Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. РЯДЫ

Методические рекомендации и варианты контрольных работ
для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Брест 2015

УДК 517.9

В настоящей методической разработке приведены варианты контрольных заданий по разделам «Кратные и криволинейные интегралы» и «Ряды» общего курса высшей математики для студентов технических специальностей заочной формы обучения. Даны некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения контрольных работ.

Составители: Е.Н. Швычкина, доцент, к. ф-м. н.,
Л.Т. Мороз, доцент,
С.Н. Наумовец, старший преподаватель,
Л.С. Золотухина, старший преподаватель

Рецензенты: Пантелеева Е.В., старший преподаватель кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений Учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к. ф-м. н.

Содержание

Организационно-методические указания..4
Вопросы по разделам «Кратные и криволинейные интегралы» и «Ряды» 4
Контрольная работа № 3 6
Задание 1. 6
Задание 2. 6
Задание 3. 7
Задание 4. 9
Задание 5. 11
Задание 6. 13
Задание 7. 14
Решение типового варианта контрольной работы № 3 15
Задание 1. 15
Задание 2. 16
Задание 3. 18
Задание 4. 18
Задание 5. 20
Задание 6. 23
Задание 7. 24
Учебно-методическая литература...25

ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В контрольную работу № 3 включены 7 заданий по разделам «Кратные и криволинейные интегралы» и «Ряды», дисциплины «Высшая математика».

Нумерация задач состоит из двух чисел: первое число – номер задания, второе (после точки) – номер варианта.

Правила оформления контрольной работы:

1) контрольная работа выполняется в отдельной (тонкой) ученической тетради с отчерченными полями;

2) на обложке обязательно должен быть указан шифр (номер зачетной книжки);

3) контрольная работа выполняется студентом в соответствии со своим вариантом, который определяется по двум последним цифрам шифра;

4) каждое задание начинается на новой странице с обязательной записью его полного условия. Если задача имеет общую формулировку, то ее условие переписывают, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта;

5) решения всех заданий должны быть подробными и аккуратными, содержать достаточные пояснения, необходимые рисунки и таблицы;

6) завершает работу список используемой литературы и роспись студента;

7) после рецензии исправления в тексте работы недопустимы;

8) исправление ошибок, указанных рецензентом, выполняют в той же тетради после росписи студента.

ВОПРОСЫ ПО РАЗДЕЛАМ «КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ» И «РЯДЫ»

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
2. Определение, теорема существования и свойства двойного интеграла.
3. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат. Повторные интегралы.
4. Замена переменных в двойном интеграле. Переход в двойном интеграле от декартовых к полярным координатам.
5. Вычисление площади плоской фигуры с помощью двойного интеграла.
6. Вычисление объемов тел с помощью двойного интеграла.
7. Физические приложения двойного интеграла.
8. Определение, свойства и вычисление тройного интеграла.
9. Геометрические и механические приложения тройного интеграла.

10. Криволинейный интеграл I рода. Задача, приводящая к криволинейному интегралу I рода.
11. Определение и свойства криволинейного интеграла I рода.
12. Криволинейный интеграл II рода. Задача о работе переменной силы вдоль криволинейного пути.
13. Определение, свойства и вычисление криволинейного интеграла II рода.
14. Циркуляция вектора по замкнутому контуру. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования.
15. Числовые ряды. Общие понятия числового ряда.
16. Геометрическая прогрессия и гармонический ряд.
17. Основные свойства сходящихся рядов.
18. Необходимый признак сходимости рядов.
19. Признаки сравнения.
20. Признаки сходимости рядов Д’Аламбера.
21. Признаки сходимости рядов Коши.
22. Интегральный признак сходимости рядов Коши. Ряд Дирихле.
23. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
24. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.
25. Функциональные ряды. Общие понятия функциональных рядов.
26. Степенные ряды. Общие понятия. Свойства степенных рядов.
27. Разложение функций в степенной ряд. Ряд Тейлора.
28. Приближенное вычисление функций с помощью рядов.
29. Приближенное вычисление определенных интегралов с помощью рядов.
30. Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Задание 1.

Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторных с внешним интегрированием по *x* и по *y*, если область *D* задана указанными линиями. Вычислить любой из найденных интегралов для случая $f(x;y)=1$.

1.1 $y=x^2+1,\ x-y+3=0$; **1.2** $x=y^2+2,\ x-2y-10=0$;

1.3 $y=x^2+3,\ 3x-y+21=0$; **1.4** $x=y^2+4,\ x-4y-36=0$;

1.5 $y=x^2+5,\ 5x-y+55=0$; **1.6** $x=y^2+6,\ x-y-8=0$;

1.7 $y=x^2+7,\ 2x-y+15=0$; **1.8** $x=y^2+8,\ x-3y-26=0$;

1.9 $y=x^2+9,\ 4x-y+41=0$; **1.10** $x=y^2+10,\ x-5y-60=0$;

1.11 $y=2x^2+1,\ 2x-y+5=0$; **1.12** $x=2y^2+2,\ x-4y-18=0$;

1.13 $y=2x^2-13,\ 4x-y+17=0$; **1.14** $x=2y^2-2,\ x-3y-3=0$;

1.15 $y=2x^2+3,\ 2x-y+7=0$; **1.16** $x=2y^2+4,\ x-4y-10=0$;

1.17 $y=2x^2+5,\ 2x+y-17=0$; **1.18** $x=2y^2+6,\ x-6y-14=0$;

1.19 $y=2x^2+7,\ 10x-y-5=0$; **1.20** $x=2y^2+8,\ x+8y-18=0$;

1.21 $y=2x^2+2,\ y-4x-18=0$; **1.22** $x=2y^2+1,\ x-2y-5=0$;

1.23 $y=2x^2-2,\ x-3y-3=0$; **1.24** $x=2y^2+3, 2y-x+7=0$;

1.25 $y=2x^2+4,\ y-4x+10=0$; **1.26** $x=2y^2-13,\ 4y-x+17=0$;

1.27 $y=3x^2+7,\ 8x-y+2=0$; **1.28** $x=3y^2+8,\ x-11y+2=0$;

1.29 $y=3x^2-2,\ 4x-y+2=0$; **1.30** $x=3y^2+2, x-7y+2=0$;

Задание 2.

Вычислить координаты центра масс однородной ($\rho(x,y)=1$) материальной пластины *D*, ограниченной данными линиями:

2.1 $y=x^2+1,\quad y=5$; **2.2** $x=y^2+2,\quad x=6$; **2.3** $y=3-x^2,\quad y=-1$;

2.4 $x=4-y^2,\quad x=0$; **2.5** $y=x^2+5,\quad y=9$; **2.6** $x=y^2+6,\quad x=7$;

2.7 $y=7-x^2,\quad y=3$; **2.8** $x=8-y^2\quad x=-1$; **2.9** $y=x^2+9,\quad y=10$;

2.10 $x=y^2+10,\quad x=11$; **2.11** $y=1-2x^2,\quad y=-7$; **2.12** $x=2-2y^2\quad x=-6$;

2.13 $y=2x^2+3,\quad y=5$; **2.14** $x=2y^2+4,\quad x=6$; **2.15** $y=5-2x^2,\quad y=-3$;

2.16 $x=6-2y^2\quad x=-2$; **2.17** $y=2x^2+7,\quad y=9$; **2.18** $x=2y^2+8,\quad x=10$;

2.19 $y=9-2x^2,\quad y=1$; **2.20** $x=10-2y^2\quad x=2$; **2.21** $y=3x^2+1,\quad y=4$;

2.22 $x=3y^2+2,\quad x=5$; **2.23** $y=3-3x^2,\quad y=0$; **2.24** $x=4-3y^2\quad x=1$;

2.25 $y=3x^2+5,\quad y=8$; **2.26** $x=3y^2+6,\quad x=9$; **2.27** $y=7-3x^2,\quad y=-5$;

2.28 $x=8-3y^2\quad x=-4$; **2.29** $y=3x^2+9,\quad y=12$; **2.30** $x=3y^2+10,\quad x=13$.

