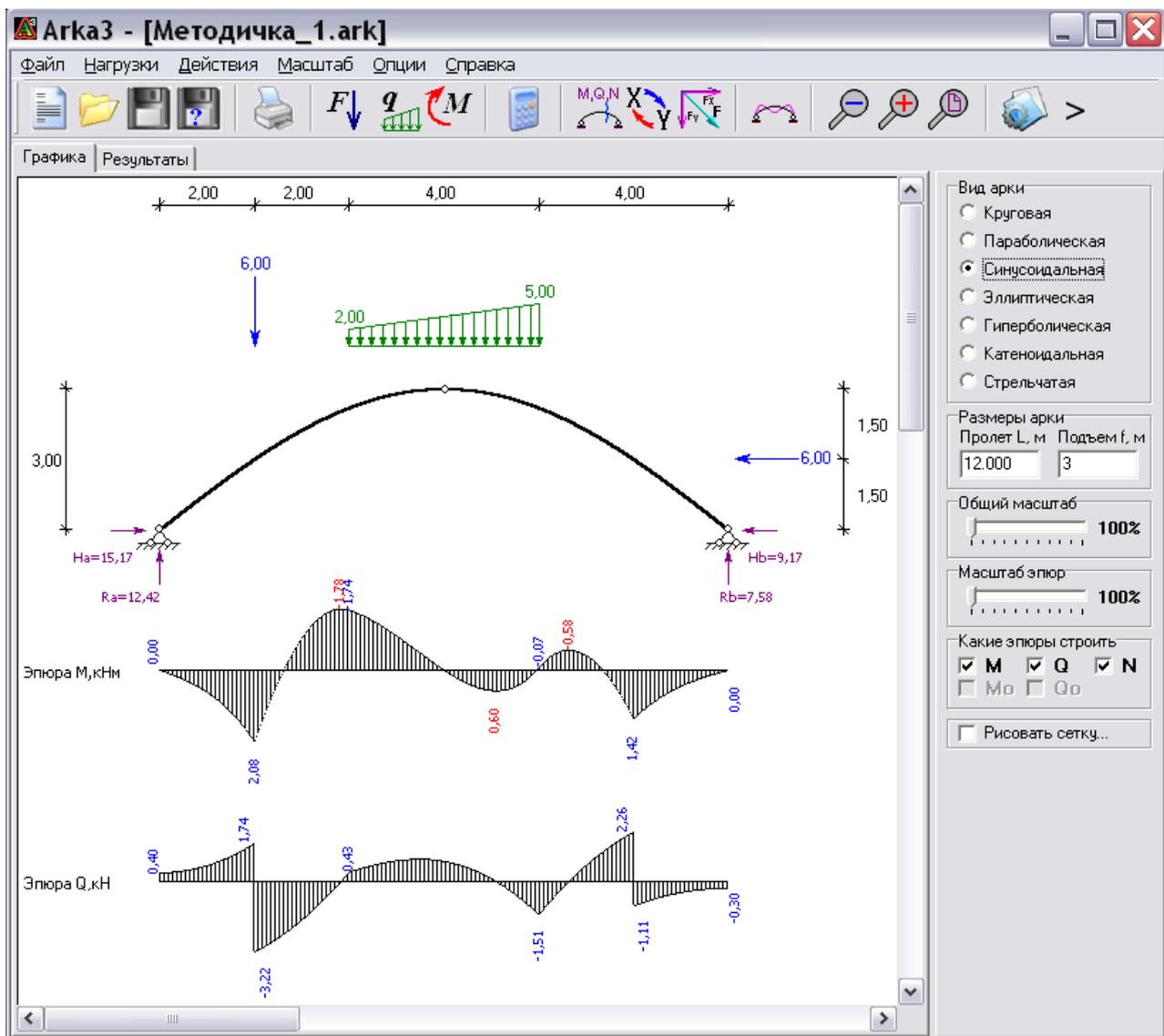


Рис. 13. Основное окно программы «Arka3»

моменты (кнопка  $M$ ) и распределенные нагрузки (кнопка  $q$ ); для ввода внешних нагрузок необходимо нажать одну из кнопок  $F$ ,  $M$ ,  $q$  на панели инструментов, или выбрать пункт «Нагрузки» в меню программы, после чего откроется окно ввода нагрузок (рис. 14), в котором и производится непосредственный ввод заданных внешних нагрузок.

После ввода исходных данных программа может быть запущена на расчет арки, что может быть сделано нажатием кнопки с изображением калькулятора, выбором пунктов меню «Действия», «Расчет» или нажатием на клавиатуре клавиши F5. Программа начинает расчет и выводит на экран окно ввода контрольных величин (рис. 15), в которое необходимо ввести вычисленные вручную значения усилий  $M$ ,  $Q$  и  $N$  для двух контрольных сечений.

Например, для арки, представленной в окне программы на рис. 13, ось арки которой изменяется по синусоидальному закону

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l} = 3 \sin \frac{\pi x}{12}.$$

необходимо выполнить следующие вычисления.

Угол наклона касательной к оси арки и его функции определяются соотношениями:

$$\operatorname{tg} \varphi_x = y' = \frac{\pi f}{l} \cos \frac{\pi x}{l} = \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi x}{12}; \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}; \quad \sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi.$$

или  $\varphi = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \varphi)$ , а затем по углу  $\varphi$  определяются его функции  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$ .

