**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
**«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

# ПРАКТИКУМ

ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

**Часть VII**

Брест 2015

УДК 519.2.(076)
ББК 22.17

В настоящем практикуме рассматриваются задачи и упражнения по основным темам теории вероятностей и математической статистики, которые изучаются студентами технических специальностей ВТУЗов. Содержатся краткие теоретические сведения и наборы заданий для аудиторных и индивидуальных работ, даны решения типовых вариантов.

Издается в VII частях. Часть VII.

Составители: Е.Н. Швычкина, доцент, к. ф-м. н.,
Л.Т. Мороз, доцент,
С.Н. Наумовец, старший преподаватель,
В.П. Черненко, доцент,
В.Т. Джура, ассистент.

Рецензенты: Чичурин А.В., профессор кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений Учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», д. ф-м. н. (Украина), профессор;
Пантелеева Е.В., старший преподаватель кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений Учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к. ф-м. н.

**Содержание**

# I. Случайные события

## 1.1 Элементы комбинаторики (размещения, перестановки, сочетания)

Раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных элементов (объектов), называется *комбинаторикой.*

Большинство задач комбинаторики решается с помощью двух общих правил: правила суммы и правила произведения.

*Правило суммы:*

Если некоторый объект *A* можно выбрать *m* способами, а объект *B* – *k* способами (не такими, как *A*), то объект «или *A*, или *B*» можно выбрать *m*+ *k* способами.

*Правило произведения:*

Если объект *A* можно выбрать *m* способами, а после каждого такого выбора другой объект *B* можно выбрать (независимо от выбора объекта *A*) *k* способами, то объект « *A* и *B*» можно выбрать $m \cdot k$ способами.

Пусть имеем конечное множество каких-то элементов: $a_1, a_2, ..., a_n$.

Определение 1. *Размещениями из n элементов по m* $(m < n)$ *называются подмножества, каждое из которых содержит m элементов из данных n, отличающихся одно от другого или элементами, или их порядком, или же и тем и другим.*

Число размещений из *n* элементов по *m* вычисляют по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Определение 2. *Перестановками из n элементов называются размещения из n по n.*

Т.к. все элементы участвуют в перестановках, то перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов.

Число перестановок из *n* элементов обозначается $P_n$ и определяется по формуле:

$$P_n = A_n^n = n(n-1)...1 = n!.$$

Определение 3. *Сочетаниями из n элементов по m* $(m < n)$ *называются те размещения из n элементов по m, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.*

Число сочетаний $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Свойства сочетаний:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$, если *m* мало отлично от *n*, то удобно использовать это свойство.
2. $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$;
3. $C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^n C_n^n = 0$;
4. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.

До сих пор считали, что все элементы множества различны. Пусть некоторые элементы повторяются. Среди *n* элементов *k* различных; элементов первого типа $n_1$, элементов второго типа $n_2$, ..., элементов *k*-го типа $n_k$.

$$n_1 + n_2 + ... + n_k = n.$$

Подсчитаем *число перестановок с повторениями*. При перестановке $n$ элементов всего $n!$ размещений, но перестановки элементов одного и того же типа ничего не меняют. Перестановки элементов 1, 2, … , $k$ типов можно делать одновременно независимо друг от друга. Поэтому после $n_1!\, n_2! ... n_k!$ перестановок элементы исходной перестановки не изменятся.

Итак, число перестановок с повторяющимися элементами равно

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, ...\, n_k!}.$$

Пусть данное множество содержит $n$ элементов, из которых надо образовать *размещения по $m$ элементов с повторениями*. Очевидно, что любой элемент (первый, второй, …, $m$-ый) может быть выбран $n$ способами. По правилу произведений получаем, что число таких размещений будет равно

$$\tilde{A}_n^m = n^m.$$

Число сочетаний $\tilde{C}_n^m$ с повторениями из $n$ элементов по $m$ определяется по формуле $\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$.

**Задания для аудиторной работы**

1. Найти все сочетания и размещения из четырехэлементного множества $\{a, b, c, d\}$ по 2.

2. Студенты некоторого курса изучают 12 дисциплин. В расписание занятий каждый день включается 3 предмета. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий на каждый день?

3. Сколькими способами можно рассадить 8 человек по 8 вагонам поезда, если в каждый вагон сядет по одному человеку

4. Из девяти значащих цифр составляются: а) трехзначные числа; б) четырехзначные числа, цифры в которых не повторяются. Сколько таких чисел может быть составлено?

5. Сколькими способами можно из 15 человек составить делегацию в составе 8 человек?

6. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, 1 ферзь, 1 король) на первой линии шахматной доски?

7. Сколькими способами можно выставить на игру футбольную команду, состоящую из трех нападающих, трех полузащитников, четырех защитников и вратаря, если всего в команде 6 нападающих, 3 полузащитника, 6 защитников и 1 вратарь?

8. Из чисел 1, 2, 3, …, 100 составлены всевозможные парные произведения. Сколько полученных чисел будут кратны трем?

9. Сколькими способами можно из 9 человек образовать 3 комиссии по 4, по 3 и по 2 человека в каждой?

10. Из 20 сотрудников лаборатории 5 человек должны уехать в командировку. Сколько может быть составов отъезжающей группы, если заведующий лабораторией и два ведущих инженера одновременно не должны уезжать?

### Задания для индивидуальной работы

1. Есть *n* колоколов разных размеров, каждый из которых при ударе одинаковой силы издает звук, отличный от звуков остальных колоколов. По колоколам ударяют *m* раз. Сколькими способами можно извлечь при этом звук, состоящий из: а) *s* различных звуков; б) *s* любых звуков?

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *n* | 7 | 8 | 9 | 7 | 8 | 9 | 7 | 8 | 9 | 6 |
| *m* | 3 | 4 | 5 | 5 | 4 | 3 | 4 | 5 | 4 | 3 |
| *s* | 3 | 4 | 5 | 5 | 4 | 3 | 4 | 5 | 4 | 3 |

2. В школе *n* учеников и *m* учителей. Сколькими способами можно выбрать делегацию, состоящую из *k* учителей и *l* учеников?

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *n* | 30 | 34 | 32 | 33 | 35 | 31 | 38 | 36 | 35 | 34 |
| *m* | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| *k* | 2 | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 |
| *l* | 5 | 6 | 8 | 7 | 5 | 8 | 7 | 6 | 6 | 5 |

3. *N* человек нужно разместить в *k* одноместных, *l* двуместных, *s* трехместных и *m* четырехместных номерах гостиницы. Сколькими способами они могут быть размещены в этих четырех номерах?

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *N* | 10 | 8 | 8 | 10 | 11 | 12 | 10 | 8 | 11 | 8 |
| *k* | 1 | 2 | 3 | 2 | 0 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| *l* | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| *s* | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| *m* | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 1 |

## 1.2 Классическое и геометрическое определения вероятности случайного события

*Событием* называется любое явление, о котором можно сказать «произошло», «не произошло», «появилось», «не появилось» и т.п. Событие называется *достоверным*, если оно обязательно наступает при некоторых данных условиях. Если при данных условиях событие никогда не наступает, оно называется *невозможным*. *Случайным* называется такое событие, которое в результате опыта может появиться или не появиться.

*Относительной частотой* события *A* или просто частотой, обозначаемой *W(A)*, называется отношение числа опытов *m*, в которых появилось событие *A*, к числу всех проведенных опытов *n*, т.е. $W(A)=\frac{m}{n}$.

*Вероятностью случайного события A* называется отношение числа *m* элементарных исходов опыта, благоприятствующих событию *A*, к общему числу *n* всех равновозможных исходов опыта.

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Вероятность любого события удовлетворяет неравенству $0 \le P(A) \le 1$. Для достоверного события $P(U)=1$, для невозможного $P(V)=0$. Если число элементарных исходов опыта бесконечно и заполняет область *R*, а число исходов, благоприятствующих событию *A*, бесконечно и заполняет область *Q*, то вероятность случайного события *A* определяется по формуле геометрической вероятности

$$P(A) = \frac{мера\ (Q)}{мера\ (R)},$$

где мера области – это или ее длина, или площадь, или объем.

### Задания для аудиторной работы

1. Куб, все грани которого окрашены, распилили на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешали. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а)1; б) 2; в) 3; г) 4.

2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7.

3. В ящике имеются 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

4. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных – 5 отличников.

5. Из партии втулок, изготовленных токарем за смену, случайным образом для контроля взяты 10 штук. Найти вероятность того, что среди них 2 втулки второго сорта, если во второй партии 25 втулок первого сорта и 5 – второго.

6. На 8 карточках написаны буквы *А, Г, И, Л, М, О, Р, Т*. После их перемешивания вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают в том порядке, каком они вынуты. Найти вероятность того, что получим слово: а) «алгоритм»; б) «ритм».

7.На отрезке длины 20 см помещен меньший отрезок длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, брошенная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок.

8. Внутрь круга радиусом *R* наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника.

### Задания для индивидуальной работы

1. Билеты лотереи выпущены на общую сумму *N* у.е., цена билета *s* у.е. Ценные выигрыши попадают на *n* билетов. Определить вероятность ценного выигрыша на один билет.

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *N* | 20000 | 25000 | 30000 | 35000 | 40000 | 45000 | 50000 | 55000 | 60000 | 65000 |
| *s* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 11 | 6 | 4 |
| *n* | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 |

2. Группа студентов из *N* человек распределяется на производственную практику следующим образом: в город *A* направляется *s* студентов, в город *B* – *r* студентов и в город *C* – *k* студентов. Какова вероятность того, что два определенных студента попадут на практику в один город?

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *N* | 23 | 26 | 27 | 28 | 30 | 25 | 26 | 27 | 28 | 30 |
| *s* | 10 | 9 | 8 | 7 | 12 | 9 | 11 | 9 | 6 | 10 |
| *r* | 8 | 10 | 7 | 10 | 10 | 7 | 4 | 9 | 8 | 9 |
| *k* | 5 | 7 | 12 | 11 | 8 | 9 | 11 | 9 | 14 | 11 |

3. В прямоугольнике *ABCD* со сторонами *a* и *b* случайным образом выбирается точка *X*. Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит трапеции *AMCD*, где точка *M* делит отрезок *BC* в отношении *m:n*, считая от точки *B*.

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 4 | 3 | 6 | 4 | 8 | 5 | 5 | 15 | 10 | 9 |
| *b* | 6 | 6 | 9 | 8 | 12 | 15 | 10 | 15 | 25 | 27 |
| *m* | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 4 | 4 |
| *n* | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 4 | 2 | 1 | 5 |

### 1.3 Теоремы сложения и умножения вероятностей случайных событий

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

События $A_1,\ A_2,...,\ A_n$ образуют *полную группу событий*, если:

1. $A_1 + A_2 + ... + A_n = U$ (событие достоверное),
2. $A_i\, A_j = V,\ i \neq j$ (события попарно несовместные).

Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* событию А, если событие $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие А.

Суммой (объединением) *A+B* двух событий *A* и *B* называют событие, состоящие в появлении события *A*, или события *B*, или обоих этих событий. *Суммой нескольких событий* называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

<u>*Теорема 1.*</u> Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

<u>*Следствие 1.*</u> Вероятность появления одного из двух несовместных событий равно сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

<u>*Следствие 2.*</u> Если события $A_1,\ A_2,\ ...\ ,\ A_n$ образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей равна 1

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

<u>*Следствие 3.*</u> Сумма вероятностей противоположных событий равна единице

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \qquad P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

*Произведением* двух событий *A* и *B* называют событие *AB*, состоящее в совместном появлении этих событий. *Произведением нескольких событий* называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Событие *A* называется *независимым* от события *B*, если появление события *A* не изменяет вероятности события *B*. Несколько событий называют *независимыми в совокупности* (или просто независимыми), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

<u>*Теорема 2.*</u> Для независимых в совокупности событий $A_1,\ A_2,\ ...\ ,\ A_n$ справедливо равенство $P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n)$.

<u>*Следствие 4.*</u> Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

<u>*Теорема 3.*</u> Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

<u>*Теорема 4.*</u> Вероятность появления хотя бы одного из *n* совместных событий равна

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot...\cdot\overline{A_n}).$$

## Задания для аудиторной работы

1. Брошены три игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) на каждой из выпавших граней появится пять очков; б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков.

2. В ящике15 шаров, из которых 5 голубых и 10 красных. Из ящика последовательно вынимают 2 шара; первый шар в ящик не возвращают. Найти вероятность того, что первый вынутый шар окажется голубым, а второй – красным.

3. В урне имеется пять шаров с номерами от 1 до 5. Наудачу по одному извлекают три шара без возвращений. Найти вероятности следующих событий: а) последовательно появятся шары с номерами 1, 4, 5.

4. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

5. В ящике 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу взял 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

6. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков.

7. Вероятность попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

8. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

9. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятности безотказной работы (за время *t*) равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время *t* безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

## Задания для индивидуальной работы

1. Три стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого стрелка – $p_1$, для второго – $p_2$, для третьего – $p_3$. Найти вероятность того, что: а) в цель попадет только первый стрелок; б) в цель попадут два стрелка; в) хотя бы один стрелок попадет в цель.

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | 0,7 | 0,5 | 0,4 | 0,8 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,4 |
| $p_2$ | 0,8 | 0,3 | 0,5 | 0,7 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,3 | 0,5 |
| $p_3$ | 0,6 | 0,9 | 0,8 | 0,5 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,3 | 0,4 | 0,6 |

2. Модельер, разрабатывающий новую коллекцию одежды к сезону весна-лето, создает модели в зеленой, черной и красной цветовой гамме. Вероятность того, что зеленый цвет будет в моде весной равна $p_1$%, что чёрный – $p_2$%, а вероятность того, что в моде будет красный цвет равна $p_3$%. Предполагая, что цвета выбираются независимо друг от друга, найти вероятность того, что: а) цветовое решение коллекции будет удачным только по одному цвету; б) в моде весной будет преобладать только красный цвет; в) в моде весной будут другие цвета, отличные от указанных.