Задание 3.

Вычислить тройной интеграл.

3.1
$$\iiint\limits_V 8y^2ze^{-xyz}dxdydz\text{ , } V:\begin{cases} x=2,\ \ y=-1,\ \ z=2 \\ x=0,\ \ \ y=0,\ \ \ z=0. \end{cases}$$

3.2
$$\iiint\limits_V 2y^2zch\left(2xyz\right)dxdydz\text{ , } V:\begin{cases} x=\dfrac{1}{2},\ y=2,\ z=-1 \\ \ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$$

3.3
$$\iiint\limits_V y^2zch\left(\frac{xyz}{2}\right)dxdydz\text{ , } V:\begin{cases} x=2,\ \ y=-1,\ \ z=2 \\ x=0,\ \ \ y=0,\ \ \ z=0 \end{cases}.$$

3.4
$$\iiint\limits_V y^2\cdot z\cos\left(\frac{xyz}{9}\right)dxdydz\text{ , } V:\begin{cases} x=9,\ \ y=1,\ \ z=2\pi, \\ x=0,\ \ y=0,\ \ \ z=0. \end{cases}$$

3.5
$$\iiint\limits_V y^2zch\left(xyz\right)dxdydz\text{ , } V:\begin{cases} x=1,\ \ y=1,\ \ z=1 \\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0 \end{cases}.$$

3.6
$$\iiint\limits_V x^2z\sin\left(\frac{xyz}{2}\right)dxdydz\text{ , } V:\begin{cases} x=1,\ \ y=4,\ \ z=\pi, \\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0. \end{cases}$$

3.7
$$\iiint\limits_V 2x^2z\,sh\left(2xyz\right)dxdydz\text{ , } V:\begin{cases} x=2,\ y=\dfrac{1}{2},\ \ z=\dfrac{1}{2}, \\ \ x=0,\ y=0,\ \ \ z=0. \end{cases}$$

3.8
$$\iiint\limits_V 2x^2zsh\left(xyz\right)dxdydz\text{ , } V:\begin{cases} x=1,\ \ y=-1,\ \ z=1, \\ x=0,\ \ \ y=0,\ \ \ z=0. \end{cases}$$

3.9
$$\iiint\limits_V y^2z\cos\left(\frac{xyz}{3}\right)dxdydz\text{ , } V:\begin{cases} x=3,\ \ y=1,\ \ z=2\pi, \\ x=0,\ \ y=0,\ \ \ z=0. \end{cases}$$

3.10
$$\iiint\limits_V x^2zsh\left(xyz\right)dxdydz\text{ , } V:\begin{cases} x=2,\ \ y=1,\ \ z=1, \\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0. \end{cases}$$

3.11
$$\iiint\limits_V 2y^2ze^{xyz}dxdydz\text{ , } V:\begin{cases} x=1,\ \ y=1,\ \ z=1, \\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0. \end{cases}$$

3.12
$$\iiint\limits_V x^2z\sin\left(\frac{xyz}{4}\right)dxdydz\text{ , } V:\begin{cases} x=1,\ \ y=2\pi,\ \ z=4, \\ x=0,\ \ \ y=0,\ \ \ z=0. \end{cases}$$

3.13
$$\iiint\limits_V y^2z\cos\left(xyz\right)dxdydz\text{ , } V:\begin{cases} x=1,\ \ y=\pi,\ \ z=2, \\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0. \end{cases}$$

3.14
$$\iiint\limits_V 8y^2ze^{2xyz}dxdydz\text{ , } V:\begin{cases} x=-1,\ \ y=2,\ \ z=1, \\ \ x=0,\ \ \ y=0,\ \ z=0. \end{cases}$$

3.15 $$\iiint\limits_V x^2 z\sin(xyz)\,dxdydz,\ V:\begin{cases} x=2,\ \ y=\pi,\ \ z=1, \\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0. \end{cases}$$

3.16 $$\iiint\limits_V 2y^2 e^{xy}\,dxdydz,\ V:\begin{cases} x=0,\ y=1,\ \ z=1, \\ \qquad\ \ y=x,\ \ z=0. \end{cases}$$

3.17 $$\iiint\limits_V y^2 ch(2xy)\,dxdydz,\ V: x=0,\ y=2,\ y=4x,\ z=0,\ z=2.$$

3.18 $$\iiint\limits_V x^2 sh(3xy)\,dxdydz,\ V: x=1,\ y=2x,\ y=0,\ z=0,\ z=36.$$

3.19 $$\iiint\limits_V y^2\cos\left(\frac{\pi}{4}xy\right)dxdydz,\ V: x=0,\ y=-1,\ y=\frac{x}{2},\ z=0,\ z=-\pi^2.$$

3.20 $$\iiint\limits_V y^2 e^{-xy}\,dxdydz,\ V: x=0,\ y=-2,\ y=4x,\ z=0,\ z=1$$

3.21 $$\iiint\limits_V y^2 ch(2xyz)\,dxdydz,\ V: x=0,\ y=1,\ y=x,\ z=0,\ z=8.$$

3.22 $$\iiint\limits_V y^2 e^{\frac{xy}{2}}\,dxdydz,\ V: x=0,\ y=2,\ y=2x,\ z=0,\ z=-1.$$

3.23 $$\iiint\limits_V y^2\cos\left(\frac{\pi}{2}xy\right)dxdydz,\ V: x=0,\ y=-1,\ y=x,\ z=0,\ z=2\pi^2.$$

3.24 $$\iiint\limits_V y^2\cos(\pi xy)\,dxdydz,\ V: x=0,\ y=1,\ y=2x,\ z=0,\ z=\pi^2.$$

3.25 $$\iiint\limits_V x^2 sh(2xy)\,dxdydz,\ V: x=-1,\ y=x,\ y=0,\ z=0,\ z=8.$$

3.26 $$\iiint\limits_V y^2 ch(xy)\,dxdydz,\ V: x=0,\ y=-1,\ y=x,\ z=0,\ z=2.$$

3.27 $$\iiint\limits_V x^2\sin\left(\frac{\pi}{2}xy\right)dxdydz,\ V: x=2,\ y=x,\ y=0,\ z=0,\ z=\pi.$$

3.28 $$\iiint\limits_V x^2\sin(\pi xy)\,dxdydz,\ V: x=1,\ y=2x,\ y=0,\ z=0,\ z=4\pi.$$

3.29 $$\iiint\limits_V y^2 ch(3xy)\,dxdydz,\ V: x=0,\ y=2,\ y=6x,\ z=0,\ z=-3.$$

3.30 $$\iiint\limits_V x^2\sin(4\pi xy)\,dxdydz,\ V: x=1,\ y=\frac{x}{2},\ y=0,\ z=0,\ z=8\pi.$$

Задание 4.