Пусть в качестве контрольных имеем сечения  $K_1$  (справа от точки приложения вертикальной силы  $P$ ) и  $K_2$  на левой и правой полуарках, находящиеся на расстояниях от начала координат (от опоры  $A$ ):

$$x_{K1} = 2 \text{ м}; \quad x_{K2} = x_{K1} + 0,45l = 2 + 0,45 \cdot 12 = 7,4 \text{ м}.$$

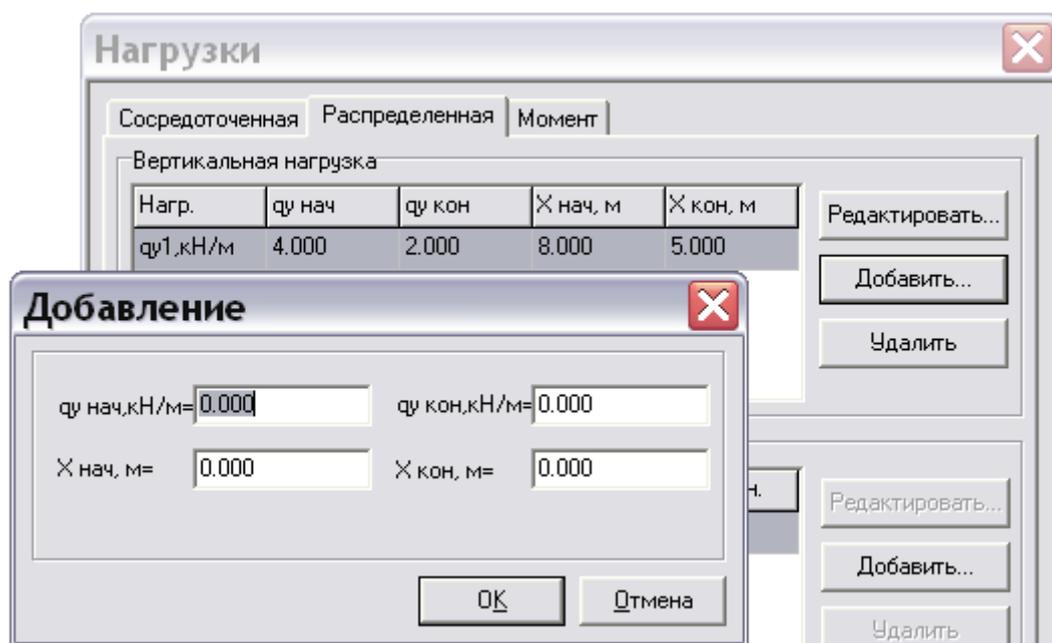


Рис. 14. Окно ввода нагрузок

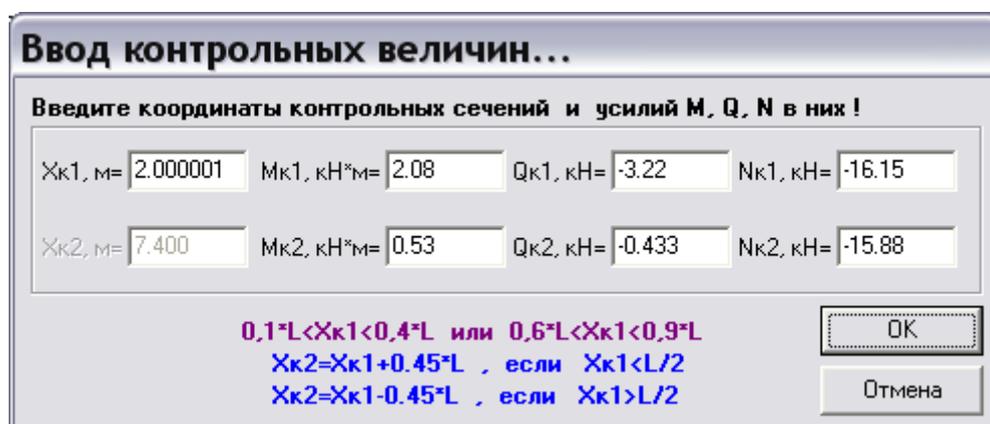


Рис. 15. Окно ввода контрольных величин

Геометрические характеристики для этих сечений арки (рис. 13) определяются величинами:

$$\text{а) для сечения } K_1: y_{K1} = 3 \sin \frac{\pi \cdot 2}{12} = 1,500 \text{ м}; \quad \operatorname{tg} \varphi_{K1} = \frac{\pi \cdot 3}{12} \cos \frac{\pi \cdot 2}{12} = 0,6802;$$

$$\varphi_{K1} = 34,222^\circ; \quad \sin \varphi_{K1} = 0,5624; \quad \cos \varphi_{K1} = 0,8269.$$

б) для сечения  $K_2$ :

$$y_{K2} = 3 \sin \frac{\pi \cdot 7,4}{12} = 2,801 \text{ м}; \quad \operatorname{tg} \varphi_{K2} = \frac{\pi \cdot 3}{12} \cos \frac{\pi \cdot 7,4}{12} = -0,2815;$$

$$\varphi_{K2} = -15,720^\circ; \quad \sin \varphi_{K2} = -0,2709; \quad \cos \varphi_{K2} = 0,9626.$$

Прежде, чем определять усилия в контрольных сечениях, необходимо найти опорные реакции арки. Для их определения составим четыре уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0; \quad 6,2 + (2 \cdot 4) \cdot 6 + \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \right) \left( 4 + \frac{2}{3} \cdot 4 \right) - 6 \cdot 1,5 - R_B \cdot 12 = 0; \quad R_B = 7,583 \text{ т};$$

$$\sum M_B = 0; \quad -6 \cdot 10 - (2 \cdot 4) \cdot 6 - \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \right) \left( 4 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) - 6 \cdot 1,5 + R_A \cdot 12 = 0; \quad R_A = 12,417 \text{ т};$$

$$\sum M_C^{\ddot{a}\ddot{a}} = 0; \quad 12,417 \cdot 6 - 6 \cdot 4 - (2 \cdot 2) \cdot 1 - \left( \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 2 \right) \frac{1}{3} \cdot 2 - H_A \cdot 3 = 0; \quad H_A = 15,167 \text{ т};$$

$$\sum M_C^{\ddot{o}} = 0; \quad (3,5 \cdot 2) \cdot 1 + \left( \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 2 \right) \frac{2}{3} \cdot 2 + 6 \cdot 1,5 - 7,583 \cdot 6 + H_B \cdot 3 = 0; \quad H_B = 9,167 \text{ т}.$$