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | 30 | 30 | 40 | 40 | 25 | 10 | 60 | 35 | 15 | 25 |
| $p_2$ | 60 | 20 | 50 | 60 | 30 | 35 | 15 | 20 | 20 | 60 |
| $p_3$ | 40 | 50 | 40 | 25 | 60 | 40 | 30 | 50 | 40 | 10 |

3. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна $p_1$, второй – $p_2$, третий – $p_3$. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) не менее двух экзаменов; б) менее трех экзаменов; в) хотя бы один экзамен.

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | 0,6 | 0,9 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,2 | 0,7 | 0,1 | 0,4 | 0,7 |
| $p_2$ | 0,7 | 0,2 | 0,4 | 0,5 | 0,7 | 0,3 | 0,5 | 0,2 | 0,2 | 0,8 |
| $p_3$ | 0,6 | 0,3 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,5 | 0,8 | 0,3 | 0,6 | 0,2 |

### 1.4 Формула полной вероятности. Формулы Байеса

События $A_1,\ A_2,...,\ A_n$ образуют *полную группу событий*, если:

1. $A_1 + A_2 + ... + A_n = U$ (событие достоверное),
2. $A_i\, A_j = V,\ i \neq j$ (события попарно несовместные).

*Теорема 1.* Вероятность события *А*, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события *А*:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right) + P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right) + ... + P(H_n)\cdot P\left(A/H_n\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right).$$

Поскольку неизвестно, какое из этих событий наступит, их называют гипотезами.

Пусть произведено испытание, в результате которого появилось событие *А*. Условная вероятность любой гипотезы $H_i\ (i = 1, 2, ..., n)$ может быть вычислена по формулам Байеса

$$P\left(H_i/A\right) = \frac{P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right)}{P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right) + P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right) + ... + P(H_n)\cdot P\left(A/H_n\right)} =$$
$$= \frac{P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right)}{P(A)},\quad i = \overline{1,n}.$$

Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие *А*.

## Задания для аудиторной работы

1. На автозавод поступили двигатели от трех моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго – 6 и от третьего – 4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что: а) установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока; б) проработавший без дефектов двигатель изготовлен на первом заводе, на втором заводе.

2. На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25, второй 35, третий 40% всех замков. Брак составляет соответственно 5, 4, 2%. Найти вероятность того, что: а) случайно выбранный замок является дефектным; б) замок был изготовлен в первом, втором, третьем цехе, если он является дефектным.

3. Трое рабочих изготавливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил 40 изделий, второй – 35, третий – 25. Вероятность брака у первого рабочего 0,03, у второго – 0,02, у третьего – 0,01. Взятое наугад изделие оказалось бракованным. Найти вероятность того, что изделие сделал второй рабочий.

4. На предприятии работают две бригады рабочих: первая производит в среднем $\frac{3}{4}$ продукции с процентом брака 4%, вторая − $\frac{1}{4}$ продукции с процентом брака 6%. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие: а) окажется бракованным; б) изготовлено второй бригадой при условии, что изделие оказалось бракованным.

5. В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношении 2:3. Вероятность качественного ремонта сапог равна 0,9, а туфель − 0,85. Проведена проверка качества одной пары обуви. Оказалось, что эта пара обуви отремонтирована качественно. Найти вероятность того, что это: а) сапоги; б) туфли.

6. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела – 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

7. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

## Задания для индивидуальной работы

1. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: $n_1$ – с первого завода, $n_2$ – со второго завода, $n_3$ – с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе $p_1$, на втором – $p_2$, на третьем – $p_3$. Какова вероятность того, что: а) случайно взятое изделие будет качественным; б) взятое случайным образом изделие оказалось качественным? Найти вероятность того, что оно изготовлено на $i$-м заводе.

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_1$ | 20 | 14 | 16 | 30 | 20 | 25 | 15 | 40 | 14 | 18 |
| $n_2$ | 15 | 26 | 40 | 20 | 10 | 35 | 25 | 25 | 26 | 32 |
| $n_3$ | 15 | 10 | 44 | 50 | 20 | 40 | 10 | 35 | 10 | 50 |

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | 0,9 | 0,8 | 0,8 | 0,9 | 0,8 | 0,9 | 0,8 | 0,9 | 0,8 | 0,9 |
| $p_2$ | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,7 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,8 | 0,6 | 0,8 |
| $p_3$ | 0,8 | 0,8 | 0,7 | 0,7 | 0,9 | 0,7 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,7 |
| $i$ | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |

2. Статистика запросов кредитов в банке такова: $\alpha\%$ – от государственных органов, $\beta\%$ – от других банков, остальное – от физических лиц. Вероятности невозврата кредита в оговоренный срок соответственно равны $p_1$, $p_2$, $p_3$. Найти вероятность невозврата очередного запроса на кредит. Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но в факсовом сообщении имя клиента было плохо пропечатано. Кто наиболее вероятно из клиентов не возвращает кредит?

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha\%$ | 22 | 25 | 26 | 12 | 15 | 23 | 29 | 26 | 28 | 30 |
| $\beta\%$ | 58 | 38 | 38 | 48 | 48 | 25 | 31 | 44 | 42 | 34 |
| $p_1$ | 0,01 | 0,06 | 0,03 | 0,02 | 0,04 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,03 | 0,02 |
| $p_2$ | 0,05 | 0,01 | 0,04 | 0,03 | 0,05 | 0,02 | 0,04 | 0,03 | 0,01 | 0,04 |
| $p_3$ | 0,04 | 0,03 | 0,05 | 0,03 | 0,06 | 0,04 | 0,03 | 0,01 | 0,06 | 0,02 |

3. В группе студентов решают задачу. Известно, что $k$ студентов учатся на «отлично», $l$ на «хорошо» и $m$ на «удовлетворительно». Вероятность того, что задача будет решена отличником равна $p_1$; хорошистом – $p_2$; посредственным студентом – $p_3$. а) Какая вероятность решения задачи? б) Студентом решена задача; найти вероятность того, что он учится на «удовлетворительно».

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 3 | 4 | 4 | 2 | 2 | 8 | 10 | 10 | 9 | 5 |
| $l$ | 17 | 16 | 14 | 20 | 10 | 9 | 10 | 5 | 9 | 10 |
| $m$ | 5 | 6 | 7 | 3 | 13 | 8 | 5 | 10 | 7 | 10 |
| $p_1$ | 0,65 | 0,63 | 0,78 | 0,75 | 0,76 | 0,62 | 0,72 | 0,62 | 0,67 | 0,64 |
| $p_2$ | 0,35 | 0,25 | 0,3 | 0,24 | 0,55 | 0,29 | 0,31 | 0,24 | 0,23 | 0,28 |
| $p_3$ | 0,13 | 0,15 | 0,12 | 0,13 | 0,1 | 0,18 | 0,07 | 0,11 | 0,13 | 0,14 |

## 1.5 Повторение независимых испытаний

Производится серия из $n$ независимых испытаний, в каждом из которых событие $A$ может появиться с одной и той же вероятностью $p = P(A_i)$ $i = \overline{1,n}$ и не появиться с вероятностью $P(\overline{A_i}) = 1 - p = q$.

I. а) Вероятность того, что событие $A$ в серии из $n$ испытаний появится ровно $m$ раз, вычисляется по *формуле Бернулли*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p. \tag{1}$$

б) Если число испытаний велико, то вероятность $P_n(m)$ вычисляется по локальной *формуле Муавра-Лапласа*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\, \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad q = 1 - p, \tag{2}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ – функция Гаусса, она *четная* $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Значения этой функции приводятся в таблице 1 (см. приложение).

в) Если число испытаний *n* велико, а вероятность *p* мала ( $0 < p < 0{,}1$), то справедлива *формула Пуассона*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!}\, e^{-\lambda}, \qquad (3)$$

где $\lambda = np$ – среднее число появлений события *A* в серии из *n* испытаний.

II. Вероятность того, что событие *A* в серии из *n* испытаний появится не менее $k_1$ раз и не более $k_2$ раз:

а) при небольших *n* вычисляется с помощью формулы Бернулли

$$P_n(k_1 \le m \le k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1+1) + P_n(k_1+2) + \ldots + P_n(k_2); \qquad (4)$$

б) при больших *n* – с помощью интегральной формулы Лапласа

$$P_n(k_1 \le m \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad q = 1 - p, \qquad (5)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2}\, dt$ – функция Лапласа, ее значения в таблице 2 (см. прилож.).

Функция $\Phi(x)$ – *нечетная*, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Для значений $x > 5$ $\Phi(x) = 0{,}5$.

<u>Замечание 1.</u> Если вероятность наступления события *A* в каждом испытании различна $P(A_i) = p_i$, $i = \overline{1,n}$, то вероятность того, что событие *A* при *n* испытаниях появится *m* раз, равна коэффициенту при $x^m$ в разложении по степеням *x* производящей функции

$$\varphi_n(x) = (q_1 + p_1 x)(q_2 + p_2 x) \cdot \ldots \cdot (q_n + p_n x).$$

<u>Замечание 2.</u> Наивероятнейшее число $m_0$ наступлений события *A* в *n* опытах определяется из двойного неравенства $np - q \le m_0 \le np + p$, причем $P_n(m_0) = max$.

<u>Замечание 3.</u> Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности.

Пусть $P(A) = p$ и частота события *A* при *n* испытания $W(A) = \frac{m}{n}$. Тогда вероятность того, что частота мало отличается от $P(A)$ ( по абсолютной величине) определяется с помощью приближенной формулы

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (6)$$

**Задания для аудиторной работы**

1. В результате обследования были выделены семьи, имеющие по четыре ребенка. Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности появления в ней: а) одного мальчика; б) двух мальчиков.

2. Четыре покупателя приехали на оптовый склад. Вероятность того, что каждому из этих покупателей потребуется холодильник марки «Атлант», равна 0,4. Найти вероятность того, что холодильник потребуется: а) не менее чем двум покупателям; б) не более чем трем покупателям; в) всем четырем покупателям.

3. Работают четыре магазина по продаже стиральных машин. Вероятность отказа покупателю в магазинах равна 0,1. Считая, что ассортимент в каждом магазине формируется независимо от других, определить вероятность того, что покупатель получит отказ в двух, трех и четырех магазинах.

4. В новом микрорайоне поставлено 10000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна: а) 0,0002; б) 0,001. Найти вероятность того, что за месяц откажут два, три и пять замков.

5. Завод отправил в торговую сеть 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено: а) ровно три изделия; б) более трех изделий.

6. На станциях отправления поездов находится 1000 автоматов для продажи билетов. Вероятность выхода из строя одного автомата в течение часа равна 0,004. Какова вероятность того, что в течение часа из строя выйдут два, три и пять автоматов?

7. Всхожесть семян огурцов равна 0,8. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее четырех.

8. Обувной магазин продал 200 пар обуви. Вероятность того, что в магазин будет возвращена бракованная пара, равна 0,01. Найти вероятность того, что из проданных пар обуви будет возвращено: а) ровно 4 пары; б) ровно 5 пар.

9. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

10. Вероятность появления: события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

11. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится а) не менее 1475 раз и не более 1500 раз; б) не менее 1470 раз; в) не более 1469 раз.

12. Батарея произвела 6 выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0,3. Найти: а) наивероятнейшее число попаданий; б) вероятность наивероятнейшего числа попаданий; в) вероятность того, что объект будет разрушен, если для этого достаточно хотя бы двух попаданий.

**Задания для индивидуальной работы**

1. Банк имеет $n$ отделений. С вероятностью $p$ независимо от других каждое отделение может заказать на завтра крупную сумму денег. В конце рабочего дня один из вице-президентов банка знакомится с поступившими заявками. Какова вероятность того, что будет: а) хотя бы одна заявка; б) ровно $r$ заявок; в) как минимум $s$ заявок?

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 6 | 5 | 7 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 10 |
| $p$ | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,4 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
| $r$ | 2 | 3 | 4 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 4 | 2 |
| $s$ | 4 | 4 | 6 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 7 | 6 |

2. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна $p$. Куплено $n$ билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,4 | 0,4 | 0,5 | 0,4 | 0,5 | 0,7 | 0,6 | 0,6 | 0,7 | 0,5 |
| $n$ | 12 | 15 | 12 | 12 | 11 | 14 | 13 | 11 | 12 | 15 |

3. Вероятность наступления некоторого события в каждом из *n* независимых испытаний равна *p*. Определить вероятность того, что число наступлений события *m* удовлетворяет следующим неравенствам: а) $k_1 \le m \le k_2$; б) $m \ge k_1$; в) $m \le k_2$. Какова вероятность того, что в *n* независимых испытаниях событие появится ровно $k_1$ раз?