Вычислить данный криволинейный интеграл вдоль линии *L*. Сделать чертеж.

4.1 $\int\limits_L y^2dx - 2xydy$, где *L* – ломаная *OBA*: $O(0;0)$, $B(2;0)$, $A(2;1)$;

4.2 $\int\limits_L \sqrt{2-z^2}\left(2z - \sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, где L – дуга кривой $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$.;

4.3 $\int\limits_L (y - x^2)dx - (y^2 - x)dy$, где *L* – дуга окружности $\begin{cases} x = 4\sin t, \\ y = 4\cos t, \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

4.4 $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 4$;

4.5 $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, где *L* – дуга верхней половины эллипса $\begin{cases} x = 6\sin t, \\ y = 3\cos t, \end{cases}$ ”пробегаемая” по ходу часовой стрелки;

4.6 $\int\limits_{L_{OB}} \frac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, где L_{OB} – отрезок прямой соединяющий точки $O(0,0)$ и $B(2,2)$.;

4.7 $\int\limits_L (x^2 - y)dx - (x - y^2)dy$, вдоль дуги *L* окружности $\begin{cases} x = 5\sin t, \\ y = 5\cos t, \end{cases}$ обходя ее против хода часовой стрелки от т. $A(5;0)$ до т. $B(0;5)$;

4.8 $\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)dl$, где L_{AB} – отрезок прямой АВ; $A(-1;0)$ и $B(0;1)$;

4.9 $\int\limits_L ydx + xydy$, где *L* – дуга верхней половины окружности $x^2 + y^2 = 2x$ при положительном направлении обхода контура;

4.10 $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{5}\,(x - y)}$, где L_{AB} – отрезок прямой, заключенной между точками $A(0;4)$ и $B(4;0)$;

4.11 $\int\limits_L (xy + y)dx + (y + x)dy$, где *L* – дуга параболы $y = 2x^3$ от точки $A(1;2)$ до точки $B(-1;-2)$;

4.12 $\int\limits_L \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dl$, где L – дуга кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$;

4.13 $\int\limits_L ydx + \frac{x}{y}dy$, вдоль дуги *L* кривой $y = e^{-x}$ от т. $A(0;1)$ до т. $B(-1;e)$;

4.14 $\int\limits_{L_{AB}} ydl$, где L_{AB} – дуга астроиды $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, заключенная между точками $A(1;0)$ и $B(0;1)$;

4.15 $\int\limits_{L}(xy+x)dx+\frac{x^2}{y}dy$, где L – дуга параболы $y=2\sqrt{x}$ от точки $A(4;4)$ до точки $B(1;2)$;

4.16 $\int\limits_{L_{OB}} ydl$, где L_{OB} – дуга параболы $y^2=\frac{2}{3}x$ между точками $O(0;0)$ и $B\left(\frac{\sqrt{35}}{6};\frac{\sqrt{35}}{3}\right)$;

4.17 $\int\limits_{L}(xy-y)dx+x^2dy$, где L – дуга параболы $y=\sqrt{3-x}$ от точки $A(2;1)$ до точки $B(-1;2)$;

4.18 $\int\limits_{L}\left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, где L – дуга кривой $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=\sqrt{3}t$, $0\le t\le 2\pi$;

4.19 $\int\limits_{L}2xydx+x^2dy$, где L – дуга параболы $x^2=4y$ от точки $A(-2;1)$ до точки $B(-4;4)$;

4.20 $\int\limits_{L} arctg\frac{y}{x}dl$, где L – дуга кардиоиды $\rho=(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$;

4.21 $\int\limits_{L}(xy-y^3)dx+xy^2dy$, где L – дуга параболы $y=2\sqrt[3]{x}$ от точки $A(1;2)$ до точки $B(8;4)$;

4.22 $\int\limits_{L}\sqrt{2y}dl$, где L – первая арка циклоиды $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$;

4.23 $\int\limits_{L}\frac{y^2+1}{y}dx-\frac{x}{y}dy$, где L – отрезок прямой, соединяющей точки $A(1;3)$ и $B(2;5)$;

4.24 $\int\limits_{L_{OA}}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где L_{OA} – отрезок прямой соединяющий точки $O(0;0)$ и $A(1;2)$;

4.25 $\int\limits_{L}(x-\frac{1}{y})dx+xdy$, где L – дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(-2;4)$ до точки $B(-3;9)$;

4.26 $\int\limits_L \frac{(y^2-x^2)\cdot xy}{(x^2+y^2)^2}dl$, где L – дуга кривой $\rho = 9\sin 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.;

4.27 $\int\limits_L 4\cos y dx - y\sin x dy$, где L – отрезок прямой, соединяющей точки $A(1;2)$ и $B(2;4)$;

4.28 $\int\limits_{L_{OABC}} xydl$, где L_{OABC} – контур прямоугольника с вершинами $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(4;2)$, $C(0;2)$;

4.29 $\int\limits_L xydx + (y-x)dy$, где L – дуга параболы $y = x^3$ от т. $A(1;1)$ до т. $B(2;8)$;

4.30 $\int\limits_{L_{ABO}} (x+y)dl$, где L_{ABO} – контур треугольника с вершинами $A(1;0)$, $B(0;1)$, $O(0;0)$.

Задание 5.

Исследовать числовые ряды на сходимость.

5.1 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{3n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n^2+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{n+4}$;

5.2 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{5n^2-2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^3}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+9)}{n^2+2}$;

5.3 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n^3+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+2)^2}{4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n-3}$;

5.4 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+4}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 5^n}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+5}$;

5.5 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+6}{(n+5)^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 3^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+3}$;

5.6 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+6)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{(n+5)\cdot 6^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+5}}{n+6}$;

5.7 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3n-1}{(n+7)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+5)(n-2)}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+7)}$;

5.8 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{(n+8)^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5n^2}{(n+2)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+3}}{8n+4}$;

5.9 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+9)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4\cdot n!}{(n+1)(n+2)(n+3)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$;

5.10 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+5}{n(n+10)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n\cdot(n+2)}{(n+3)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$;

5.11 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+10}{(n+1)^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+3)}{5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+7}$;

5.12 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{7n-2}{n^2+2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2\cdot 2^n}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2+2n}$;

5.13 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{3n^2+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 2^{n-1}}{n^2+2n+3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{2n+3}}$;

5.14 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n(n^2+4)}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 4^n}{(n+1)^4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+5}}$;

5.15 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{(2n+5)^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{(n+2)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+5}$;

5.16 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+5}{(n+6)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^4}{n\cdot n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+6}}$;

5.17 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+7)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n+2}}{(n+5)(n+2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n(n+7)}}$;

5.18 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+4}{(n+8)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{2n}}{n(n+2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{8n+10}$;

5.19 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{(n+9)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 9^n}{(n+1)\cdot(n+2)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+9)^2}$;

5.20 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3n+20}{(5n+10)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n\cdot n}{(n+2)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+10}}$;

5.21 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{21n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+3)^2}{n\cdot 5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n^2-1}$;

5.22 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{7}{(3n+2)\cdot n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)^5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(n+2)}$;

5.23 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}}{n^2+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}}{(n^2+2)(n+3)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+3)\sqrt{n}}$;

5.24 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{(n^2+4)\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!\cdot n^4}{(n+1)^4\cdot 4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+5)}$;

5.25 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{\sqrt{(2n+5)^3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)\cdot n^2}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+5)n}$;

5.26 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{2n}}{(n+6)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{n\cdot 6^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2+6}$;

5.27 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+7)^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{7^{n+2}}{(n+2)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n+1}}{(n+3)(n+7)}$;

5.28 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{\sqrt[3]{(n+8)^5}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 3^{2n+1}}{(n+2)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+8)}$;

5.29 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{6n-1}{(n+9)\cdot n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+3)!}{(n+1)\cdot 9^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{(n+9)^2}}$;

5.30 а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+30}{\sqrt{(5n+10)^5}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n\cdot(n+10)^2}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+10}}$;

Задание 6.