Проверка правильности расчета опорных реакций:

$$\sum Y = 0; \quad 12,417 + 7,583 - 6 - \frac{1}{2} (2 + 5) \cdot 4 = 0; \quad 20 - 20 = 0;$$

$$\sum X = 0; \quad 15,167 - 6 - 9,167 = 0; \quad 15,167 - 15,167 = 0.$$

Определение усилий в контрольных сечениях:

а) в сечении  $K_1$  (справа от силы  $P$ ):

$$M_{K1}^{(\ddot{a}\ddot{a})} = (R_A - P) x_{K1} - H_A y_{K1} = 12,417 \cdot 2 - 15,167 \cdot 1,5 = 2,083 \text{ т} \cdot \text{м};$$

$$Q_{K1}^{(\ddot{a}\ddot{a})} = (R_A - P) \cos \varphi_{K1} - H_A \sin \varphi_{K1} = (12,417 - 6) \cdot 0,8269 - 15,167 \cdot 0,5624 = -3,224 \text{ т};$$

$$N_{K1}^{(\ddot{a}\ddot{a})} = -[(R_A - P) \sin \varphi_{K1} + H_A \cos \varphi_{K1}] =$$

$$= -[(12,417 - 6) \cdot 0,5624 + 15,167 \cdot 0,8269] = -16,149 \text{ т};$$

б) в сечении  $K_2$ :

сечение  $K_2$  проходит на участке действия нагрузки, распределенной по трапецидальному закону, разделяя эту нагрузку на две части, поэтому необходимо определить величину интенсивности этой нагрузки в месте рас-

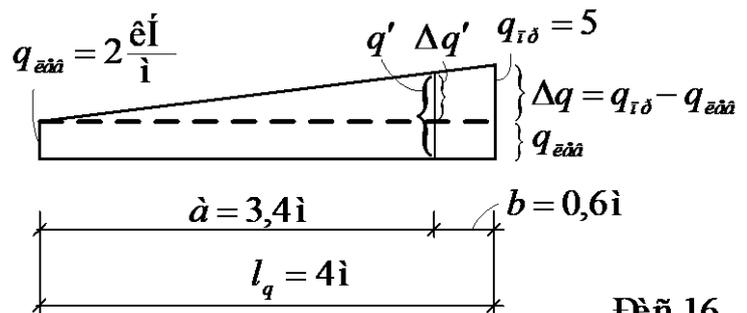


Рис. 16

сечения –  $q'$ ; сделаем это исходя из геометрических соображений (рис. 16):

$$\frac{\Delta q}{l_q} = \frac{\Delta q'}{\dot{a}}; \quad \Delta q' = \Delta q \frac{\dot{a}}{l_q} = (q_{i\ddot{a}} - q_{\ddot{a}\dot{a}\dot{a}}) \frac{\dot{a}}{l_q} = (5 - 2) \frac{3,4}{4} = 2,55 \frac{\text{êÍ}}{\dot{a}};$$

$$q' = q_{\ddot{a}\dot{a}\dot{a}} + \Delta q' = 2 + 2,55 = 4,55 \frac{\text{êÍ}}{\dot{a}};$$

теперь усилия в сечении  $K_2$  из рассмотрения левой части арки будут равны:

$$M_{K2}^{(\ddot{a}\dot{a}\dot{a})} = 12,417 \cdot 7,4 - 6 \cdot 5,4 - (2 \cdot 3,4) \cdot 1,7 - \left( \frac{1}{2} 2,55 \cdot 3,4 \right) \cdot \frac{1}{3} 3,4 - 15,167 \cdot 2,801 = 0,532 \text{êÍ} \cdot \dot{a};$$

$$Q_{K2}^{(\ddot{a}\dot{a}\dot{a})} = \left( 12,417 - 6 - 2 \cdot 3,4 - \frac{1}{2} 2,55 \cdot 3,4 \right) \cdot 0,963 - 15,167 \cdot (-0,271) = -0,433 \text{êÍ} ;$$

$$N_{K2}^{(\ddot{a}\dot{a}\dot{a})} = - \left[ \left( 12,417 - 6 - 2 \cdot 3,4 - \frac{1}{2} 2,55 \cdot 3,4 \right) \cdot (-0,271) + 15,167 \cdot 0,963 \right] = -15,88 \text{êÍ} .$$

При введении контрольных величин в программу «Арка3» для сечения  $K_1$ , которое расположено на бесконечно малом расстоянии справа от точки приложения силы  $P$ , примем расстояние до этого сечения равным 2,00001 м, то есть на очень маленькую величину больше, чем расстояние до точки приложения силы (рис. 15)

Если какое-то из внутренних усилий вычислено неверно, то выдается сообщение об ошибке, и необходимо выполнить перерасчет указанной величины (величин). Если контрольные величины верны, то программа выполняет полный расчет арки.