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *n* | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| *p* | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,7 | 0,6 | 0,75 | 0,75 |
| $k_1$ | 80 | 85 | 70 | 83 | 50 | 65 | 70 | 40 | 65 | 70 |
| $k_2$ | 90 | 95 | 95 | 93 | 60 | 75 | 80 | 50 | 80 | 85 |

4. Владельцы пластиковых карточек ценят их и теряют весьма редко. Пусть вероятность потерять в течение недели пластиковую карточку для произвольного владельца равна *p*. Всего банк выдал карточки *n* клиентам. Найти вероятность того, что в предстоящую неделю будет потеряна: а) ровно одна карточка; б) хотя бы одна карточка. Чему равна вероятность того, что в предстоящую неделю будут утеряны более *r* карточек?

| *Вариант* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *n* | 2000 | 3000 | 2500 | 2500 | 4000 | 5000 | 3500 | 4500 | 4300 | 2700 |
| *p* | 0,002 | 0,001 | 0,002 | 0,001 | 0,001 | 0,001 | 0,002 | 0,001 | 0,001 | 0,002 |
| *r* | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 4 | 2 | 2 | 4 | 2 |

## II. Случайные величины

### 2.1 Дискретные случайные величины. Законы распределения и числовые характеристики ДСВ

*Случайной* называется величина, принимающая различные числовые значения, заранее неизвестные. *Дискретной СВ* называется величина, множество значений которой образует конечную или бесконечную последовательность чисел. Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и их вероятностями, называется *законом распределения СВ*.

Для ДСВ закон распределения задается таблично.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ |

где $\sum p_i = 1$, или с помощью функции распределения $F(x)$.

*Функцией распределения* $F(x)$ СВ *X* называется вероятность того, что СВ *X* примет значения, меньшие *x*. $F(x) = P(\mathrm{X} < x) = P(-\infty < \mathrm{X} < x)$.

Свойства $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$ для $\forall x \in R$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
3. Если возможны значения СВ $X \in [a;b]$, то *F(x)* = 0 при $x \le a$, *F(x)* = 1 при $x \ge b$.
4. $F(x_1) \le F(x_2)$, если $x_1 < x_2$.
5. $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

*Математическим ожиданием* СВ *X* называется число $M(X)$, определяемое формулой $M(X)=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$. Свойства $M(X)$:

1. $M(C)=C$.
2. $M(CX)=C\,M(X), \quad C=const$.
3. $M(X+Y)=M(X)+M(Y), \quad X \text{ и } Y - \forall CB$;
4. $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y), \quad X \text{ и } Y -$ независимые *СВ*.

*Дисперсией* D (*X*) случайной величины *X* называют математическое ожидание квадрата отклонения *СВ X* от ее математического ожидания $M(X)$:

$$D(X)=M\left((X-M(X))^2\right).$$

Свойства $D(X)$:

1. $D(C)=0$.
2. $D(CX)=C^2 D(X), \quad C=const$.
3. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$, где *X* и *У* – независимые *СВ*.
4. $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$.

Для любой *СВ X* $D(X)>0$, и $x_{\min}<M(X)<x_{\max}$.

*Среднеквадратичное отклонение* − это $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

## Задания для аудиторной работы

1. В партии из 6 деталей 4 стандартные. Наудачу отбирают 2 детали. Составить закон распределения *ДСВ X* – числа стандартных деталей среди отобранных. Найти *M*(*X*).

2. Охотник, имеющий шесть патронов, стреляет в цель до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,5. *СВ X* – число израсходованных патронов. Найти *M* (*X*), *D* (*X*). (Ответ: *M*(*X*) = 1,96875).

3. Вероятности попадания в мишень первого, второго и третьего стрелков соответственно равны 0,4; 0,3 и 0,6. *СВ X* – число попаданий в мишень. Составить закон распределения *СВ X*.

4. Дан закон распределения *СВ X*

| X | -5 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

Найти $M(X), \quad D(X), \quad M(X-1), \quad D(X-1), \quad M(3X+6), \quad D(3X+6)$.

5. Производятся 4 независимых испытания, в каждом из которых $P(A)=0{,}4$. *СВ X* – число появлений события *A* при четырех испытаниях. Составить закон распределения, найти $M(X),\ D(X),\ \sigma(X)$. (Ответ: 1,6; 0,96; 0,98).

## Задания для индивидуальной работы

1. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено $n$ светофоров, дающих независимо друг от друга зеленый сигнал в течение $t_1$ минут, желтый – в течение $t_2$ минут, красный – в течение $t_3$ минут. Требуется: а) написать закон распределения случайной величины *X* – числа остановок автомобиля на улице; б) найти математи-

ческое ожидание и дисперсию величины $X$ ; в) каково среднее число остановок автомобиля на данном пути?

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 |
| $t_1$ | 1,5 | 1,6 | 1,4 | 1,5 | 1,7 | 1,6 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 |
| $t_2$ | 0,4 | 0,3 | 0.3 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,2 |
| $t_3$ | 1,1 | 1,3 | 1,1 | 1,3 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,1 | 1,2 | 1,3 |

2. Задан закон распределения СВ X. Найти *M(X), D(X), M(3x+2), D(3x+2).* Составить функцию распределения *F(x)*, построить её график.

| Вариант | 1 | | | | 2 | | | | 3 | | | | 4 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 5 | -3 | -1 | 2 | 4 | -2 | 0 | 1 | 5 | -4 | 0 | 4 | 6 |
| $p_i$ | 0,1 | 0,3 | 0,4 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,4 | 0,1 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,4 | 0,2 |
| **Вариант** | **5** | | | | **6** | | | | **7** | | | | **8** | | | |
| $x$ | -2 | -1 | 0 | 2 | -3 | -1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 2 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $p_i$ | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,3 | 0,4 | 0,2 | 0,2 | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,1 | 0,3 |
| **Вариант** | **9** | | | | **10** | | | | | | | | | | | |
| $x$ | -2 | 0 | 1 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | | | | | | | | |
| $p_i$ | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,5 | 0,5 | 0,3 | 0,1 | 0,1 | | | | | | | | |

3. Из урны, содержащей *n* белых и *m* черных шаров, извлекаются *k* шаров. Пусть *СВ X* – число вынутых черных шаров. Составить закон распределения, найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение.

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 10 | 9 | 8 | 7 | 9 | 8 | 8 | 7 | 10 | 9 |
| $m$ | 5 | 6 | 6 | 5 | 4 | 7 | 5 | 4 | 6 | 7 |
| $k$ | 4 | 3 | 2 | 4 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 |

## 2.2. Непрерывные СВ. Функция распределения, плотность вероятности, числовые характеристики НСВ

Непрерывной случайной величиной называется случайная величина, возможные значения которой сплошь заполняют некоторый конечный или бесконечный промежуток. Закон распределения НСВ задают аналитически с помощью функции распределения $F(x)$ или плотности вероятности $f(x)$.

В пункте 2.1. дано определение и сформулированы свойства функции распределения: $F(x)=P(X<x)$, $0\le F(x)\le 1$, эта функция неубывающая. Если возможны значения СВ $X\in[a;b]$, то $F(x)=0$ при $x\le a$, $F(x)=1$ при $x\ge b$.

Если $F(x)$ и $F'(x)$ – непрерывные функции, то СВ *X* называется *непрерывной*.

Для любой СВ $P(X=x_0)=F(x_0+0)-F(x_0-0)$, для непрерывной СВ $P(X=x_0)=0$.

$$P(\alpha\le X\le\beta)=F(\beta)-F(\alpha).$$

*Плотностью вероятности СВ X* или *дифференциальной функцией распределения* называется первая производная от функции распределения $f(x)=F'(x)$. Ее свойства:

1. $f(x)\ge 0$ для $\forall x\in R$;

2. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$;

3. $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$; 4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

*Математическое ожидание* непрерывной СВ *X* определяется по формуле

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx, \text{ если значения СВ } X \in (-\infty, \infty).$$

$$M(X) = \int\limits_a^b x\, f(x)\,dx, \text{ если значения СВ } X \in (a;\, b).$$

*Дисперсия* непрерывной СВ *X*

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X),\; M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx, \text{ если } X \in (-\infty, \infty).$$

### Задания для аудиторной работы

1. Функция распределения СВ *X* имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если } x < -1, \\ a + b\arcsin x, & \textit{если } -1 \le x \le 1, \\ 1, & \textit{если } x > 1. \end{cases}$$

Найти постоянные *a* и *b*, плотность вероятности, математическое ожидание СВ *X*. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$. (Ответ: *a* = 0,5; $b = \frac{1}{\pi}$; $M(X) = 0$).

2. Плотность вероятности СВ *X* имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \textit{если } 0 \le x \le 2, \\ 0, & \textit{если } x \overline{\in} (0;\, 2). \end{cases}$$

Найти коэффициент *a*, математическое ожидание, дисперсию, моду, медиану СВ *X*. Определить вероятность того, что в результате опыта СВ *X* отклонится от своего $M(X)$ не более чем на 0,5. (Ответ: $a = 0{,}375$; $p = 0{,}875$).

### Задания для индивидуальной работы

1. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, и $P\left(\left| X - M(X) \right| < 0{,}25\right)$.

**1** $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0.5(x^2 - x), & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

**2** $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0.5(x + 2), & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

**3** $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{6}(x^2 + x), & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

**4** $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{8}x^3, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

**5** $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ (x-2)^2, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$ **6** $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{4}x^2, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \dfrac{1}{9}(x^3+1), & -1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$ **8** $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{15}(x^2+2x), & 0\le x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$

**9** $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{14}(x^3+3x), & 0\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$ **10** $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{10}(x^2+3x), & 0\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

2. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$. Найти неизвестный параметр $A$, $M(X)$, дисперсию $D(X)$.

**1** $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ A(x+2), & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$ **2** $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ A(x-2), & 2<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

**3** $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Ax, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$ **4** $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Ax^2, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

**5** $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ A(x+1), & -1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$ **6** $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ A(x-1), & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

**7** $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ A(x+3), & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$ **8** $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ Ax^2+1, & 1<x\le 2,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

**9** $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ A(2x-1), & -1<x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$ **10** $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ A(3x-1), & 1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

### 2.3. Классические распределения случайных величин

*Биномиальное распределение.* Пусть в каждом из $n$ независимых испытаний событие *A* появляется с вероятностью *p*. СВ *X* – число появлений события *A* при $n$ испытаниях. Возможные значения СВ *X*: $0, 1, 2, ..., m, ..., n$. Соответствующие вероятности находим по формуле Бернулли $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q=1-p$.

Составляем таблицу

| X | 0 | 1 | 2 | … | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $q^n$ | $n\,p\,q^{n-1}$ | $\frac{n(n-1)}{2}\,p^2 q^{n-2}$ | … | $p^n$ |

Такое распределение СВ *X* называется *биномиальным.* Его числовые характеристики $M(X)=n\,p,\quad D(X)=n\,p\,q,\quad \sigma(X)=\sqrt{n\,p\,q}$.

*Распределение Пуассона.* Если число $n$ велико, а вероятность $p$ мала, то $P_n(m)$ считаем по формуле Пуассона $P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\quad \lambda=n\,p$.

| X | 0 | 1 | 2 | … | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $e^{-\lambda}$ | $\lambda e^{-\lambda}$ | $\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$ | … | $\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$ |

Для распределения Пуассона $M(X)=D(X)=\lambda$.

Закону Пуассона подчинена СВ, задающая простейший поток событий (число вызовов скорой помощи, число заказов на предприятиях бытовых услуг и т.д.). Если интенсивность потока $\lambda$ выражает число появлений события в единицу времени, то вероятность наступления $m$ событий за время $t$ определяется формулой

$$P_t(m)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}.$$

*Равномерное распределение* имеет СВ *X*, если плотность ее вероятности определяется функцией
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & если \quad x\in[a;b],\\ 0, & если \quad x\notin[a;b].\end{cases}$$

Для этого распределения $M(X)=\frac{a+b}{2},\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

*Показательное распределение* СВ *X* задает плотность вероятности вида
$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & если \quad x\ge 0,\\ 0, & если \quad x<0.\end{cases}$$

$\lambda>0,\quad M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.\ P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$

*Функция надежности.* Если СВ T – время безотказной работы механизма, то $F(t)=P(T<t)$ выражает вероятность выхода из строя механизма за время $t$. $R(t)=1-F(t)=R(T>t)$ – вероятность безотказной работы механизма за время $t$. Функция $R(t)$ называется функцией надежности. Если СВ *T* подчиняется показательному закону распределения, то функция надежности $R(t)=e^{-\lambda t}$, где $\lambda$ – число отказов в единицу времени (интенсивность отказов).

**Задания для аудиторной работы**

1. Производится 5 независимых опытов, в каждом из которых событие А может появиться с вероятностью 0,6. Составить закон распределения СВ Х – числа появлений события А при пяти испытаниях. Найти $M(X), D(X), \sigma(X)$.

2. Вероятность того. Что изделие не выдержит испытания равна 0,0004. Найти вероятность того, что из 1000 изделий испытание не выдержат менее двух изделий.

3. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в 1 минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит: а) пять вызовов; б) не менее трех; в) хотя бы один вызов.

4. СВ Х имеет равномерное распределение с $M(X)=4$ и $D(X)=12$. Найти функцию распределения $F(x)$, плотность вероятности $f(x)$ и $P(0<X<2)$.

5. Найти вероятность попаданий случайной величины *X*, имеющей показательное распределение $f(x)=\begin{cases} 0{,}2e^{-0{,}2x}, & если \quad x \ge 0, \\ 0, & если \quad x<0. \end{cases}$ в интервал (4; 10) (Ответ: 0,31).

6. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t)=1-e^{-0{,}01t}, t \ge 0$. Найти вероятность того, что за время длительностью *t=50* ч: а) элемент откажет; б) элемент не откажет. (Ответ: а) 0,394; б) 0,606).

7. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t)=1-e^{-0{,}05t}, t \ge 0,$ второго $F_2(t)=1-e^{-0{,}02t}, t \ge 0,$ Найти вероятность того, что за время длительностью *t=6* ч: а) оба элемента откажут; б) оба элемента не откажут; в) только один элемент откажет; г) хотя бы один элемент откажет. (Ответ: а) 0,03; б) 0,66; в) 0,31; г) 0,34).