Для данного степенного ряда написать первые четыре члена ряда и исследовать его на сходимость:

6.1 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3(x-1)^n}{2^n\sqrt{(n+1)^5}}$; **6.2** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+2)^{n-1}}{4^n\cdot(n+2)}$; **6.3** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n\cdot(x-3)^{n+1}}{2\sqrt{n+3}}$;

6.4 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n(x+4)^{n-1}}{(n+4)^2}$; **6.5** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-5)^{n+1}}{5\sqrt{n+1}}$; **6.6** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+6)^n}{(n+2)\cdot 2^n}$;

6.7 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-7)^{n+1}}{5^n\sqrt{(n+3)^3}}$; **6.8** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+8)^n\cdot 8^n}{5(n+1)^2}$; **6.9** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-9)^{n-1}}{(n+2)\cdot 2^n}$;

6.10 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n(x+10)^n}{2(n+10)^5}$; **6.11** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n\cdot(x-1)^{n-1}}{4^n\cdot(n+11)}$; **6.12** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4(x+2)^{n+1}}{2^n\cdot\sqrt{n+10}}$;

6.13 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n(x-3)^{n-1}}{\sqrt[3]{(n+13)^2}}$; **6.14** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n\cdot(x+4)^{n+1}}{5^n\cdot\sqrt{n+1}}$; **6.15** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n\cdot(x-5)^n}{(n+15)\cdot 2^n}$;

6.16 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-6)^{n+1}}{\sqrt{5^n(n+16)}}$; **6.17** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+7)^n\cdot 7^n}{4^n\cdot(n+1)}$; **6.18** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{6(x-8)^{n-1}}{(n+7)\cdot 2^n}$;

6.19 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n\cdot(x+9)^n}{2^n\cdot(n+1)\sqrt{n}}$; **6.20** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n\cdot(x-10)^{n-1}}{3^n\cdot(n^2+5)}$; **6.21** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n\cdot(x+1)^{n+1}}{3^n\cdot\sqrt{n+7}}$;

6.22 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n\cdot(x-2)^{n-1}}{(n^2+22n)\cdot 7^n}$; **6.23** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+3)^{n+1}}{5^n\cdot\sqrt{n^2+1}}$; **6.24** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-4)^n\cdot 9^n}{(n^3+1)\cdot 2^n}$;

6.25 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{8(x+5)^{n+1}}{5^n\cdot\sqrt{n^3+3n}}$; **6.26** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5\cdot(x-6)^n\cdot 8^n}{\sqrt[3]{n^2+3n+1}}$; **6.27** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n\cdot(x+7)^{n-1}}{(2n\sqrt{n}+5)\cdot 7^n}$;

6.28 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n\cdot(x-8)^n}{8^n\cdot\sqrt{4n^2-n}}$; **6.29** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{7^n\cdot(x+9)^{n-1}}{4^n\cdot\sqrt[4]{n+2}}$; **6.30** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n\cdot(x-10)^{n+1}}{5^n\cdot\sqrt{n^3+3n}}$;

Задание 7.

Найти три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x; y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = y_0$.

7.1 $y' = 3x \cdot y - \sin x$, $y(0) = 2$;

7.2 $y' = 4x \cdot y^2 - e^x + 2$, $y(0) = 0$;

7.3 $y' = 3x^3 + x \cdot y^2$, $y(0) = 1$;

7.4 $y' = 3\sin x + y \cdot e^x + 2$, $y(0) = 1$;

7.5 $y' = 4x + e^x + y$, $y(0) = 3$;

7.6 $y' = 3x^2 y - 2xy + 4$, $y(0) = 0$;

7.7 $y' = 4xy^2 - x^2 y$, $y(0) = 3$;

7.8 $y' = 6x \cdot y^2 + e^{2x}$, $y(0) = 2$;

7.9 $y' = x + 2y^2 + 3x^3 y$, $y(0) = 6$;

7.10 $y' = 2\cos x + y^2$, $y(0) = 1$;

7.11 $y' = 4e^x - xy$, $y(0) = 0$;

7.12 $y' = 4x^2 y^2 - 2x + y$, $y(0) = 4$;

7.13 $y' = x^2 y + \sin 2x$, $y(0) = 2$;

7.14 $y' = 3x^2 y - e^x + 4$, $y(0) = 0$;

7.15 $y' = 3x^2 y - \cos 3x + 1$, $y(0) = 1$;

7.16 $y' = 2x \cdot y^2 + e^{4x}$, $y(0) = 0$;

7.17 $y' = \sin 2x + 3y^2 - x$, $y(0) = 1$;

7.18 $y' = x^2 + y^2 - x + y$, $y(0) = 2$;

7.19 $y' = 3x \cdot y^2 - \sin 5x$, $y(0) = 3$;

7.20 $y' = 3\sin x + x^2 y + x$, $y(0) = 2$;

7.21 $y' = 2x^3 + 3y^2 + y$, $y(0) = 3$;

7.22 $y' = 3x^2 - yx + \cos x$, $y(0) = 4$;

7.23 $y' = \cos x + y + e^{4x}$, $y(0) = 1$;

7.24 $y' = 4\sin x + y^2 + 2x$, $y(0) = 1$;

7.25 $y' = 3y + 2y^2$, $y(0) = 4$;

7.26 $y' = x + 2y^2 + 3e^{3x}$, $y(0) = 0$;

7.27 $y' = 5e^x + xy - \sin x$, $y(0) = 0$;

7.28 $y' = 3xy - e^{2x} + 2$, $y(0) = 0$;

7.29 $y' = 3x \cdot y^2 + y$, $y(0) = 2$;

7.30 $y' = 3x \cdot y^3 - 2y + 2x$, $y(0) = 2$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 3

Задание 1.

Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторных с внешним интегрированием по *x* и по *y*, если область *D* задана линиями:

$$y = 2x^2 - 1,\ 2x - y + 3 = 0.$$

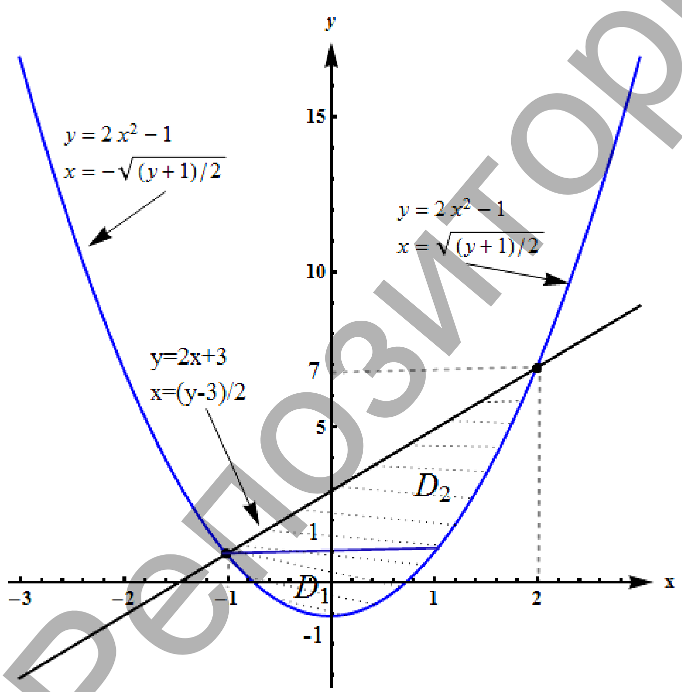
Вычислить любой из найденных интегралов для случая $f(x;y) = 1$.

Решение. Будем называть область *D* правильной относительно оси *Oy*, если она определяется системой неравенств: $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$. Двойной интеграл в этом случае вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy. \qquad (1)$$

Область *D* будет правильной относительно оси *Ox*, если она определяется системой неравенств: $c \le y \le d$, $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$. В этом случае двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)dx. \qquad (1)$$



Построим область *D* на плоскости *xOy*. Данная область ограничена снизу параболой $y = 2x^2 - 1$, сверху – прямой $2x - y + 3 = 0$.

Найдем их точки пересечения. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 1, \\ 2x - y + 3 = 0. \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения *y* и подставляя его в первое, получим квадратное уравнение

$$2x^2 - 2x - 4 = 0,$$

корнями которого являются $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. При этом $y_1 = 1$ и $y_2 = 7$.

Область интегрирования *D* является правильной относительно оси *Oy*. Следовательно, согласно формуле (1), получим:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{2x^2-1}^{2x+3} f(x;y)dy.$$

С другой стороны, данная область не является правильной относительно оси *Ох*. Поэтому разобьем ее на области, являющиеся правильными относительно оси *Ох*. Так как правый участок границы области *D* задан двумя линиями $y = 2x^2 - 1$ и $2x - y + 3 = 0$, то прямая $y = 1$ разбивает ее на две области: D_1 и D_2, являющимися правильными относительно оси *Ох*. Для того чтобы определить границы этих областей, выразим из уравнения параболы переменную х:

$$y = 2x^2 - 1 \iff y + 1 = 2x^2 \iff \frac{y+1}{2} = x^2 \iff x = \pm\sqrt{\frac{y+1}{2}}.$$

В уравнении прямой $2x - y + 3 = 0$ выразим *x* через *y*: $x = \dfrac{y-3}{2}$.

Тогда область D_1 может быть записана как система неравенств: $-1 \le y \le 1$, $-\sqrt{\dfrac{y+1}{2}} \le x \le \sqrt{\dfrac{y+1}{2}}$. Аналогичным образом область D_2 записывается в виде системы неравенств: $1 \le y \le 7$, $\dfrac{y-3}{2} \le x \le \sqrt{\dfrac{y+1}{2}}$.

Для представления двойного интеграла в виде повторных, воспользуемся формулой (2) по каждой из полученных областей:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{\frac{y+1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y+1}{2}}} f(x;y)dx + \int_{1}^{7} dy \int_{\frac{y-3}{2}}^{\sqrt{\frac{y+1}{2}}} f(x;y)dx.$$

Вычислить для случая $f(x;y) = 1$ первый найденный интеграл:

$$\iint\limits_D dxdy = \int_{-1}^{2} dx \int_{2x^2-1}^{2x+3} dy = \int_{-1}^{2} dx (y)\Big|_{2x^2-1}^{2x+3} = \int_{-1}^{2}\big((2x+3) - (2x^2-1)\big)dx =$$

$$= \int_{-1}^{2}\left(-2x^2 + 2x + 4\right)dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\cdot 2^3 + 2^2 + 4\cdot 2\right) - \left(-\frac{2}{3}\cdot(-1)^3 + (-1)^2 + 4\cdot(-1)\right) = 9.$$

<u>Ответ:</u> $\iint\limits_D dxdy = 9$;

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{2} dx \int_{2x^2-1}^{2x+3} f(x;y)dy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{\frac{y+1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y+1}{2}}} f(x;y)dx + \int_{1}^{7} dy \int_{\frac{y-3}{2}}^{\sqrt{\frac{y+1}{2}}} f(x;y)dx.$$

Задание 2.

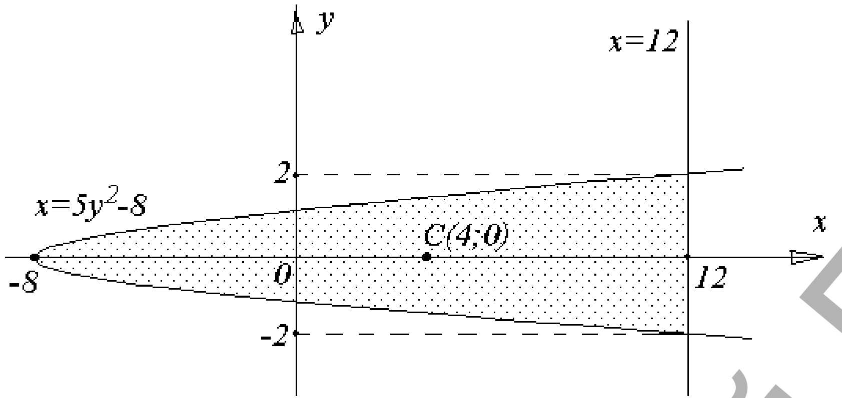
Вычислить координаты центра масс однородной ($\rho(x,y) = 1$) материальной пластины *D*, ограниченной линиями: $x = 5y^2 - 8$ и $x = 12$.

<u>Решение.</u> Координаты центра масс $C(x_c; y_c)$ материальной пластины с поверхностной плотностью $\rho(x,y)$ определяются по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{m},\ y_c = \frac{M_x}{m},$$

где $m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$ - масса пластины, а величины $M_x = \iint\limits_D y \cdot \rho(x,y)dxdy$, $M_y = \iint\limits_D x \cdot \rho(x,y)dxdy$ - статические моменты пластины *D* относительно осей *Ox* и *Oy* соответственно.

Построим область *D* на плоскости *xOy*. Данная область ограничена слева параболой $x = 5y^2 - 8$, справа – прямой $x = 12$. Их точками пересечения являются (*12*;-*2*) и (*12*;*2*).