### 4.3. Результаты расчета

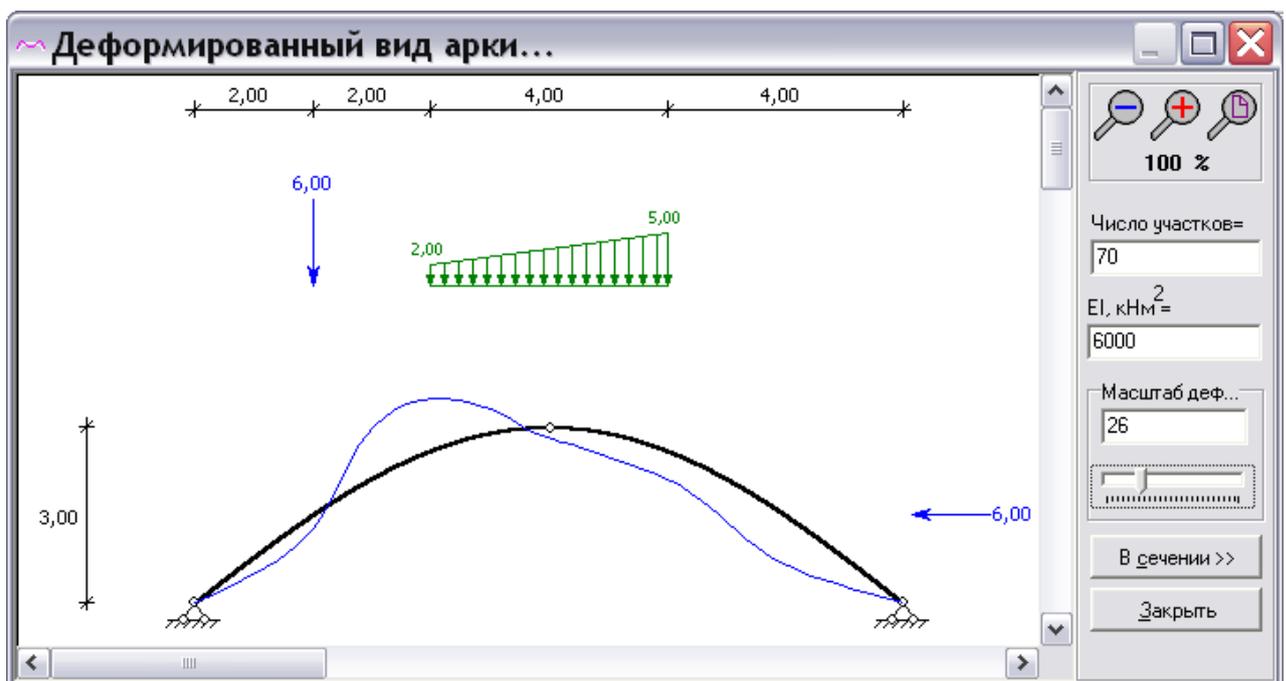


Рис. 17. Окно деформированного вида арки

Результаты расчета арки представляются в графическом и в табличном видах – показываются эпюры внутренних усилий  $M$ ,  $Q$  и  $N$  в арке (рис. 13), ее деформированный вид (рис. 17) и усилия во всех сечениях, включая характерные (рис. 18). Результаты расчета арки вместе с исходными данными могут быть выведены на печать (см. стр. 24). Внутренние силы и перемещения при необходимости могут быть вычислены для любого заданного сечения, что осуществляется вызовом соответствующих процедур (рис. 19, 20).

X, м	Y, м	sin(φ)	cos(φ)	M, кН*м	Q, кН	N, кН
0.0000	0.0000	0.6177	0.7864	0.0000	0.3970	-19.5970
0.3333	0.2615	0.6162	0.7876	0.1733	0.4333	-19.5963
0.6667	0.5209	0.6118	0.7910	0.3768	0.5424	-19.5935
1.0000	0.7765	0.6044	0.7967	0.6404	0.7255	-19.5876
1.3333	1.0261	0.5938	0.8046	0.9936	0.9842	-19.5763
1.6667	1.2679	0.5799	0.8147	1.4653	1.3205	-19.5565
2.0000	1.5000	0.5624	0.8269	2.0833	1.7370	-19.5239
2.3333	1.7207	0.5411	0.8410	0.8745	-2.8097	-16.2267
2.6667	1.9284	0.5155	0.8569	-0.1357	-2.3207	-16.3039
3.0000	2.1213	0.4855	0.8742	-0.9234	-1.7540	-16.3745
3.3333	2.2981	0.4507	0.8927	-1.4661	-1.1071	-16.4309

Рис. 18. Таблица результатов расчета

Усилия в заданном сечении...

X, м = 3      Y, м = 2.121      M, кНм = -0.923

cos(φ) = 0.874      Q, кН = -1.754

sin(φ) = 0.486      N, кН = -16.375

Buttons: Рассчитать, Закрыть

Рис. 19. Окно расчета усилий в заданном сечении

Перемещения в заданном сечении...

X, м = 3      Delta X, м\*10<sup>-6</sup> = -0.130837

Delta Y, м\*10<sup>-6</sup> = -0.232348

Buttons: Рассчитать, Закрыть

Рис. 20. Окно вычисления перемещений в заданном сечении

## Распечатка результатов расчета

Брестский государственный технический университет  
Кафедра строительной механики

### Расчет трехшарнирной арки

Выполнил: *Кузнецов Александр Юрьевич, гр. КП-17*

#### Исходные данные

Арка: синусоидальная      Пролет, L = 12.000м      Подъем, f = 3.000м

Рy <sub>i</sub>	Значение, кН	X, м	Рx <sub>i</sub>	Значение, кН	Y, м	Признак.
Рy <sub>1</sub>	6,00	2,00	Рx <sub>1</sub>	-6,00	1,50	Прав.

qy <sub>i</sub>	q нач., кН/м	q кон., кН/м	X нач., м	X кон., м
qy <sub>1</sub>	2,00	5,00	4,00	8,00

#### Характерные сечения

X, м	Y, м	sin (φ)	cos (φ)	M, кН·м	Q, кН	N, кН
2,000 Лев.	1,5000	0,5624	0,8269	2,0833	1,7370	-19,5239
2,000 Прав.	1,5000	0,5624	0,8269	2,0833	-3,2242	-16,1495
10,000 Лев.	1,5000	-0,5624	0,8269	1,4167	2,2595	-16,8056
10,000 Прав.	1,5000	-0,5624	0,8269	1,4167	-1,1149	-11,8445
4,0000	2,5981	0,3655	0,9308	-1,7375	0,4288	-16,4626
8,0000	2,5981	-0,3655	0,9308	-0,0708	-1,5148	-16,8891