8. Испытывают три независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого элемента $F_1(t)=1-e^{-0{,}1t}, t \ge 0,$ для второго $F_2(t)=1-e^{-0{,}2t}, t \ge 0,$ для третьего $F_3(t)=1-e^{-0{,}3t}$, $t \ge 0$. Найти вероятность того, что в интервале (0; 5)ч откажут: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента. (Ответ: а) 0,292; б) 0,466; в) 0,05.

**Задания для индивидуальной работы**

1. СВ *T* подчиняется показательному закону с известным $\lambda$. Записать $f(t),\ F(t)$. Построить их графики. Найти $M(T), D(T), \sigma(T),\ P(\alpha<T<\beta)$.

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | 1,2 | 1,8 | 2,4 | 3,2 | 2,3 | 3,1 | 1,6 | 0,9 | 0,6 | 2,2 |
| $\alpha$ | 0,42 | 2,3 | 0,33 | 0 | 0,96 | 2,65 | 0,15 | 0,02 | 0 | 2 |
| $\beta$ | 1,26 | 2,6 | 3,56 | 2,33 | 3,11 | 4,12 | 0,98 | 1,79 | 2,6 | 3,5 |

2. Среднее время работы каждого из трех элементов, входящих в техническое устройство, равно Т часов. Для безотказной работы устройства необходима безотказная работа хотя бы одного из трех этих элементов. Определить вероятность того, что устройство будет работать от $t_1$ до $t_2$ часов, если время работы каждого из трех элементов независимо и распределено по показательному закону.

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | 800 | 1000 | 850 | 1200 | 900 | 950 | 1100 | 1000 | 850 | 1200 |
| $t_1$ | 650 | 800 | 750 | 900 | 700 | 720 | 850 | 700 | 600 | 800 |
| $t_2$ | 700 | 900 | 820 | 1000 | 900 | 850 | 950 | 850 | 900 | 950 |

3. Все значения равномерно распределенной СВ *X* лежат на отрезке $[a; b]$. Найти вероятность попадания СВ X в промежуток $(\alpha; \beta)$.

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 2 | 1 | 3 | 6 | 8 | 3 | 1 | 4 | 1,5 | 0 |
| $b$ | 6 | 6 | 10 | 9 | 14 | 6 | 5,5 | 7,3 | 6 | 4 |
| $\alpha$ | 1 | 2 | 2 | 1 | 9 | 2 | 2 | 5 | 2 | 1 |
| $\beta$ | 5 | 5 | 15 | 7 | 11 | 5 | 5 | 6 | 5 | 5 |

4. СВ *X* подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием, равным $\lambda$. Найти вероятность того, что СВ *X* принимает положительное значение и меньшее, чем ее математическое ожидание.

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | 4,2 | 6,1 | 4,5 | 1,5 | 3,5 | 4,6 | 5,3 | 4,4 | 3,8 | 3,7 |

### 2.4 Нормальное распределение. Закон больших чисел. Теоремы Бернулли, Чебышева. Понятие о предельных теоремах

*Нормальный закон распределения*. Его плотность распределения определяет функция

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad a = M(X), \quad \sigma^2 = D(X).$$

Для нормального распределения справедливы формулы:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ – функция Лапласа, ее значения в таблице 2 (см. прилож.).

$$P\left(\left| X - M(X) \right| < \delta\right) = P\left(\left| X - a \right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Если $\delta = 3\sigma$, то получаем *«правило трех сигм»*:

$$P\left(\left| X - a \right| < 3\sigma\right) = 2\Phi(3) = 0{,}9973.$$

С вероятностью, практически равной единице, можно определить интервал наиболее вероятных значений нормально распределенной СВ *X*: $(a - 3\sigma;\ a + 3\sigma)$.

*Неравенство Маркова.* Если все значения СВ *X* положительны и *A* – некоторое положительное число, то

$$P(X \ge A) \le \frac{M(X)}{A}. \qquad (1)$$

*Неравенство Чебышева.* Если СВ *X* имеет конечную дисперсию $D(X)$ и $M(X)$, то при $\forall \varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P\left(\left| X - M(X) \right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \tag{2}$$

или
$$P\left(\left| X - M(X) \right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{3}$$

*Теорема Чебышева.* Если последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n$ попарно независимых СВ, дисперсии которых ограничены одним и тем же числом, то при $n \to \infty$ среднее арифметическое СВ $X_i$ $(i = \overline{1, n})$ сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий

$$\lim_{n \to \infty} P\left( \left| \frac{\sum X_i}{n} - \frac{\sum M(X_i)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Из теоремы следует оценка

$$P\left( \left| \frac{1}{n}\sum X_i - \frac{1}{n}\sum M(X_i) \right| < \varepsilon \right) \ge 1 - \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}, \tag{4}$$

где $\varepsilon$ – любое сколь угодно малое положительное число.

*Теорема Бернулли* устанавливает связь между частотой события и его вероятностью.

$$\lim_{n \to \infty} P\left( \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

При доказательстве получаем неравенство

$$P\left( \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = P\left( \left| m - np \right| < \varepsilon \cdot n \right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \tag{5}$$

*Теорема Ляпунова.* Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые СВ с одним и тем же законом распределения, то при $n \to \infty$ СВ $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ имеет распределение, близкое к нормальному.

$$f(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - m_y)^2}{2\sigma y^2}}, \quad m_y = \sum_{i=1}^{n} M(X_i), \quad \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} D(X_i).$$

Тогда
$$P(\alpha < Y < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_y}{\sigma_y}\right). \tag{6}$$

Частным случаем теоремы Ляпунова является

*Интегральная теорема Лапласа.* Если в каждом из *n* независимых испытаний событие *A* появляется с одной и той же вероятностью $p = P(A)$, то

$$P(k_1 \le m \le k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{7}$$

где СВ *X* = *m* – число появлений *A* в $n$ испытаниях, $M(X) = np$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Частота события $A$ $W(A)=\dfrac{m}{n}$ является СВ, ее математическое ожидание $M\left[\dfrac{m}{n}\right]=p$, а дисперсия $D\left[\dfrac{m}{n}\right]=\dfrac{pq}{n}$, тогда

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \tag{8}$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа, $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

**Задания для аудиторной работы**

1. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно 5, дисперсия равна 9 . Написать выражение для плотности вероятности.

2. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 12 и 2. Найти вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (14; 16). (Ответ: 0,1359).

3. Имеется случайная величина, распределенная по нормальному закону, математическое ожидание которой равно 20, среднее квадратичное отклонение равно 3. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью 0,9972 попадет случайная величина. (Ответ: (11; 29)).

4. Случайная величина X распределена по нормальному закону, с математическим ожиданием, равным 15, и средним квадратичным отклонением, равным 2. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью 0,954 попадет случайная величина. (Ответ: (11; 19)).

5. Известно, что средний расход удобрений на один гектар пашен составляет 80 кг, а среднее квадратичное отклонение расхода равно 5 кг. Считая расход удобрений нормально распределенной случайной величиной, определить диапазон, в который вносимая доза удобрений попадает с вероятностью 0,98. (Ответ: (68,3; 91,7)).

6. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины – количество сыра, используемого для изготовления 100 бутербродов, – равно 1 кг. Известно, что с вероятностью 0,96 расход сыра на изготовление 100 бутербродов составляет от 900 до 1100 г. Определить среднее квадратичное отклонение расхода сыра на 100 бутербродов. (Ответ: 48,5 г).

7. При измерении нормально распределенной случайной величины оказалось, что ее среднее квадратичное отклонение равно 10, а вероятность попадания этой величины в интервал от 100 до 140, симметричный относительно математического ожидания, равна 0,86. Найти математическое ожидание этой величины и вероятность попадания ее в интервал от 90 до 150. (Ответ: а = 120, *p* = 0,9973).

8. Математическое ожидание количества выпадающих в течение года осадков в данной местности составляет 60 см. Определить вероятность того, что в этой местности осадков выпадает не менее 180 см. (Ответ: не более 0,3333).

9. Суточный расход воды в населенном пункте является СВ X, для которой $\sigma(X)=10000\,л$. Оценить вероятность того, что расход воды в этом пункте в течение дня отклоняется от математического ожидания по абсолютной величине более чем на 25000 л. (Ответ: не более 0,16).

10. Вероятность появления события А в отдельном испытании равна 0,6. Применив теорему Бернулли, определить число независимых испытаний, начиная с которого вероятность отклонения частоты события от его вероятности по абсолютной величине меньше 0,1, будет больше 0,97. (Ответ:801).

11. По данным ОТК, брак при выпуске деталей составляет 2,5%. Пользуясь теоремой Бернулли, оценить вероятность того, что при просмотре партии из 800 деталей будет установлено отклонение от средней доли брака менее 0,005. (Ответ: более 0,878125).

### Задания для индивидуальной работы

1. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально: математическое ожидание размера детали равно *a* (мм), среднее квадратичное отклонение равно $\sigma$ (мм). Годными считаются те детали, размер которых заключен в рамках между $\alpha$ и $\beta$ (мм). Определить:

а) вероятность изготовления годной детали;

б) процент бракованных изделий, если точность изготовления ухудшится и будет характеризоваться средним квадратичным отклонением $\sigma_1$(мм).

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 275 | 290 | 300 | 250 | 230 | 245 | 260 | 270 | 280 | 300 |
| $\sigma_1$ | 0,1 | 0,9 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,95 | 0,8 | 0,7 | 0,85 | 0,8 |
| $\sigma$ | 0,9 | 0,8 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,9 | 0,75 | 0,6 | 0,8 | 0,5 |
| $\alpha$ | 273 | 288 | 292 | 249 | 227 | 242 | 258 | 267 | 279 | 296 |
| $\beta$ | 277 | 292 | 301 | 253 | 233 | 248 | 261 | 273 | 281 | 303 |

2. В страховой компании застраховано *N* автомобилей. Вероятность поломки каждого автомобиля в результате аварии равна *p.* Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год *C* денежных единиц страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании *S* денежных единиц. Найти вероятность того, что к концу года страховая компания потерпит убыток.

| **Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N | 10000 | 10000 | 2000 | 5000 | 7000 | 1000 | 8000 | 6000 | 5000 | 10000 |
| P | 0,006 | 0,005 | 0,004 | 0,005 | 0,003 | 0,002 | 0,004 | 0,005 | 0,002 | 0,006 |
| C | 12 | 15 | 5 | 7 | 10 | 11 | 15 | 6 | 8 | 10 |
| S | 1000 | 1500 | 500 | 1000 | 1000 | 500 | 700 | 500 | 600 | 1100 |

## III. Элементы математической статистики

### 3.1. Основные понятия математической статистики. Эмпирические законы распределения. Числовые характеристики выборки

К основным понятиям математической статистики относятся: генеральная и выборочная совокупности, объем совокупности, варианта, вариационный ряд, частота варианты (определите каждое понятие). Дискретное статистическое распределение частот выборки определяется таблицей (1*).

Таблица 1*

| Варианты $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| Частоты $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | … | $n_k$ |

где $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – объему выборки. *Частостью* или *относительной частотой* варианты $x_i$ называют число $w_i = \dfrac{n_i}{n}$. Геометрическое изображение таблицы (1*) называется *полигоном частот*.

Дана выборка достаточно большого объема, среди вариантов которой мало одинаковых. Составляется интервальное распределение частот (таблица 2*).

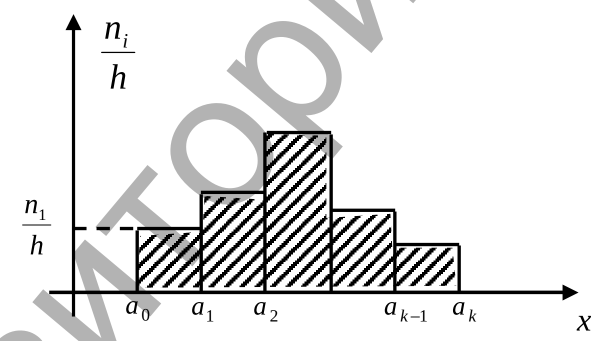
Таблица 2*

| Интервалы | $a_0 - a_1$ | $a_1 - a_2$ | $\dots$ | $a_{k-1} - a_k$ |
|---|---|---|---|---|
| Частоты $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | $\dots$ | $n_k$ |

где $\sum_{i=1}^{k} n_i = 1$. Число интервалов *k* обычно выбирают не менее 5 и не более 15. Оптимальное число интервалов равно $k = 1 + \log_2 n = 1 + 3{,}322 \lg n$. Тогда длина интервала $h = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$ (формула Стерджеса),

$$a_0 = x_{\min} - \frac{h}{2}, \quad a_1 = a_0 + h, \dots, \quad a_k = a_0 + kh.$$

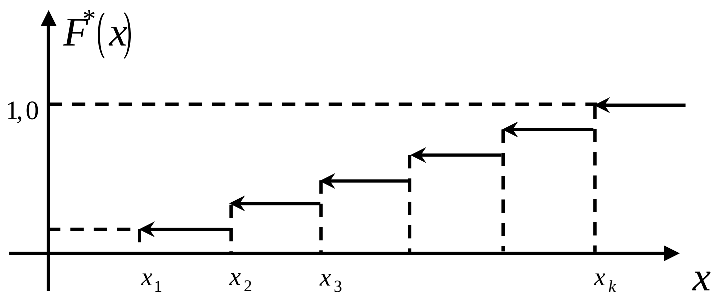
Геометрическим изображением интервального распределения частот служит *гистограмма частот*



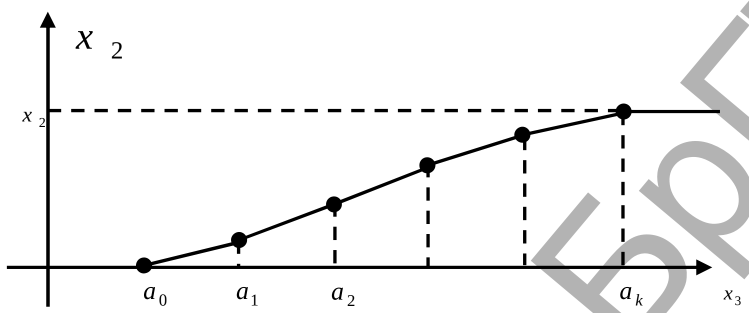

где $\dfrac{n_i}{h}$ – плотность частоты, h – длина интервалов. *Эмпирическая функция* распределения $F^*(x)$ определяет для $\forall x \in R$ относительную частоту события $X < x$.
$F^*(x) = W(X < x) = \dfrac{n_x}{n}$, где $n_x$ – число вариант, меньших x, n – объем выборки.