Так как область *D* является правильной относительно оси *Ox*, то вычисляем искомые интегралы переходя к повторным:

$$m = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{5y^2-8}^{12} dx = \int\limits_{-2}^{2} dy(x)\Big|_{5y^2-8}^{12} = \int\limits_{-2}^{2} \left(12 - (5y^2 - 8)\right)dx = \int\limits_{-2}^{2} \left(20 - 5y^2\right)dx =$$

$$= \left(20y - \frac{5}{3}y^3\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(20 \cdot 2 - \frac{5}{3}\cdot 2^3\right) - \left(20 \cdot (-2) - \frac{5}{3}\cdot(-2)^3\right) = 53\frac{1}{3},$$

$$M_x = \iint\limits_D ydxdy = \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{5y^2-8}^{12} ydx = \int\limits_{-2}^{2} dy(yx)\Big|_{5y^2-8}^{12} = \int\limits_{-2}^{2} \left(20y - 5y^3\right)dx =$$

$$= \left(10y^2 - \frac{5}{4}y^4\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(10 \cdot 2^2 - \frac{5}{4}\cdot 2^4\right) - \left(10 \cdot (-2)^2 - \frac{5}{4}\cdot(-2)^4\right) = 0,$$

$$M_y = \iint\limits_D xdxdy = \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{5y^2-8}^{12} xdx = \int\limits_{-2}^{2} dy\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{5y^2-8}^{12} = \int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{12^2}{2} - \frac{(5y^2-8)^2}{2}\right)dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{2}\left(40 + 40y^2 - \frac{25}{2}y^4\right)dx = \left(40y + \frac{40}{3}y^3 - \frac{5}{2}y^5\right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= \left(40 \cdot 2 + \frac{40}{3}\cdot 2^3 - \frac{5}{2}\cdot 2^5\right) - \left(40 \cdot (-2) + \frac{40}{3}\cdot(-2)^3 - \frac{5}{2}\cdot(-2)^5\right) = 213\frac{1}{3}.$$

Найдем координаты центра масс:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{213\frac{1}{3}}{53\frac{1}{3}} = \frac{\frac{640}{3}}{\frac{160}{3}} = 4,\ y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{0}{53\frac{1}{3}} = 0.$$

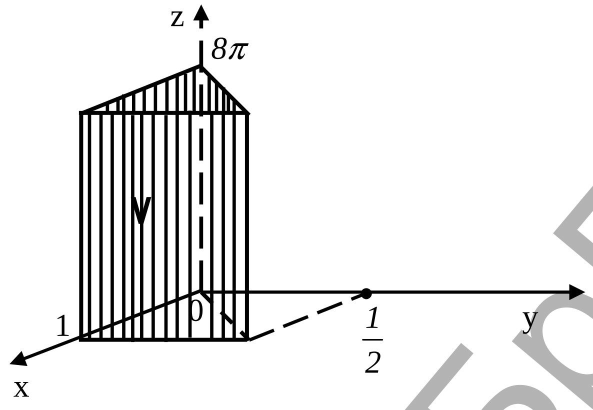
<u>Ответ:</u> $C(4;0)$.

Задание 3.

Вычислить тройной интеграл:

$$I=\iiint\limits_V x^2\sin\left(4\pi xy\right)dxdydz\,,\ V:\ x=1,\ y=\frac{x}{2},\ y=0\,,\ z=0\,;\ z=8\pi\,.$$

<u>Решение.</u> Изобразим область интегрирования



Для данной области V получаем

$$I=\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_0^{\frac{x}{2}}\sin\left(4\pi xy\right)dy\int\limits_0^{8\pi}dz=\left(z\Big|_0^{8\pi}\right)\cdot\int\limits_0^1\frac{x^2}{4\pi x}\left(-\cos\left(4\pi xy\right)\right)\Big|_0^{x/2}dx=$$

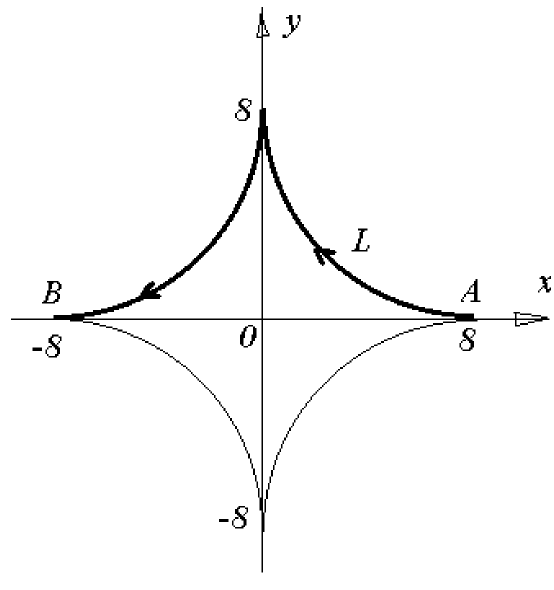
$$=8\pi\frac{(-1)}{4\pi}\int\limits_0^1\left(x\cos\left(2\pi x^2\right)-x\right)dx=2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4\pi}\sin\left(2\pi x^2\right)\right)\Big|_0^1=1 \text{ (куб.ед.)}$$

<u>Ответ:</u> 1 (куб. ед.).

Задание 4.

а) Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L\left(\sqrt[3]{x}+y\right)dx-\left(\sqrt[3]{y}+x\right)dy$, где линия *L*. – верхняя дуга астроиды $\begin{cases}x=8\cos^3 t,\\ y=8\sin^3 t,\end{cases}$ от т. $A(8;0)$ до т. $B(-8;0)$. Сделать чертеж.

<u>Решение.</u> Выполним чертеж:



Найдем *dx* и *dy*:

$$dx=d(8\cos^3 t)=24\cos^2 t(-\sin t)dt\,,$$

$$dy=d(8\sin^3 t)=24\sin^2 t\cdot\cos t dt\,.$$

Подставляя координаты точек *A* и *B* в уравнение астроиды получаем, что при перемещении от точки $A(8;0)$ к точке $B(-8;0)$ параметр *t* меняется от *0* до π, ($0\le t\le\pi$). Тогда

$$\int\limits_L\left(\sqrt[3]{x}+y\right)dx-\left(\sqrt[3]{y}+x\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left(\sqrt[3]{8\cos^3 t}+8\sin^3 t\right)\left(24\cos^2 t\right)(-\sin t)dt-$$

$$-\left(\sqrt[3]{8\sin^3 t}+8\cos^3 t\right)24\sin^2 t\cdot\cos t dt=$$

$$=\int_0^{\pi}\Big(\left(2\cos t+8\sin^3 t\right)\left(24\cos^2 t\right)(-\sin t)-\left(2\sin t+8\cos^3 t\right)24\sin^2 t\cdot\cos t\Big)dt=$$

$$=\int_0^{\pi}\left(-48\cos^3 t\cdot\sin t-192\cos^2 t\cdot\sin^4 t-48\cos t\cdot\sin^3 t-192\cos^4 t\cdot\sin^2 t\right)dt=$$

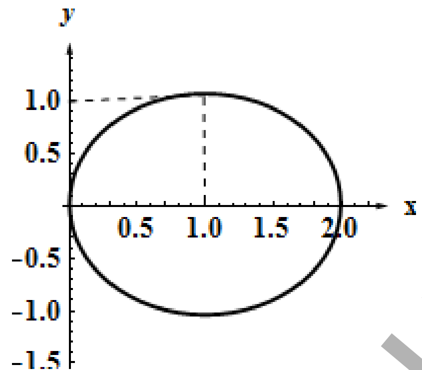
$$=\int_0^{\pi}\left(-48\cos t\cdot\sin t(\cos^2 t+\sin^2 t)-192\cos^2 t\cdot\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)\right)dt=$$

$$=\int_0^{\pi}\left(-48\cos t\cdot\sin t-192\cos^2 t\cdot\sin^2 t\right)dt=\int_0^{\pi}\left(-24\sin 2t-48\sin^2 2t\right)dt=$$

$$=12\cos 2t\Big|_0^{\pi}-24\int_0^{\pi}(1-\cos 4t)dt=-(24t-6\sin 4t)\Big|_0^{\pi}=-24\pi.$$

Ответ: -24π.