#### Табличные результаты расчета

X, м	Y, м	sin (φ)	cos (φ)	M, кН·м	Q, кН	N, кН
0,0000	0,0000	0,6177	0,7864	0,0000	0,3970	-19,5970
0,5000	0,3916	0,6144	0,7890	0,2694	0,4787	-19,5952
1,0000	0,7765	0,6044	0,7967	0,6404	0,7255	-19,5876
1,5000	1,1481	0,5873	0,8094	1,2129	1,1425	-19,5677
2,0000	1,5000	0,5624	0,8269	2,0833	-3,2242	-16,1495
2,5000	1,8263	0,5288	0,8487	0,3430	-2,5747	-16,2657
3,0000	2,1213	0,4855	0,8742	-0,9234	-1,7540	-16,3745
3,5000	2,3801	0,4314	0,9022	-1,6392	-0,7532	-16,4510
4,0000	2,5981	0,3655	0,9308	-1,7375	0,4288	-16,4626
4,5000	2,7716	0,2878	0,9577	-1,4271	0,7321	-16,0569
5,0000	2,8978	0,1992	0,9800	-0,9913	0,9394	-15,6678
5,5000	2,9743	0,1020	0,9948	-0,4909	1,0128	-15,3500
6,0000	3,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,9167	-15,1667
6,5000	2,9743	-0,1020	0,9948	0,3945	0,6245	-15,1821
7,0000	2,8978	-0,1992	0,9800	0,5920	0,1222	-15,4520
7,5000	2,7716	-0,2878	0,9577	0,4791	-0,5924	-16,0150
8,0000	2,5981	-0,3655	0,9308	-0,0708	-1,5148	-16,8891
8,5000	2,3801	-0,4314	0,9022	-0,5559	-0,2994	-16,9542
9,0000	2,1213	-0,4855	0,8742	-0,4234	0,7340	-16,9410
9,5000	1,8263	-0,5288	0,8487	0,2597	1,5846	-16,8827
10,0000	1,5000	-0,5624	0,8269	1,4167	2,2595	-16,8056
10,5000	1,1481	-0,5873	0,8094	0,8512	-0,7542	-11,8729
11,0000	0,7765	-0,6044	0,7967	0,4658	-0,5012	-11,8863
11,5000	0,3916	-0,6144	0,7890	0,2022	-0,3515	-11,8916
12,0000	0,0000	-0,6177	0,7864	0,0000	-0,3019	-11,8930

## 5. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ УСИЛИЙ В ТРЕХШАРНИРНЫХ АРКАХ

Линия влияния усилия (реакции) представляет собой график изменения этого усилия в определенном сечении сооружения при перемещении по сооружению единичного безразмерного груза (силы) постоянного направления.

Процедуру построения линий влияния усилий в трехшарнирных арках рассмотрим далее на примере арки, рассчитанной ранее в разделе 3 (рис. 6).

Рассмотрим движение по арке единичной вертикальной силы, положение которой определяется абсциссой  $x_F$  (рис. 21,а). Для определения вертикальных опорных реакций составим уравнения равновесия в виде сумм моментов сил, действующих на арку, относительно левой и правой опор:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0; & 1 \cdot x_F - R_B \cdot l &= 0; \\ \sum M_B &= 0; & -1 \cdot (l - x_F) + R_A \cdot l &= 0.\end{aligned}$$

Из этих уравнений найдем функции изменения опорных реакций в зависимости от положения единичной силы:

$$R_B = \frac{x_F}{l}; \quad R_A = \frac{l - x_F}{l}.$$

Полученные зависимости изменения линий влияния опорных реакций полностью совпадают с соответствующими зависимостями для простой двухопорной балки. Такой же результат мы имели и при расчете арок на статические нагрузки (1). Линии влияния опорных реакций в арке (рис. 21,в,г), таким образом, совпадают с линиями влияния опорных реакций в соответствующей двухопорной балке (рис. 21,б).

Распор при действии вертикальных нагрузок определяется выражением (3)

$$H = \frac{M_C^0}{f},$$

и значит

$$\text{л. в. } H = (\text{л. в. } M_C^0) / f.$$

Таким образом, чтобы построить линию влияния распора в арке необходимо построить линию влияния изгибающего момента в сечении  $C$  соответствующей двухопорной балки и все ординаты ее разделить на значение стрелы подъема арки  $f$  (рис. 6,д).

Линии влияния внутренних сил в сечениях арок удобно строить с использованием полученных ранее зависимостей (5)–(7), выражающих усилия в арках через усилия в соответствующей двухопорной балке и распор.