Графики $F^*(x)$:

для дискретного распределения (1):




для интервального распределения (2):




Числовые характеристики выборки: $\overline{x}_B$ – выборочное среднее, $D_B$ – выборочная дисперсия, $\sigma_B$ – выборочное среднее квадратичное отклонение.

Для распределения (1)

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n}, \quad D_B = \frac{\sum\left(x_i - \overline{x}_B\right)^2 n_i}{n}, \;\; D_B = \overline{x^2} - \overline{x}_B^{\,2},$$

где $\overline{x^2} = \dfrac{\sum x_i^{\,2} n_i}{n}, \quad \sigma_B = \sqrt{D_B}$ .

Если $x_i$ – числа большие, то вводят так называемые условные варианты $u_i = \dfrac{x_i - C}{h}$, где $const\, h$ и С определяются по выборке. Считают $\overline{u}_B,\; D_B(u),\; \sigma_B(u)$, затем $\overline{x}_B = h \cdot \overline{u}_B + C$, $D_B(x) = h^2 D_B(u)$, $\sigma_B(x) = h\,\sigma_B(u)$.

Если $x_i$ – числа малые, то $u_i = h x_i$, $h = const,$ $\overline{x}_B = \dfrac{1}{h}\overline{u}_B$ $D_B(x) = \dfrac{1}{h^2} D_B(u),$ $h = const,$ $\overline{x}_B = \dfrac{1}{h}\overline{u}_B$. Для интервального распределения $x_i = \dfrac{a_{i-1} + a_i}{2}, \quad i = \overline{1,k}$.

### Задания для аудиторной работы

1. В результате проверки партии деталей по сортам получены значения:
1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 3, 3, 1.

Составить вариационный ряд, статистическое распределение частот (относительных частот), полигон частот, эмпирическую функцию распределения. Найти $\overline{x}_B$, $D_B$, $\sigma_B$.

2. Дана выборка объема 20:
11, 8, 12, 5, 3, 10, 7, 8, 3, 6, 31, 9, 5, 7, 13, 4, 4, 0, 3, 6.

Составить вариационный ряд, интервальное распределение частот, гистограмму относительных частот. Найти $\bar{x}_B$, $D_B$, $\sigma_B$.

**Задания для индивидуальной работы**

В результате статистических наблюдений некоторой совокупности относительно количественного признака X были получены выборочные данные.

Требуется:

- составить дискретный или интервальный ряд распределения частот и относительных частот случайной величины X и построить полигон частот или гистограмму относительных частот;
- найти эмпирическую функцию распределения признака X и построить ее график;
- вычислить числовые оценки параметров распределения: выборочные среднюю, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Вариант 1.

| | |
|---|---|
| 1 | 2, 2, 3, 3, 3, 3, 1, 4, 4, 1, 1, 5, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 1, 3, 3, 6, 3, 6, 3, 4, 5, 1, 5, 3 |
| 2 | 13, 11, 6, 12, 6, 7, 8, 18, 10, 8, 9, 8, 11, 18, 11, 10, 4, 14, 3, 9, 12, 7, 6, 0, 9, 20, 13, 9, 7, 13 |

Вариант 2.

| | |
|---|---|
| 1 | 2, 1, 1, 5, 3, 3, 2, 3, 3, 8, 1, 4, 1, 4, 3, 4, 5, 0, 2, 2, 3, 6, 5, 6, 1, 1, 3, 2, 3, 3 |
| 2 | 14, 15, 16, 10, 13, 18, 16, 6, 12, 13, 15, 16, 15, 15, 20, 13, 21, 14, 7, 13, 17, 17, 20, 11, 12, 15, 17, 16, 15, 14 |

Вариант 3.

| | |
|---|---|
| 1 | 2, 1, 1, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 0, 1, 4, 0, 1, 3, 3, 2, 0, 2, 1, 1, 1, 0, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 2 |
| 2 | 20, 20, 12, 22, 16, 24, 8, 20, 29, 20, 16, 23, 14, 25, 16, 23, 19, 22, 26, 19, 28, 27, 18, 23, 23, 20, 28, 24, 25, 19 |

Вариант 4.

| | |
|---|---|
| 1 | 2, 6, 2, 6, 7, 4, 4, 2, 2, 3, 4, 2, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 3, 2, 0, 4, 6, 6, 3, 3, 4, 6, 4, 3 |
| 2 | 7, 9, 5, 11, 10, 6, 10, 6, 4, 10, 6, 9, 9, 6, 7, 9, 6, 1, 13, 13, 6, 8, 8, 3, 5, 10, 8, 6, 7, 8 |

Вариант 5.

| | |
|---|---|
| 1 | 2, 3, 2, 1, 1, 3, 4, 5, 1, 1, 3, 1, 1, 4, 1, 5, 2, 2, 1, 2, 0, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 4, 4, 1 |
| 2 | 25, 18, 17, 20, 36, 24, 33, 23, 22, 30, 32, 20, 10, 15, 18, 10, 19, 28, 18, 19, 32, 24, 34, 28, 17, 30, 24, 12, 23, 23 |

Вариант 6.

| | |
|---|---|
| 1 | 8, 3, 0, 5, 3, 2, 2, 6, 6, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 4, 4, 7, 3, 4, 5, 4, 4, 4, 2, 2, 6, 6, 5, 4 |
| 2 | 19, 14, 0, 18, 1, 6, 2, 33, 10, 14, 19, 15, 8, 50, 11, 10, 4, 0, 7, 7, 2, 1, 23, 3, 21, 24, 1, 11, 6, 11 |

Вариант 7.

| | |
|---|---|
| 1 | 8, 8, 7, 7, 9, 9, 8, 7, 7, 6, 5, 9, 8, 6, 8, 8, 8, 7, 7, 8, 9, 8, 8, 8, 10, 6, 10, 8, 8, 6 |
| 2 | 2, 2, 20, 18, 0, 1, 12, 10, 1, 34, 26, 3, 1, 0, 9, 6, 26, 2, 3, 7, 1, 9, 3, 16, 2, 5, 3, 3, 11, 1 |

Вариант 8.

| | |
|---|---|
| 1 | 4, 4, 2, 2, 3, 3, 5, 3, 6, 3, 5, 5, 5, 2, 2, 5, 5, 4, 3, 3, 5, 2, 3, 3, 5, 6, 4, 3, 1, 6 |
| 2 | 15, 0, 4, 6, 5, 2, 8, 7, 0, 3, 12, 6, 7, 14, 1, 1, 9, 1, 5, 4, 1, 26, 15, 19, 28, 2, 2, 2, 0, 10 |

Вариант 9.

| | |
|---|---|
| 1 | 3, 2, 1, 1, 2,0, 2, 3, 1, 2, 1, 4, 4, 1, 3, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 1, 3, 0, 5, 2, 3, 2, 3, 4 |
| 2 | 12, 1, 9, 16, 2, 23, 6, 5, 13, 12, 3, 23, 10, 36, 10, 12, 5, 4, 19, 8, 2, 4, 11, 2, 11, 4, 7, 5, 7, 8 |

Вариант 10.

| | |
|---|---|
| 1 | 4, 4, 4, 5, 3, 6, 5, 5, 4, 5, 5, 4, 4, 6, 3, 6, 6, 5,6, 5, 6, 7, 4, 3, 3, 2, 4, 4, 6, 4 |
| 2 | 18, 12, 14, 12, 4, 6, 5, 3, 6, 12, 5, 5, 15, 1, 1, 2, 1, 7, 15, 13, 7, 34, 3, 13, 17, 16, 11, 23, 3, 6 |

## 3.2. Точечные и интервальные оценки для неизвестных параметров генеральной совокупности

Любой параметр $\tilde{\theta}$, найденный по выборке, извлеченной из генеральной совокупности СВ *X*, является подходящей оценкой (подходящим приближенным значением) параметра $\theta$ этой совокупности, если:

1) $M(\tilde{\theta}) = \theta$;

2) при данном объеме выборки *n* имеет минимальную дисперсию, $D(\tilde{\theta}) = \min$;

3) при $n \to \infty \quad P\left(\left|\tilde{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right) \to 1$.

Такой параметр $\tilde{\theta}$ является соответственно *несмещенной, эффективной* и *состоятельной* оценкой параметра $\theta$ из генеральной совокупности.

Точечная оценка определяется одним числом, при этом выборка должна быть достаточно большого объема.

Выборочное среднее $\bar{x}_B$ является *несмещенной* и *состоятельной* оценкой генеральной средней $\bar{x}_\Gamma$: $\bar{x}_\Gamma \approx \bar{x}_B$, причем $M(\bar{x}_B) = \bar{x}_\Gamma$ и $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\bar{x}_B - \bar{x}_\Gamma\right| < \varepsilon\right) = 1$.

Несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности является исправленная дисперсия $S^2$.

$$D_\Gamma \approx S^2, \text{ где } S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B, \quad M(S^2) = D_\Gamma .$$

Генеральное среднее квадратичное отклонение не имеет несмещенных оценок.

$$\sigma_\Gamma \approx \sigma_B \text{ или } \sigma_r \approx S, \text{ но } M(\sigma_B) \neq \sigma_r \text{ и } M(S) \neq \sigma_r .$$

При $n < 30$ применяются интервальные оценки. Интервал $\left(\tilde{\theta} - \delta, \tilde{\theta} + \delta\right)$, покрывающий параметр $\theta$ с заданной вероятностью (надежностью) $\gamma$, называется *доверительным*.

$$P\left(\tilde{\theta} - \delta < \theta < \tilde{\theta} + \delta\right) = P\left(\left|\theta - \tilde{\theta}\right| < \delta\right) = \gamma ,$$

где $\delta$ – точность оценки.

Пусть СВ X подчиняется нормальному распределению с параметрами $a = M(X)$ и $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, т.е. $X \in N(a;\sigma)$.

а) Доверительный интервал для *a* при *известном* $\sigma$:

$$\bar{x}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} ,$$

где $2\Phi(t) = \gamma$

$$\text{или} \qquad P\left(\left|a - \bar{x}_B\right| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma .$$

б) Доверительный интервал для $a$ при *неизвестном* $\sigma$:

$$\overline{x}_B - \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}},$$

где число $t_\gamma = t(\gamma, n)$ находим по табл. 3 распределения Стьюдента (см. приложение), $S$ – исправленное среднее квадратичное отклонение, $n$ – объем выборки, $\gamma$ – надежность.

в) Доверительный интервал для $\sigma$:

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q), \text{ если } q<1,\ 0<\sigma<S(1+q), \text{ если } q>1.$$

Число $q = q(\gamma, n)$ находим по таблице 5 (см. приложение).

**Задания для аудиторной работы**

1. Найти несмещенные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии по выборке

| $x_i$ | 1250 | 1275 | 11280 | 11300 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 20 | 25 | 50 | 5 |

(Ответ: $\overline{x_Г} \approx 1274{,}5$; $D_Г \approx 168{,}88$).

2. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания *a* нормально распределенного признака *X*, если генеральное среднее квадратичное отклонение $\sigma = 4$, $\overline{x}_B = 10{,}2$, объем выборки $n = 16$. (Ответ: $7{,}64 < a < 12{,}76$).

3. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности по $\overline{x}_B$ будет равна 0,2, если $\sigma = \sigma(X) = 1{,}5$. (Ответ: 179).

4. Из генеральной совокупности извлечена выборка

| $x_i$ | 0,5 | -0,4 | -0,2 | 0 | 0,2 | 0,6 | 0,8 | 1 | 1,2 | 1,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание *a* и среднее квадратичное отклонение нормально распределенного признака *X* при помощи доверительных интервалов. (Ответ: $-0{,}04 < a < 0{,}88$; $0{,}32 < \sigma < 1{,}04$).

5. Из генеральной совокупности нормально распределенного признака *X* извлечена выборка объема *n*, найдено исправленное среднее квадратичное отклонение *S*. Определить доверительный интервал, покрывающий $\sigma_Г$ с надежностью $\gamma = 0{,}999$, если: а) $n = 10$, $S = 5{,}1$; б) $n = 50$, $S = 14$. (Ответ: а) (0; 14,28); б) (7,98; 20,02) ).

**Задания для индивидуальной работы**

1. По заданному распределению найти несмещенные оценки для $x_Г$, $D_Г$.

2. Из генеральной совокупности извлечена выборка. Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание *a* и среднее квадратичное отклонение нормально распределенного признака *X* при помощи доверительных интервалов.