б) Вычислить криволинейный интеграл: $\int_L (x-y)dl$, где L – окружность $x^2+y^2=2x$.



Решение. Запишем уравнения окружности в полярных координатах: $r^2=2r\cos\varphi$ или $r=2\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Тогда

$$r'=-2\sin\varphi,$$

$$dl=\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi=\sqrt{4\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi}\,d\varphi=2d\varphi.$$

Следовательно,

$$\int_L (x-y)dl=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(r\cos\varphi-r\sin\varphi)2d\varphi=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(2\cos^2\varphi-2\cos\varphi\sin\varphi\right)d\varphi=$$

$$=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(2\cos^2\varphi-\sin 2\varphi\right)d\varphi=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi-\sin 2\varphi)d\varphi=$$

$$=\left(2\varphi+\sin 2\varphi+\cos 2\varphi\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=2\pi.$$

Ответ: 2π.

Задание 5.

Исследовать числовые ряды на сходимость.

а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{4n+7}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^4+8}}$; в) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{(n+6)\cdot 3^n}$; г) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; д) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n+1}}{2n^2+3}$.

<u>Решение.</u> а) Мы имеем ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{4n+7}=\frac{3}{11}+\frac{4}{15}+\frac{5}{19}+\frac{6}{23}+\dots$. Его члены положительны и убывают. Найдем к чему стремится его *n*-ый член при стремлении *n* к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{4n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{4+\frac{7}{n}}=\frac{1}{4}\neq 0.$$

Значит, необходимое условие сходимости ряда не выполняется и ряд расходится.

б) Мы имеем ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^4+8}}=\frac{3}{\sqrt{9}}+\frac{4}{\sqrt{24}}+\frac{5}{\sqrt{89}}+\frac{6}{\sqrt{264}}+\dots$. Его члены положительны и убывают. Найдем к чему стремится его *n*-ый член при стремлении *n* к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^4+8}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{n^2+\frac{8}{n^2}}}=0.$$

Значит, необходимое условие сходимости ряда выполняется и ряд может как сходиться, так и расходиться.

Исследуем данный ряд по предельному признаку сравнения, согласно которому два ряда сходятся или расходятся одновременно, если $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=t\neq 0$. Так как в числителе максимальная степень *n* равна *1*, а в знаменателе – *2*, то сравнивать будем с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ ($\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$). Найдем предел отношения общих членов исходного и гармонического рядов при стремлении *n* к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{\sqrt{n^4+8}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{\sqrt{n^4+8}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{8}{n^2}}}=1\neq 0.$$

Таким образом, по предельному признаку сравнения, исходный ряд и гармонический сходятся или расходятся одновременно. Так как гармонический ряд расходится, то расходится и исходный ряд.

в) Мы имеем ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{(n+6)\cdot 3^n}=\frac{2}{21}+\frac{6}{72}+\frac{24}{243}+\frac{120}{810}+\dots$. Его члены положительны и убывают. Так как в числителе общего члена ряда присутствует факториал, а в знаменателе степень, то при проверке стремления этого члена при стремлении *n* к бесконечности получим довольно сложный предел:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+6)\cdot 3^n},$$

то вычислять его не будем.

Исследуем данный ряд на сходимость по предельному признаку Д'Аламбера: если $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то при $q<1$ данный ряд сходится, при $q>1$ – расходится, при $q=1$ – требуется исследовать по другим признакам.

Поскольку $a_n = \frac{(n+1)!}{(n+6)\cdot 3^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+2)!}{(n+7)\cdot 3^{n+1}} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)!}{(n+7)\cdot 3^n\cdot 3}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+2)\cdot(n+1)!}{(n+7)\cdot 3^n\cdot 3}}{\dfrac{(n+1)!}{(n+6)\cdot 3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot(n+1)!}{(n+7)\cdot 3^n\cdot 3}\cdot\frac{(n+6)\cdot 3^n}{(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot(n+6)}{(n+7)3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+8n+12}{3n+21} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{8}{n}+\frac{12}{n^2}}{\frac{3}{n}+\frac{21}{n^2}} = +\infty > 1.$$

Следовательно, данный ряд расходится.

г) Мы имеем ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{e}+\frac{1}{e^{\sqrt{2}}\sqrt{2}}+\frac{1}{e^{\sqrt{3}}\sqrt{3}}+\frac{1}{2e^2}+\ldots$. Его члены положительны и убывают. Найдем к чему стремится его *n*-ый член при стремлении *n* к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{n}}\sqrt{n}} = 0.$$

Значит, необходимое условие сходимости ряда выполняется и ряд может сходиться.

Исследуем этот ряд на сходимость с помощью интегрального признака Коши. В качестве функции $f(x)$ возьмем функцию $f(x) = \frac{1}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}$ при $x \ge 1$. Эта функция на данном промежутке непрерывна и убывает, причем $f(n) = \frac{1}{e^{\sqrt{n}}\sqrt{n}}$. Тогда, по интегральному признаку, ряд будет сходиться или расходиться одновременно с несобственным интегралом $\int_1^{+\infty} f(x)dx$. Вычислим этот интеграл:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^A\frac{dx}{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}} = \left[\sqrt{x}=t,\quad dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}},\begin{matrix} x=A, & t=\sqrt{A}\\ x=1, & t=1\end{matrix}\right] =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_1^{\sqrt{A}} \frac{2dt}{e^t} = \lim_{A\to\infty} (-\frac{2}{e^t})\Big|_1^{\sqrt{A}} = \lim_{A\to\infty} (-\frac{2}{e^A} + \frac{2}{e}) = 0 + \frac{2}{e} = \frac{2}{e}.$$

Так как несобственный интеграл равен числу, то он сходится. Следовательно, исходный ряд – сходящийся.

д) Мы имеем ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cdot (-1)^{n+1}}{2n^2+3} = \frac{1}{5} - \frac{2}{11} + \frac{3}{21} - \frac{4}{35} + \ldots$. Так как любые два соседних члена этого ряда имеют разные знаки, то ряд – знакочередующийся.

Исследуем этот ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин данного, то есть $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n^2+3}$. Сравним этот ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Найдем предел отношения их общих членов при стремлении *n* к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2n^2+3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Таким образом, по предельному признаку сравнения, так как гармонический ряд расходится, то расходится и ряд из абсолютных величин.

То есть исходный ряд не сходится абсолютно. Исследуем его на условную сходимость. По признаку Лейбница, если для знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ или $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ выполняются условия:

1) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ и 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

то ряд сходится.