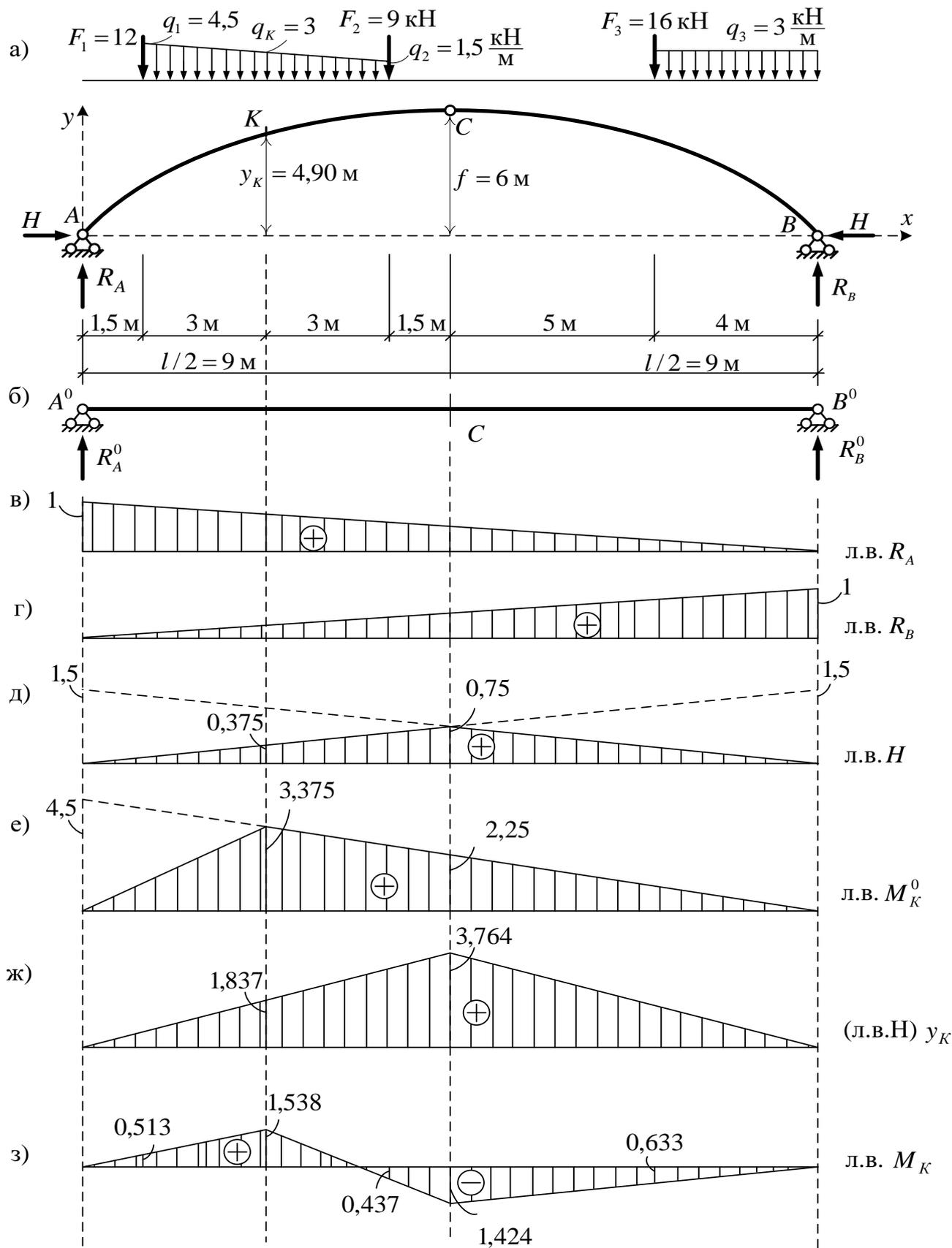


Рис. 21. Линии влияния усилий

Для изгибающего момента в сечении  $K$  (рис. 21,а) согласно (5) будем иметь

$$M_K = M_K^0 - H y_K.$$

Учитывая, что ордината  $y_K$  для сечения  $K$  является константой, для линии влияния  $M_K$  получим

$$\text{л. в. } M_K = (\text{л. в. } M_K^0) - (\text{л. в. } H) y_K.$$

В соответствие этому выражению отдельно строим линию влияния изгибающего момента в сечении  $K$  соответствующей двухопорной балки (рис. 21,е) и линию влияния распора  $H$ , увеличенную в  $y_K$  раз (умножая все ординаты л. в.  $H$  на  $y_K$ , равное 4,899) (рис. 21,ж). После этого, отнимая от ординат первой линии влияния ординаты второй, получим линию влияния изгибающего момента в сечении  $K$  арки в виде, представленном на рис. 21,з.

Поперечная сила в сечении  $K$  согласно (6) определяется зависимостью

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K,$$

которая для линии влияния поперечной силы может быть представлена в виде

$$\text{л. в. } Q_K = (\text{л. в. } Q_K^0) \cos \varphi_K - (\text{л. в. } H) \sin \varphi_K,$$

где для сечения  $K$  рассматриваемой арки  $\sin \varphi_K = 0,4615$ , а  $\cos \varphi_K = 0,8871$ .

Линия влияния распора  $H$  имеется (рис. 22,б), остается построить линию влияния поперечной силы в сечении  $K$  соответствующей двухопорной балки (рис. 22,в). Затем получаем промежуточные линии влияния, умножая ординаты л. в.  $Q_K$  на  $\cos \varphi_K$  (рис. 22,г), а ординаты л. в.  $H$  на  $\sin \varphi_K$  (рис. 22,д). Отнимая после этого от ординат первой линии влияния ординаты второй, получим линию влияния поперечной силы в сечении  $K$  арки (рис. 22,е).

Продольная сила в сечении  $K$  арки определяется (7) зависимостью

$$N_K = -(Q_K^0 \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K),$$

в соответствие которой для линии влияния  $Q_K$  получим выражение

$$\text{л. в. } N_K = -[(\text{л. в. } Q_K^0) \sin \varphi_K + (\text{л. в. } H) \cos \varphi_K].$$

Построив промежуточные линии влияния (л. в.  $Q_K$ )  $\sin \varphi_K$  (рис. 22,ж) и (л. в.  $H$ )  $\cos \varphi_K$  (рис. 22,з), сложив их и приняв результат с обратным знаком, получим линию влияния продольной силы в сечении  $K$  арки в виде, представленном на рис. 22,и.