3. $X \in N(a, \sigma)$. Составить доверительный интервал для а, если известны $\gamma$, $\overline{x}_B$, $n$ и $\sigma$.

Вариант 1.

1

| $x_i$ | 6,9 | 17,6 | 28,2 | 38,8 | 49,4 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 6 | 17 | 21 | 12 | 9 | 5 |

2

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -0,6 | 1,6 | 3,8 | 6 | 8,2 | 10,4 | 12,6 |
| $n_i$ | 4 | 1 | 9 | 4 | 7 | 3 | 1 |

3 $\gamma = 0{,}99, \ \ \sigma = 5, \ \ \bar{x}_B = 16{,}8, \ \ n = 25$

Вариант 2.

1

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 24 | 39,4 | 54,7 | 70 | 85 |
| $n_i$ | 3 | 18 | 19 | 13 | 4 |

2

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 3,6 | 5,7 | 7,8 | 10 | 12,1 | 14,3 | 16,4 |
| $n_i$ | 4 | 6 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 |

3 $\gamma = 0{,}95, \ \ \sigma = 6, \ \ \bar{x}_B = 14, \ \ n = 25$

Вариант 3.

1

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 17,4 | 29,5 | 41,6 | 53,71 | 65,8 | 77,9 |
| $n_i$ | 9 | 11 | 16 | 18 | 10 | 2 |

2

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 5,5 | 7 | 8,5 | 10 | 11,5 | 12,9 | 14,4 |
| $n_i$ | 5 | 8 | 3 | 4 | 2 | 3 | 1 |

3 $\gamma = 0{,}99, \ \ \sigma = 6, \ \ \bar{x}_B = 30{,}1, \ \ n = 9$

Вариант 4.

1

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 24,2 | 42 | 59,9 | 77,6 | 95,2 |
| $n_i$ | 2 | 4 | 23 | 26 | 6 |

2

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -0,6 | 1 | 2,6 | 4,2 | 5,8 | 7,4 | 9,1 |
| $n_i$ | 4 | 2 | 9 | 6 | 4 | 1 | 1 |

3 $\gamma = 0{,}999, \ \ \sigma = 8, \ \ \bar{x}_B = 42{,}8, \ \ n = 16$

Вариант 5.

1

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 11,3 | 31,2 | 51 | 70,8 | 90,7 |
| $n_i$ | 4 | 12 | 27 | 19 | 8 |

2

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -3,1 | -1,3 | 0,5 | 2,3 | 4,1 | 5,9 | 7,7 |
| $n_i$ | 1 | 3 | 5 | 8 | 4 | 2 | 4 |

3 $\gamma = 0{,}98, \ \ \sigma = 6, \ \ \bar{x}_B = 22{,}8, \ \ n = 18$

Вариант 6.

1

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 23,2 | 30,4 | 37,7 | 44,9 | 52,1 |
| $n_i$ | 9 | 23 | 36 | 9 | 3 |

2

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -8,1 | -5,6 | -3,1 | -0,6 | 1,9 | 4,4 | 6,9 |
| $n_i$ | 1 | 2 | 2 | 8 | 12 | 1 | 1 |

3 $\gamma = 0{,}96, \ \ \sigma = 4, \ \ \bar{x}_B = 10{,}8, \ \ n = 12$

Вариант 7.

1

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 19,2 | 26,8 | 34,5 | 42,1 | 49,7 |
| $n_i$ | 5 | 25 | 34 | 14 | 2 |

2

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2,5 | 4,1 | 5,6 | 7,2 | 8,8 | 10,4 | 12 |
| $n_i$ | 1 | 2 | 6 | 8 | 1 | 3 | 2 |

3 $\gamma = 0{,}992, \ \ \sigma = 6, \ \ \bar{x}_B = 32{,}1, \ \ n = 16$

Вариант 8.

1

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -0,3 | 10,4 | 21,1 | 31,8 | 42,5 | 53,2 |
| $n_i$ | 1 | 16 | 38 | 34 | 4 | 2 |

2

| $x_i$ | 1,5 | 2,9 | 4,3 | 5,8 | 7,2 | 8,7 | 10,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 2 | 8 | 5 | 2 | 3 | 2 |

3 $\gamma = 0{,}9,\ \ \sigma = 10,\ \ \overline{x}_B = 52{,}3,\ \ n = 25$

Вариант 9.

1

| $x_i$ | 15,4 | 25,3 | 35,2 | 45,1 | 55 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 4 | 20 | 29 | 8 | 4 |

2

| $x_i$ | -6,7 | -3,2 | 0,3 | 3,7 | 7,2 | 10,7 | 14,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 6 | 5 | 6 | 3 | 3 | 2 |

3 $\gamma = 0{,}98,\ \ \sigma = 4,\ \ \overline{x}_B = 12{,}8,\ \ n = 20$

Вариант 10.

1

| $x_i$ | 7,7 | 16,6 | 25,5 | 34,4 | 43,3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 7 | 23 | 30 | 17 | 8 |

2

| $x_i$ | -0,7 | 0 | 0,8 | 1,6 | 2,3 | 3,1 | 3,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 5 | 8 | 5 | 4 | 3 | 2 |

3 $\gamma = 0{,}96,\ \ \sigma = 9,\ \ \overline{x}_B = 36{,}6,\ \ n = 14$

## 3.3. Статистическая проверка гипотез. Критерий Пирсона

Из некоторой генеральной совокупности взята выборка достаточно большого объема *n* и составлено или дискретное (1) или интервальное (2) распределение частот:

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | … | $n_k$ |

(1)

| Интервалы | $a_0 - a_1$ | $a_1 - a_2$ | $a_2 - a_3$ | … | $a_{k-1} - a_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | … | $n_k$ |

(2)

где $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, $n_i$ – эмпирические частоты, $i = \overline{1,k}$.

Теоретические (*выравнивающие*) частоты $n_i'$ определяются по формуле

$$n_i' = n \cdot P_i,\ \ i = \overline{1,k},$$

где $P_i = P(X = x_i)$ для распределения (1) и $P_i = P(a_{i-1} < X < a_i)$ – для распределения (2).

Если СВ X имеет распределение Пуассона, где $\lambda = \overline{x}_B = \sigma_B^2$, то

$$P_i = \frac{\left(\overline{x_B}\right)^i e^{-\overline{x_B}}}{i!},\ \ i = \overline{1,k}.$$

Если $X \in N(a, \sigma)$, где $a \approx \overline{x}_B$, $\sigma \approx \sigma_B$, то $P_i = \frac{h}{\sigma_B} \cdot \varphi\left(\frac{a_i - \overline{x_B}}{\sigma_B}\right)$,

где $h = x_i - x_{i-1}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ или

$$P_i = P\ \ (a_{i-1} < X < a_i) = \Phi\ \left(\frac{a_i - \overline{x_B}}{\sigma_B}\right) - \Phi\ \left(\frac{a_{i-1} - \overline{x_B}}{\sigma_B}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

Плотность вероятности для СВ *X* равна $f(x) = \frac{1}{\sigma_B \sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-\overline{x}_B)^2}{2\sigma_B{}^2}}$.

Если СВ *X* имеет показательное распределение, то плотность вероятности

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0 \text{ и } \lambda = \frac{1}{\overline{x}_B},$$

$$P_i = P(a_{i-1} < X < a_i) = e^{-\frac{a_{i-1}}{\overline{x}_B}} - e^{-\frac{a_i}{\overline{x}_B}}.$$

<u>Критерий Пирсона.</u> При уровне значимости $\alpha = 1 - \gamma$ выдвигаем нулевую гипотезу $H_0$ и ей альтернативную гипотезу $H_1$.

$H_0$: в генеральной совокупности признака *X* есть нормальное (показательное) распределение,

$H_1$: в генеральной совокупности признака *X* нет выбранного распределения.

Составляем выборочную статистику $\chi^2_{набл} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$.

По таблице 4 «Критические точки распределения «хи-квадрат» (см. приложение) находим $\chi^2{}_{крит.}(\alpha,\ k - r - 1)$, где *k* – число пар значений в таблице (1) или число интервалов в таблице (2), $r = 2$ для нормального распределения, $r = 1$ – для показательного распределения и распределения Пуассона.

Если $\chi^2{}_{набл.} < \chi^2{}_{крит.}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу $H_0$, эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо.

Если $\chi^2{}_{набл.} > \chi^2{}_{крит.}$, то гипотезу $H_0$ отвергают, различие в частотах $n_i$ и $n'_i$ значимо.

<u>*Замечание.*</u> Необходимым условием применения критерия Пирсона является наличие в каждом из интервалов не менее 5 наблюдений ($n \geq 5$). Если в отдельных интервалах их меньше, то число интервалов надо уменьшить путем объединения соседних интервалов.

**Задания для аудиторной работы**

1. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | 6 | 12 | 16 | 40 | 13 | 8 | 5 |
| $m'_i$ | 4 | 11 | 15 | 43 | 15 | 6 | 6 |

(Ответ: $H_0$ принимается).

2. Используя критерий Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, проверить гипотезу о виде распределения в генеральной совокупности, выдвинув ее для заданного распределения частот.

| $x_i$ | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
|---|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | 7 | 10 | 17 | 13 | 8 |

(Ответ: $\overline{x}_B = 25{,}45;\ s = 6{,}18;\ \chi^2_{набл.} = 3{,}7$).

3. Используя критерии Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности $\chi$ с заданным эмпирическим распределением, если:

| Интервал | (-20;-10) | (-10; 0) | (0; 10) | (10; 20) | (20;30) | (30;40) | (40;50) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота | 20 | 47 | 80 | 89 | 40 | 16 | 8 |

4. Используя критерии Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, проверить, согласуется ли гипотеза о показательном распределении с заданным эмпирическим распределением, если:

| Интервал | 0-90 | 90-180 | 180-270 | 270-360 | 360-450 | 450-540 | 540-630 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота | 50 | 33 | 21 | 8 | 4 | 2 | 2 |

**Задания для индивидуальной работы**

1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами $n_i$ и теоретическими частотами $n_i'$, которые вычислены исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X.

2. В таблице приведены данные об отказах аппаратуры за 10000 часов работы. Общее число обследованных экземпляров аппаратуры равно n. Приняты обозначения: $i$ – число отказов, $n_i$ – количество случаев, в которых наблюдалось $i$ отказов. Приняв уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, проверить гипотезу о том, что число отказов имеет распределение Пуассона.

3. Используя критерии Пирсона при $\alpha = 0{,}02$, проверить, согласуется ли гипотеза о показательном распределении генеральной совокупности с заданным эмпирическим распределением.

Вариант 1.

1

| $n_i$ | 5 | 16 | 18 | 23 | 19 | 12 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n'_i$ | 4,6 | 11,3 | 19,5 | 23,7 | 20,2 | 12,2 | 5,1 |

2

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 40 | 51 | 34 | 14 | 9 | 2 |

3

| $x_{i-1} - x_i$ | 0,2−6,4 | 6,4−12,6 | 12,6−18,9 | 18,9−25,1 | 25,1−31,3 | 31,3−37,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 120 | 48 | 20 | 8 | 2 | 2 |

Вариант 2.

1

| $n_i$ | 2 | 3 | 12 | 28 | 31 | 12 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n'_i$ | 1,1 | 4,9 | 13,7 | 24,3 | 26,8 | 18,5 | 8 |

2

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 65 | 52 | 23 | 7 | 1 | 2 |

3

| $x_{i-1}-x_i$ | 0–7,6 | 7,6–15,1 | 15,1–22,7 | 22,7–30,3 | 30,3–37,8 | 37,8–45,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 125 | 51 | 15 | 6 | 1 | 2 |

Вариант 3.

1

| $n_i$ | 2 | 9 | 25 | 26 | 22 | 14 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n'_i$ | 2,4 | 9,1 | 20,8 | 28,5 | 23,3 | 11,4 | 3,4 |

2

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 23 | 40 | 37 | 27 | 13 | 6 | 3 | 1 |

3

| $x_{i-1}-x_i$ | 0,1–6,4 | 6,4–12,7 | 12,7–19,1 | 19,1–25,4 | 25,4–31,7 | 31,7–38,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 96 | 46 | 24 | 8 | 4 | 2 |

Вариант 4.

1

| $n_i$ | 4 | 17 | 19 | 21 | 18 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n'_i$ | 5,3 | 11,3 | 18,1 | 21,6 | 19,2 | 12,7 | 6,3 |

2

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 8 | 18 | 37 | 41 | 24 | 18 | 4 |

3

| $x_{i-1}-x_i$ | 0–5,6 | 5,6–11,2 | 11,2–16,8 | 16,8–22,4 | 22,4–28,1 | 28,1–33,7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 124 | 41 | 13 | 10 | 1 | 1 |

Вариант 5.

1

| $n_i$ | 2 | 8 | 24 | 25 | 24 | 9 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n'_i$ | 2,8 | 8,9 | 18,4 | 25,3 | 23 | 13,8 | 5,5 |

2

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 14 | 22 | 36 | 20 | 13 | 3 | 2 |

3

| $x_{i-1}-x_i$ | 0–4,9 | 4,9–9,8 | 9,8–14,7 | 14,7–19,6 | 19,6–24,4 | 24,4–29,3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 119 | 54 | 25 | 6 | 5 | 1 |

Вариант 6.

1

| $n_i$ | 5 | 11 | 34 | 26 | 12 | 9 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n'_i$ | 5,1 | 14,7 | 25,6 | 27,2 | 17,5 | 6,8 | 1,6 |

2

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 14 | 26 | 29 | 18 | 15 | 5 | 3 |

3

| $x_{i-1}-x_i$ | 0–2,7 | 2,7–5,3 | 5,3–8 | 8–10,6 | 10,6–13,2 | 13,2–15,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 82 | 43 | 20 | 9 | 5 | 1 |

Вариант 7.