Исходный ряд знакочередующийся и удовлетворяет условиям признака Лейбница:

1) его общий член стремится к нулю при возрастании *n* ($\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n \cdot (-1)^{n+1}}{2n^2+3} \right| = 0$);

2) члены ряда убывают по абсолютной величине

$$(\frac{1}{5} \geq \frac{2}{11} \geq \frac{3}{21} \geq \frac{4}{35} \geq \ldots \geq \frac{n}{2n^2+3} \geq \ldots).$$

Значит, ряд сходится. А так как ряд из абсолютных величин расходится, то исходный ряд сходится условно.

<u>Ответ:</u> а) ряд расходится; б) ряд расходится; в) ряд расходится; г) ряд сходится; г) ряд сходится условно.

Задание 6.

Для степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{17(x-9)^n}{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}}$ написать первые четыре члена ряда и исследовать его на сходимость.

<u>Решение.</u> Напишем первые четыре члена ряда, подставляя в формулу общего члена $u_n=\frac{17(x-9)^n}{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}}$ вместо n соответственно 1, 2, 3, 4:

$$u_1=\frac{17(x-9)}{12\cdot\sqrt[4]{3}},\ u_2=\frac{17(x-9)^2}{12^2\cdot\sqrt[4]{12}},\ u_3=\frac{17(x-9)^3}{12^3\cdot\sqrt[4]{33}},\ u_4=\frac{17(x-9)^4}{12^4\cdot\sqrt[4]{72}}.$$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{17(x-9)^n}{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}}=\frac{17(x-9)}{12\cdot\sqrt[4]{3}}+\frac{17(x-9)^2}{12^2\cdot\sqrt[4]{12}}+\frac{17(x-9)^3}{12^3\cdot\sqrt[4]{33}}+\frac{17(x-9)^4}{12^4\cdot\sqrt[4]{72}}+\ldots$

Найдем интервал сходимости ряда, используя признак Д'Аламбера.

Поскольку

$$u_n=\frac{17(x-9)^n}{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}},\ u_{n+1}=\frac{17(x-9)^{n+1}}{12^{n+1}\sqrt[4]{(n+1)^3+2n+2}}=\frac{17(x-9)^n\cdot(x-9)}{12^n\cdot 12\sqrt[4]{n^3+3n^2+5n+3}},$$

то

$$q=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{17(x-9)^n\cdot(x-9)}{12^n\cdot 12\sqrt[4]{n^3+3n^2+5n+3}}\cdot\frac{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}}{17(x-9)^n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-9)}{12}\cdot\sqrt[4]{\frac{n^3+2n}{n^3+3n^2+5n+3}}\right|=\frac{|x-9|}{12}\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{3}{n^3}}}=\frac{|x-9|}{12}.$$

Найдем значения *x* при которых $q<1$ и данный ряд сходится:

$$\frac{|x-9|}{12}<1\quad\Leftrightarrow|x-9|<12\quad\Leftrightarrow\ -12<x-9<12\quad\Leftrightarrow\ -3<x<21.$$

Следовательно, на интервале $(-3;21)$ данный ряд сходится.

Исследуем ряд на концах интервала.

При $x=21$ получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{17\cdot 12^n}{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{17}{\sqrt[4]{n^3+2n}}$. Сравним этот ряд с рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$, который расходится. Найдем предел отношения их общих членов при стремлении *n* к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{17}{\sqrt[4]{n^3+2n}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{17n^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{n^3+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{17}{\sqrt[4]{1+\frac{2}{n^2}}}=17\neq 0.$$

Таким образом, по предельному признаку сравнения, данный ряд расходится.

При $x=-3$ получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{17(-12)^n}{12^n\sqrt[4]{n^3+2n}}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{17(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+2n}}$, который является знакочередующимся. Проверим для него выполнение условий признака Лейбница:

1) его общий член стремится к нулю при возрастании *n* ($\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{17(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+2n}}\right|=0$);

2) члены ряда убывают по абсолютной величине ($\frac{17}{\sqrt[4]{3}}>\frac{17}{\sqrt[4]{12}}>\frac{17}{\sqrt[4]{33}}>\frac{17}{\sqrt[4]{72}}>\ldots$).

Значит, ряд сходится (*условно*, так как ряд из абсолютных величин расходится).

Прибавляя точку $x=-3$ к интервалу сходимости, получим область сходимости исходного ряда: $[-3;21)$.

Ответ. область сходимости исходного ряда: $[-3;21)$.

Задание 7.

Найти пять первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения $y'=y^2+x^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0.5$.

Решение. Будем искать решение дифференциального уравнения в виде ряда Маклорена: $y(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$.

Из условия $y'=y^2+x^2$, полагая $x=0$, $y=0.5$ получим $y'(0)=0.5^2+0^2=0.25$.

Продифференцируем уравнение $y'=y^2+x^2$ по *x*. Получим

$$y''=2yy'+2x \;\Rightarrow\; y''(0)=2\cdot 0.5\cdot 0.25+2\cdot 0=0.25.$$

Дифференцируя далее, находим последовательно:

$$y'''=2yy''+2y'^2+2 \;\Rightarrow\; y'''(0)=2\cdot 0.5\cdot 0.25+2\cdot 0.25^2+2=2.375;$$

$$y^{IV}=2yy'''+6y'y'' \;\Rightarrow\; y^{IV}(0)=2\cdot 0.5\cdot 2.375+6\cdot 0.25\cdot 0.25=2.75;\ldots .$$

Таким образом, решение данного уравнения имеет вид:

$$y(x)=0.5+\frac{0.25}{1}x+\frac{0.25}{2}x^2+\frac{2.375}{6}x^3+\frac{2.75}{24}x^4+\ldots \text{ или}$$

$$y(x)=0.5+0.25x+0.125x^2+0.3958x^3+0.11458x^4+\ldots .$$

Ответ: $y(x)=0.5+0.25x+0.125x^2+0.3958x^3+0.11458x^4+\ldots$.

Учебно-методическая литература

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Наука, 1985 г., т. I, II.
2. Жевняк Р. М., Карпук А. А. Высшая математика., ч.3-4, Минск, ВШ, 1984-1988 г.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., Наука, 1985 г.
4. Сборник задач по математике для втузов (под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича). М., Наука, 1981 г., ч. I, II.
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (под ред. А.П. Рябушко), Минск, ВШ, 1991, ч. 3.

Дополнительная литература.

6. Гусак А.А. Высшая математика, т.1, 2. Минск, ВШ, 1988.
7. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике. Минск, ВШ, 1988.
8. Гусак А.А. Справочник по высшей математике. Минск, Навука і тэхніка, 1991.
9. Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы. Минск, 1988.
10. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., ВШ,1983.
11. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях. М., ВШ, 1983.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:
Швычкина Елена Николаевна
Мороз Людмила Трофимовна
Наумовец Светлана Николаевна
Золотухина Лада Станиславовна

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. РЯДЫ

Методические рекомендации
и варианты контрольных работ
для студентов технических специальностей
заочной формы обучения

Текст печатается в авторской редакции

Ответственный за выпуск: Швычкина Е.Н.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная вёрстка: Боровикова Е.А.

Подписано к печати 27.02.2015 г. Формат 60х84 1/16. Гарнитура Arial Narrow.
Бумага «Performer». Усл. п. л. 1,63. Уч. изд. 1,75. Заказ № 169. Тираж 50 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.