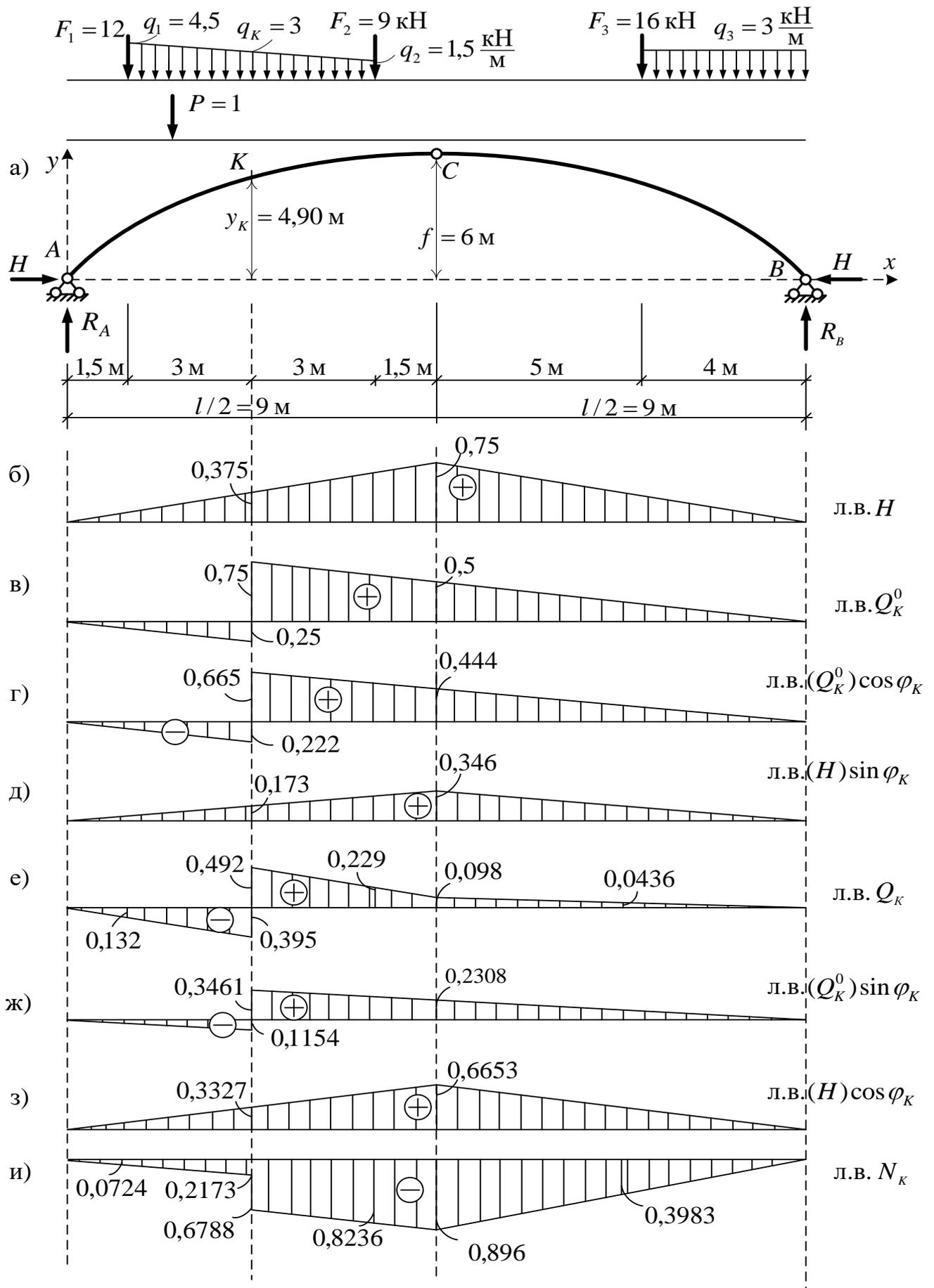


Рис. 22. Линии влияния усилий

## 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ ПО ЛИНИЯМ ВЛИЯНИЯ

В качестве внешних нагрузок на арки могут выступать сосредоточенные силы, моменты и распределенные нагрузки. Усилия по линиям влияния от действия внешних нагрузок определяются суммированием действий всех нагрузок, вклад каждой из которых определяется согласно следующим положениям:

– от сосредоточенных сил – произведением величин этих сил на ординаты линий влияния усилий под этими силами;

– от равномерно распределенных нагрузок – произведением интенсивностей этих нагрузок на площади линий влияния усилий под этими нагрузками;

– для нагрузок, распределенных по произвольным законам, можно использовать свойство прямолинейного участка линии влияния, согласно которому на линейном участке линии влияния усилие от системы нагрузок можно определить произведением равнодействующей этих нагрузок на ординату линии влияния усилия под равнодействующей; это свойство, естественно, можно использовать и для равномерно распределенных нагрузок;

– для сосредоточенных моментов – произведением величин моментов на тангенсы углов между касательными к линиям влияния и базовой осью под этими моментами.

Согласно этим положениям процедуру определения усилий от действия внешних нагрузок по линиям влияния усилий можно записать в виде выражения

$$S = \sum_{i=1}^{n_p} P_i y_i + \sum_{j=1}^{n_{qr}} q_j \omega_j + \sum_{k=1}^{n_{qn}} R_{qk} y_k + \sum_{s=1}^{n_m} M_s \operatorname{tg} \alpha_s, \quad (12)$$

где:  $P_i$ ,  $n_p$  – соответственно величины и число сосредоточенных сил;  $y_i$  – ординаты линии влияния усилия  $S$  под этими силами;

$q_j$ ,  $n_{qr}$  – величины интенсивностей и число равномерно распределенных нагрузок;  $\omega_j$  – площади линий влияния усилия под этими нагрузками;

$R_{qk}$  – величины равнодействующих распределенных по любым законам нагрузок  $q_k$  на линейном участке линии влияния усилия;  $y_k$  – ординаты линии влияния усилия под этими равнодействующими (таким образом для распределенной по произвольному закону нагрузки здесь необходимо уметь определять не только величину ее равнодействующей, но и точку ее приложения);  $n_{qn}$  – число распределенных нагрузок  $q_k$ ;

$M_s$  – значение сосредоточенного момента;  $\operatorname{tg} \alpha_s$  – тангенс угла между касательной к линии влияния и базовой осью под моментом  $M_s$ .