1

| $n_i$ | 4 | 7 | 20 | 29 | 27 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n'_i$ | 2,6 | 9,4 | 20,5 | 27,7 | 23 | 11,8 | 3,7 |

2

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 19 | 26 | 26 | 18 | 11 | 6 | 4 |

3

| $x_{i-1}-x_i$ | 0−2,8 | 2,8−5,6 | 5,6−8,3 | 8,3−11,1 | 11,1−13,9 | 13,9−16,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 101 | 48 | 27 | 9 | 2 | 3 |

Вариант 8.

1

| $n_i$ | 3 | 9 | 19 | 25 | 20 | 16 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n'_i$ | 2,7 | 8,7 | 18,3 | 25,3 | 23,1 | 13,9 | 5,5 |

2

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 20 | 31 | 29 | 13 | 13 | 3 | 1 |

3

| $x_{i-1}-x_i$ | 0−2,5 | 2,5−5,1 | 5,1−7,6 | 7,6−10,1 | 10,1−12,7 | 12,7−15,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 110 | 55 | 15 | 5 | 3 | 2 |

Вариант 9.

1

| $n_i$ | 2 | 12 | 23 | 30 | 20 | 11 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n'_i$ | 2,7 | 10,6 | 23,4 | 29,7 | 21,6 | 9,1 | 2,2 |

2

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 21 | 28 | 33 | 28 | 17 | 2 | 1 |

3

| $x_{i-1}-x_i$ | 0−5,4 | 5,4−10,8 | 10,8−16,1 | 16,1−21,5 | 21,5−26,9 | 26,9−32,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 104 | 45 | 28 | 12 | 7 | 3 |

Вариант 10.

1

| $n_i$ | 5 | 15 | 18 | 28 | 17 | 15 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n'_i$ | 4,1 | 11,8 | 21,9 | 26,2 | 20,4 | 10,2 | 3,3 |

2

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 13 | 35 | 37 | 27 | 17 | 11 |

3

| $x_{i-1}-x_i$ | 0−4,6 | 4,6−9,2 | 9,2−13,9 | 13,9−18,5 | 18,5−23,1 | 23,1−27,7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 140 | 48 | 16 | 13 | 2 | 1 |

## 3.4. Проверка соответствия эмпирических данных статистической гипотезе.

### Задания для индивидуальной работы

В результате статистических наблюдений некоторой совокупности относительно количественного признака X были получены выборочные данные. Требуется:

1. Составить интервальный ряд распределения частот и относительных частот случайной величины *X* и построить полигон и гистограмму относительных частот.

2. Найти эмпирическую функцию распределения признака *X* и построить ее график.

3. Вычислить числовые оценки параметров распределения: выборочные среднюю, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

4. Выдвинуть гипотезу о виде распределения рассматриваемой случайной величины *X*. На основании пунктов 1 и 3 обосновать выбор вида распределения. Написать

аналитическое выражение функции плотности для выбранного распределения, используя оценки, полученные в пункте 3, и найти теоретические (выравнивающие частоты).

5. Приняв уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, по критерию согласия Пирсона подтвердить или отвергнуть выдвинутую гипотезу о виде распределения.

6. Для подтвердившегося нормального распределения найти вероятность попадания признака в интервал $(a-5, a+3)$ Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание $a$ и среднее квадратичное отклонение нормально распределенного признака *X* при помощи доверительных интервалов.

| | |
|---|---|
| **1** | 13.7, 15.7, 15.5, 11.8, 13.1, 16.4, 17.8, 18.2, 19.9, 12.3, 13.8, 11.8, 21, 7.7, 13.4, 13.3, 15.4, 11, 7.8, 16.6, 15.5, 17.9, 12.2, 11.5, 12.1, 16, 22.7, 16.6, 11., 14., 10.2, 15.3, 16, 16.7, 15.6, 15.5, 12.9, 17.4, 11, 13.4, 10.4, 14.7, 6.4, 16.1, 15.6, 14.5, 18., 19.3, 18.4, 16.4 |
| **2** | 10.9, 14.2, 15.5, 2, 14.3, 9.3, 6.2, 5.7, 10.1, 8.6, 7.3, 19.6, 8.5, 6.6, 11.9, 18, 13.8, 3.3, 12.6, 6.1, 8, 13.4, 10.3, 10.8, 9.9, 14.6, 5.4, 6, 7.1, 20.8, 10, 3.3, 9.2, 8.2, 2.1, 13, 16.6, 6.1, 7.9, 8.6, 15.2, 14.9, 6.2, 11.4, 10.6, 18.7, 9.6, 12.6, 10.7, 5.8 |
| **3** | 11.5, 14.8, 19.7, 17.3, 13, 11.8, 14.1, 11.5, 11, 12.6, 5.3, 8.9, 7.1, 12.3, 11.6, 13.1, 14, 9.9, 12.3, 16.5, 21, 2.6, 22.3, 12.8, 7.3, 10, 11.6, 18, 20.4, 8.5, 15.8, 10.2, 7.1, 9.9, 16.5, 15.1, 7.7, 8.7, 12.6, 20.1, 12, 4.1, 12.1, 9, 12.7, 13.2, 3.6, 16.9, 8.9, 9.9 |
| **4** | 13.4, 16.7, 15, 14.6, 17.6, 15.2, 9.2, 10.9, 10.1, 15, 16.6, 21.7, 12.2, 15.6, 13.1, 13.8, 13.6, 12.7, 13.7, 14.5, 12.6, 10.3, 13.4, 18.3, 14.9, 12, 20.3, 14.1, 16.1, 14.1, 14.6, 12.8, 15.3, 20, 13.5, 13.2, 17.3, 16.1, 9.6, 10.8, 17.8, 15.6, 14.6, 12.3, 20.1, 13.6, 13.4, 16.8, 10.2, 17.7 |
| **5** | 10.4, 11, 9.9, 11.1, 12, 7.7, 7.3, 11.7, 12.8, 11.6, 9.6, 9.9, 8.5, 8.1, 12.4, 8.9, 15.8, 6.2, 15.3, 9, 13.3, 9.3, 14.1, 4.7, 15.1, 4.4, 9.6, 6, 8.5, 13.2, 12.1, 14.8, 9.7, 8.7, 8.8, 10.2, 9.9, 11.2, 13, 10.2, 10.8, 12.4, 14.5, 13.3, 13.1, 9, 14.3, 6.5, 11.8, 11.4 |
| **6** | 9, 12.7, 7.1, 8.9, 14.3, 9.9, 11.5, 10.7, 7.5, 10.8, 6.6, 7.6, 10.2, 10.4, 9.8, 13.4, 11.7, 10.3, 14.3, 12.5, 10.8, 11.8, 12, 12.9, 10.8, 13.4, 12.3, 11.4, 10.6, 8.5, 6.4, 10.7, 11.5, 14.3, 15, 11, 8.4, 12.6, 12.7, 11.2, 12.4, 11.3, 8.9, 10.2, 13.6, 12.9, 12.5, 9.7, 9.3, 10.8 |
| **7** | 17.1, 17.3, 17.2, 20.4, 15.8, 15, 14.5, 19, 18.9, 15.8, 15.1, 24.8, 25.6, 9, 20.8, 18, 14.2, 21.2, 20.2, 18.1, 20.3, 22.4, 16.7, 11.9, 14.8, 13.2, 12.1, 5.2, 21.8, 11.8, 11.9, 7.7, 16.4, 20.7, 20.8, 16.4, 16.4, 11.1, 18.7, 14.1, 12.3, 11.3, 12.2, 15.7, 11.2, 19.2, 20.2, 15.7, 12.7, 18.7 |
| **8** | 24.1, 14.8, 13.5, 18.1, 19.6, 11.5, 13.9, 16.3, 21.7, 16.3, 10.2, 16.6, 16.6, 16.2, 17.5, 10.7, 13.9, 14.1, 13, 26.5, 11.1, 12.2, 19.1, 13.2, 19.3, 23.6, 12.1, 19.6, 18.1, 9.7, 22.7, 18.3, 17.9, 16.8, 16.2, 13.3, 20.8, 16.8, 16.5, 29.8, 18.2, 17.6, 13.7, 12.1, 18.6, 16.3, 14.2, 23.4, 17.6, 22.8 |
| **9** | 3.7, 18.4, 9.8, 16.3, 10.4, 14.2, 13.2, 19.1, 20.4, 21.7, 16.4, 9, 9.7, 18.3, 8.4, 19.8, 14.3, 22.3, 19.3, 12.6, 20.4, 19, 22.1, 14.1, 15.5, 13.6, 21.5, 19.2, 17.2, 13.3, 12.2, 12.7, 23, 22.4, 17.8, 12.2, 6.5, 8.2, 15.9, 12.4, 10.9, 15.3, 12.6, 14.3, 25.1, 22.1, 15.4, 16.6, 11.2, 13.1 |
| **10** | 20.3, 14, 15.3, 12.5, 8.5, 15.2, 17, 8.3, 16.9, 14.4, 16.9, 14.1, 10.1, 16, 18.1, 22.7, 9.5, 7.9, 11.3, 14.1, 13.3, 14.4, 14.3, 13.2, 16.5, 12.4, 15, 19.8, 13.8, 15.2, 10.8, 3.4, 13.6, 11.3, 15.8, 12.1, 10.6, 16.4, 9, 14.2, 6.2, 9.3, 7.4, 11.2, 24.1, 10.1, 12.8, 16.6, 20.5, 5.2 |

### 3.5 Линейная корреляционная зависимость. Прямые регрессии У на Х и Х на У. Значимость коэффициента корреляции

Между СВ $X$ и $Y$ существует корреляционная зависимость, если с изменением одной переменной меняется условная средняя другой переменной, т.е. $\overline{y}_x = f(x)$ или $\overline{x}_y = \varphi(y)$. Условной средней $\overline{y}_x$ называется среднее арифметическое всех значений $y$, соответствующих данному значению *x*.

Уравнение прямой регрессии $Y$ на $X$ имеет вид

$$\overline{y}_x - \overline{y}_B = r_B \frac{\sigma_B(y)}{\sigma_B(x)} \cdot (x - \overline{x}_B) \qquad (1)$$

Уравнение прямой регрессии $X$ на $Y$ имеет вид

$$\overline{x}_y - \overline{x}_B = r_B \frac{\sigma_B(x)}{\sigma_B(y)} \cdot (y - \overline{y}_B), \qquad (2)$$

где $r_B = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x}_B \cdot \overline{y}_B}{\sigma_B(x) \cdot \sigma_B(y)}$ – *выборочный коэффициент корреляции*, причем $|r_B| \le 1$.

В случае не сгруппированных данных $\overline{x}_B = \dfrac{1}{n}\sum x_i$, $\overline{x^2} = \dfrac{1}{n}\sum x^2$, $\sigma_B{}^2(x) = \overline{x^2} - (\overline{x}_B)^2$, $\overline{y}_B = \dfrac{1}{n}\sum y_i$, $\overline{y^2} = \dfrac{1}{n}\sum y^2$, $\sigma_B{}^2(y) = \overline{y^2} - \overline{y}_B{}^2$, $\overline{xy} = \dfrac{\sum x_i y_i}{n}$.

Если рассматривается случай сгруппированных данных, то получаем корреляционную таблицу. Формулы (1) и (2) остаются, меняются лишь расчетные формулы для числовых характеристик.

$$\overline{x}_B = \frac{1}{n}\sum x_i m_x,\ \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x_i{}^2 m_x,\ \sigma_B{}^2(x) = \overline{x^2} - (\overline{x}_B)^2,\ \overline{y}_B = \frac{1}{n}\sum y_j m_y,$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum y_j{}^2 m_y,\ \sigma_B{}^2(y) = \overline{y^2} - (\overline{y}_B)^2,\ \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum\sum x_i y_j m_{ij}.$$

Прямые регрессии (1) и (2) разные, они проходят через точку $(\overline{x}_B, \overline{y}_B)$. Чем меньше угол между ними, тем теснее линейная зависимость между $X$ и $Y$.

*Значимость выборочного коэффициента корреляции.* При уровне значимости $\alpha$ выдвигаем гипотезы:

$H_0$: $r_\Gamma = 0$ ( в генеральной совокупности нет линейной зависимости или $r_B$ – незначимый коэффициент),

$H_0$: $r_\Gamma \ne 0$ (линейная зависимость между $X$ и $Y$ в генеральной совокупности есть, т.е. $r_B$ – значимый коэффициент).

Составляем выборочную статистику $t_{набл.} = \dfrac{r_B \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_B{}^2}}$, $n$ – объем выборки. По таблице 3 «Критические точки распределения Стьюдента» (см. приложение) находим $t_{крит.}(\alpha; n-2)$. Если $|t_{набл.}| < t_{крит.}$, то гипотезу $H_0$ принимаем. Если $|t_{набл.}| > t_{крит.}$, то гипотезу $H_0$ отвергаем и принимаем гипотезу $H_1$.

Тесноту линейной корреляционной зависимости между СВ *X* и *Y* определяют по выборочному коэффициенту корреляции $r_B$. Выборочному коэффициенту корреляции дается такая количественная оценка (Шкала Чеддока)

| rв. | 0.1 – 0.3 | 0.3 – 0.5 | 0.5 – 0.7 | 0.7 – 0.9 | 0.9 – 0.99 |
|---|---|---|---|---|---|
| Сила связи | слабая | умеренная | заметная | высокая | весьма высокая |

*Корреляционное поле* является исходными данными при корреляционном анализе. Пусть $(x_k; y_k)\,(k = \overline{1,n})$ – результаты парных наблюдений над случайными величинами

*X* и *Y*. Изображая полученные результаты в виде точек в декартовой системе координат, получим корреляционное поле. По характеру расположения точек поля можно составить предварительное представление о форме зависимости случайных величин (например, о том, что одна из них в среднем возрастает или убывает с возрастанием другой).