Заметим, что действие равномерно распределенных нагрузок может быть учтено как согласно второму слагаемому в формуле (12), так и согласно третьему слагаемому (но только одним из этих способов, а не тем и другим вместе).

При определении усилий по линиям влияния с использованием выражения (12) следует руководствоваться следующими правилами знаков:

- силы  $P_i$  и распределенные нагрузки  $q_j$  и  $q_k$  принимаются положительными, если они действуют вниз, и отрицательными, если действуют вверх;
- ординаты  $y_i$  и  $y_k$  на линиях влияния и площади линий влияния  $\omega_j$  принимаются со знаками линий влияния, из которых они берутся;
- сосредоточенные моменты принимаются положительными, если они действуют по часовой стрелке, и отрицательными, если действуют против часовой стрелки;
- знаки тангенсов углов между касательными к линиям влияния и базовой осью принимаются положительными на участках возрастания функции линии влияния и отрицательными на участках ее убывания (рис. 23).

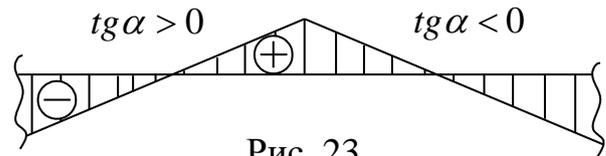


Рис. 23

Усилия в сечении  $K$  рассматриваемой арки (рис. 21,а) от действия внешней нагрузки, на которую арка рассчитана ранее в разделе 3, по линиям влияния  $\dot{I}_{\hat{E}}$  (рис. 21,з),  $Q_{\hat{E}}$  (рис. 22,е) и  $N_{\hat{E}}$  (рис. 22,и) будут равны:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{\hat{E}} = & 12 \cdot 0,513 + (3 \cdot 3) \frac{0,513 + 1,538}{2} + \left( \frac{1,5 \cdot 3}{2} \right) \left[ 0,513 + \frac{1}{3} (1,538 - 0,513) \right] + \\ & + (1,5 \cdot 3) \left( \frac{1,538 - 0,437}{2} \right) + \left( \frac{1,5 \cdot 3}{2} \right) \left[ \frac{2}{3} (1,538 + 0,437) - 0,437 \right] - 9 \cdot 0,437 - \\ & - 16 \cdot 0,633 - 3 \cdot \left( \frac{0,633 \cdot 4}{2} \right) = 3,899 \text{ еí } \cdot \text{ì} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{\hat{E}} = & -12 \cdot 0,132 - (3 \cdot 3) \left( \frac{0,132 + 0,395}{2} \right) - \left( \frac{1,5 \cdot 3}{2} \right) \left[ 0,132 + \frac{1}{3} (0,395 - 0,132) \right] + \\ & + (1,5 \cdot 3) \left( \frac{0,492 + 0,229}{2} \right) + \left( \frac{1,5 \cdot 3}{2} \right) \left[ 0,229 + \frac{2}{3} (0,492 - 0,229) \right] + 9 \cdot 0,229 + \\ & + 16 \cdot 0,0436 + (3 \cdot 4) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,0436 = 1,103 \text{ еí } ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{\hat{E}} = & -12 \cdot 0,0724 - (3 \cdot 3) \frac{0,2173 + 0,0724}{2} - \left( \frac{1,5 \cdot 3}{2} \right) \left[ 0,0724 + \frac{1}{3} (0,2173 - 0,0724) \right] - \\ & - (1,5 \cdot 3) \frac{0,6788 + 0,8236}{2} - \left( \frac{1,5 \cdot 3}{2} \right) \left[ 0,6788 + \frac{1}{3} (0,896 - 0,6788) \right] - 9 \cdot 0,8236 - \\ & - 16 \cdot 0,3983 - (3 \cdot 4) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,3983 = -23,656 \text{ еí } . \end{aligned}$$

Полученные значения с незначительными погрешностями совпадают со

значениями, найденными для этого сечения в разделе 3 (см. сечение 3 на рис. 6,а). Заметим, что трапецидальная нагрузка на участках слева и справа от сечения  $K$  здесь разбивается на равномерно распределенные и треугольные нагрузки. Принципы разбивки представлены на рис. 7 (сечение  $K$  совпадает с сечением 3), а значения интенсивностей нагрузок здесь будут определяться величинами, представленными на рис. 24.

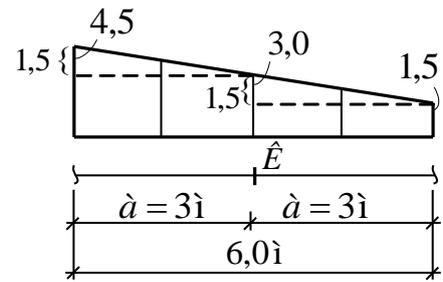


Рис. 24.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие сведения и принципы образования	3
2. Расчет трехшарнирных арок	4
3. Расчет трехшарнирной арки в табличной форме	9
4. Учебная компьютерная программа «Арка3»	17
4.1. Общая характеристика программы	17
4.2. Ввод исходных данных и расчет арки	18
4.3. Результаты расчета	22
5. Линии влияния усилий в трехшарнирных арках	25
6. Определение усилий по линиям влияния	29

Учебное издание

Составители: Игнатюк Валерий Иванович  
Загуляев Станислав Валерьевич  
Молош Виктор Викторович

## Расчет трехшарнирных арок

Методические указания по дисциплине “Строительная механика”  
для студентов строительных специальностей  
дневной и заочной форм обучения

Ответственный за выпуск Игнатюк В.И.

Редактор Строкач Т.В.

Технический редактор Никитчик А.Д.

---

Подписано к печати 09.04.2007 г. Формат 60×84/16. Бумага Снегурочка. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 180 экз. Заказ № . Отпечатано на ризографе Учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул. Московская, 267.