### Задания для аудиторной работы

Для данных таблиц 1-3 значений двух СВ *X* и *Y*, между которыми существует линейная корреляционная зависимость, определить: а) числовые характеристики СВ *X* и *Y*; б) коэффициент корреляции $r_B$, составить уравнение прямых регрессии; в) построить их графики, корреляционное поле; г) оценить тесноту корреляционной зависимости и значимость $r_B$.

1.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 4 | 4,5 | 5,5 | 6 | 6,5 | 7 | 7,2 | 7,8 | 8 | 10 |
| $y_i$ | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 4 | 5 | 6 |

$\overline{y_x}(9) = ?$ (Ответ: $r_B = 0{,}916$, $\overline{y_x} = 0{,}62x - 0{,}03$.).

2.

| X \ Y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $m_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 2 | 1 | | | | | | | 3 |
| 35 | | 5 | 3 | | | | | | 8 |
| 45 | | | 4 | 2 | 4 | | | | 10 |
| 55 | | | | | 2 | 3 | 1 | 5 | 11 |
| 65 | | | | | | | 6 | 2 | 8 |
| $m_y$ | 2 | 6 | 7 | 2 | 6 | 3 | 7 | 7 | 40 |

(Ответ: $r_B = 0{,}90$, $\overline{y_x} = 0{,}17x - 4{,}3$, $\overline{x_y} = 4{,}8y + 29{,}4$).

3.

| X \ Y | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | $m_y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 120-140 | | | | 3 | 4 | 7 |
| 140-160 | | | 2 | 5 | 2 | 9 |
| 160-180 | | 6 | 10 | 4 | 2 | 22 |
| 180-200 | 1 | 4 | 7 | | | 12 |
| $m_x$ | 1 | 10 | 19 | 12 | 8 | 50 |

$\overline{y_x}(46) = ?$ (Ответ: $r_B = -0{,}675$, $\overline{y_x} = -1{,}27x + 214$, $\overline{y_x}(46) = 155{,}6$).

### Задания для индивидуальной работы

1. Компания контролирует 6 фабрик, выпускающих однородную продукцию. В таблице приведены данные о производительности труда $y_i$ (тысячи изделий в год на одного работающего) и энерговооруженности фабрики $x_i$ (тыс. квт.ч. в год на одного работающего) $i = \overline{1,6}$. Составить уравнения прямых регрессии, вычислить $r_B$ (пояснить его смысл), найти среднюю производительность труда $\overline{y_x}$, если $x = l$.

2. Для данной таблицы значений двух СВ *X* и *Y*, между которыми существует линейная корреляционная зависимость, определить: а) числовые характеристики СВ *X* и *Y*;

б) коэффициент корреляции $r_B$, составить уравнение прямых регрессии; в) построить их графики и корреляционное поле.

Вариант 1.

1

| $x_i$ | 5,5 | 8,5 | 11,1 | 13,6 | 17 | 20,1 | $l = 12{,}2.$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0,3 | 1,6 | 3,9 | 5,6 | 7,6 | 9,8 | |

2

| X \ у | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | | | | 6 | 8 | 4 |
| 12 | | | 2 | 4 | 5 | |
| 15 | | 4 | 2 | 7 | 5 | |
| 18 | | 3 | 10 | | | |
| 21 | 5 | | | | | |

Вариант 2.

1

| $x_i$ | 1,6 | 2,1 | 2,2 | 2,6 | 4 | 3,7 | $l = 2{,}71.$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0,3 | 2,2 | 3,9 | 6,2 | 8,3 | 9,5 | |

2

| X \ у | 10 | 16 | 22 | 28 | 34 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 6 | 9 | 3 | | | |
| 26 | 5 | 4 | 2 | | | |
| 30 | | | 10 | 8 | 3 | |
| 34 | | | | 5 | 2 | 4 |
| 38 | | | | | 7 | 1 |

Вариант 3.

1

| $x_i$ | 1,5 | 1,9 | 2,7 | 3,3 | 3 | 4,5 | $l = 3{,}1.$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

2

| X \ у | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | | | | 4 | 9 | 2 |
| 6 | | | 6 | 4 | 8 | |
| 7 | | 1 | 2 | 7 | | |
| 8 | | 10 | 5 | | | |
| 9 | 14 | 2 | | | | |

Вариант 4.

1

| $x_i$ | 0,3 | 1,3 | 2,8 | 3,7 | 4,8 | 5,5 | $l = 1{,}5.$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

2

| X \ у | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 15 | 2 | 9 | | | |
| 50 | | 8 | 6 | 5 | | |
| 55 | | | 2 | 10 | 3 | |
| 60 | | | | 4 | 1 | 6 |
| 65 | | | | | 8 | 2 |

Вариант 5.

1

| $x_i$ | 0,6 | 1,3 | 2,1 | 3,7 | 4,1 | 6 | $l = 2{,}62.$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

2

| X \ У | 43 | 48 | 53 | 58 | 63 | 68 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | | | | 3 | 8 | 1 |
| 8 | | | 7 | 11 | 6 | |
| 10 | | 5 | 4 | 2 | | |
| 12 | 8 | 6 | 10 | | | |
| 14 | 3 | 1 | | | | |

Вариант 6.

1

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1,2 | 4,7 | 7,9 | 11,6 | 15,3 | 19 | $l=8{,}22.$ |

2

| X \ У | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | | | | 5 | 3 | 4 |
| 14 | | | 5 | 12 | 1 | |
| 18 | | 7 | 6 | 2 | | |
| 22 | 3 | 9 | 5 | | | |
| 26 | 2 | 4 | | | | |

Вариант 7.

1

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0,3 | 0,4 | 1,4 | 1,6 | 2,7 | 2,8 | $l=0{,}65.$ |
| $y_i$ | 3,5 | 6,2 | 7,9 | 9,9 | 12,8 | 14,6 | |

2

| X \ У | 14 | 22 | 30 | 38 | 46 | 54 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 7 | 2 | | | |
| 18 | | 2 | 12 | 6 | | |
| 20 | | | 8 | 4 | | |
| 22 | | | | 5 | 4 | |
| 24 | | | | | 8 | 4 |

Вариант 8.

1

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 4,5 | 7,4 | 9,6 | 13 | 16,2 | $l=8{,}21.$ |
| $y_i$ | 1,7 | 1,9 | 1,9 | 2,7 | 3 | 2,6 | |

2

| X \ У | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | | | | 4 | 3 | 1 |
| 20 | | | 9 | 10 | 2 | |
| 22 | | 10 | 5 | 1 | | |
| 24 | 2 | 3 | 8 | | | |
| 26 | 6 | 2 | | | | |

Вариант 9.

1

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0,5 | 2,1 | 4,4 | 6,3 | 8,1 | 10,3 | $l=5{,}44.$ |
| $y_i$ | 1,5 | 1,7 | 1,6 | 2,5 | 2,9 | 2,3 | |

2

| X \ У | 11 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 2 | 3 | | | |
| 6 | | 8 | 7 | 2 | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | | 2 | 4 | 7 | |
| 10 | | | | 5 | 4 | 6 |
| 12 | | | | | 4 | 5 |

Вариант 10.

1

| $x_i$ | 0,1 | 1,6 | 3,9 | 6,1 | 8 | 9,8 | $l = 4{,}92.$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2 | 1,9 | 2,6 | 2,4 | 3,3 | 3,4 | |

2

| X \ У | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 2 | 3 | | | | |
| 18 | | 10 | 9 | 3 | | |
| 21 | | | 2 | 10 | 3 | |
| 24 | | | 1 | 4 | 6 | |
| 27 | | | | | 5 | 7 |

## Решение типовых вариантов индивидуальной работы

### Тема 1.1

<u>Задание 1.</u> Есть *6* колоколов разных размеров, каждый из которых при ударе одинаковой силы издает звук, отличный от звуков остальных колоколов. По колоколам ударяют *2* раза. Сколькими способами можно извлечь при этом звук, состоящий из: а) *2* различных звуков; б) *2* любых звуков?

*Решение*. а) $A_6^2 = \dfrac{6!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$. б) $\tilde{A}_6^2 = 6^2 = 36$.

Ответ: а) *360*; б) *36*.

<u>Задание 2.</u> В школе *100* учеников и *20* учителей. Сколькими способами можно выбрать делегацию, состоящую из *2* учителей и *15* учеников?

*Решение*. $C_{37}^5 \cdot C_{20}^2 = \dfrac{37!}{5! \cdot 32!} \cdot \dfrac{20!}{2! \cdot 18!} = 435897 \cdot 190 = 82820430$.

Ответ: *82820430*.

<u>Задание 3.</u> 12 человек нужно разместить в 2 одноместных, 1 двуместном и 2 четырехместных номерах гостиницы. Сколькими способами они могут быть размещены в этих пяти номерах?

*Решение*.

$$C_{12}^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^2 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4 = \frac{12!}{1! \cdot 11!} \cdot \frac{11!}{1! \cdot 10!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{4! \cdot 0!} = \frac{12!}{2! \cdot 4! \cdot 4!} = 415800.$$

Ответ: 415800.

### Тема 1.2

<u>Задание 1.</u> Билеты лотереи выпущены на общую сумму *10000* у.е. Цена билета – 5 у.е. Ценные выигрыши попадают на *50* билетов. Определить вероятность ценного выигрыша на один билет.

*Решение*.

Пусть событие *A* состоит в том, что «наудачу купленный билет оказался выигрышным». Всего было выпущено $n=\dfrac{10000}{5}=2000$ билетов. Тогда, по формуле классической вероятности, получим:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{50}{2000}=0,025.$$

Ответ: *0,025*.

<u>Задание 2.</u> Группа студентов из *20* человек распределяется на производственную практику следующим образом: в город *A* направляется *8* студентов, в город *B* – *5* студентов и в город *C* – *7* студентов. Какова вероятность того, что два определенных студента попадут на практику в один город.

*Решение*.

Пусть событие *F* состоит в том, что «два определенных студента попадут на практику в один город». Искомое событие *F* произойдет, когда наступит или событие $F_1$ – «два определенных студента попадут на практику в город *A*», или событие $F_2$ – «два определенных студента попадут на практику в город *B*», или событие $F_3$ – «два определенных студента попадут на практику в город *C*». Поэтому

$$P(F)=P(F_1+F_2+F_3)=P(F_1)+P(F_2)+P(F_3)=\frac{C_8^2}{C_{20}^2}+\frac{C_5^2}{C_{20}^2}+\frac{C_7^2}{C_{20}^2}=$$

$$=\frac{1}{C_{20}^2}\left(C_8^2+C_5^2+C_7^2\right)=\frac{2!\cdot 18!}{20!}\left(\frac{8!}{2!\cdot 6!}+\frac{5!}{2!\cdot 3!}+\frac{7!}{2!\cdot 5!}\right)=\frac{1}{19\cdot 20}(7\cdot 8+4\cdot 5+6\cdot 7)=$$

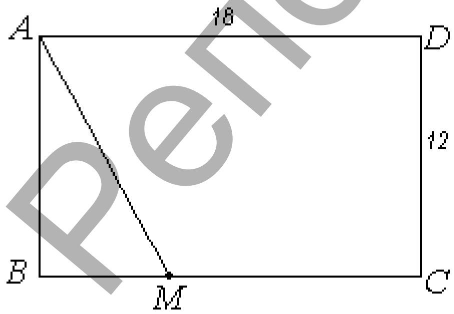
$$=\frac{118}{380}=0,3105.$$

Ответ: *0,3105*.

<u>Задание 3.</u> В прямоугольнике *ABCD* со сторонами *12* и *18* случайным образом выбирается точка *X*. Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит трапеции *AMCD*, где точка *M* делит отрезок *BC* в отношении *2:4*, считая от точки *B*.

*Решение*.

Пусть событие *E* состоит в том, что «наудачу выбранная точка в прямоугольнике *ABCD* принадлежит и трапеции *AMCD*».




Воспользуемся формулой геометрической вероятности $P(E)=\dfrac{S_{AMCD}}{S_{ABCD}}$.

$S_{ABCD}=12\cdot 18=216$.

Так как точка *M* делит отрезок *BC* в отношении *2:4*, считая от точки *B*, тогда $BM=2\cdot\dfrac{18}{6}=6$, $MC=4\cdot\dfrac{18}{6}=12$. $S_{AMCD}=S_{ABCD}-S_{AMB}=12\cdot 18-\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 12=216-36=180$.

Окончательно получаем $P(E)=\dfrac{180}{216}=0,83$.

Ответ: *0,83*.

**Тема 1.3**

Задание 1. Три стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого стрелка – *0,3*, для второго – *0,9*, для третьего – *0,6*. Найти вероятность того, что: а) в цель попадет только первый стрелок; б) в цель попадут два стрелка; в) хотя бы один стрелок попадет в цель.

*Решение*.

Пусть событие *A* состоит в том, что «в цель попадет только первый стрелок»; *B* – «в цель попадут два стрелка»; *C* – «ни один стрелок не попадет в цель»; *D* – «хотя бы один стрелок попадет в цель». Введем следующие события: $H_1$ – «первый стрелок попадет в цель»; $H_2$ – «второй стрелок попадет в цель»; $H_3$ – «третий стрелок попадет в цель». Из условия задачи:

$$P(H_1)=0{,}3;\ P(H_2)=0{,}9;\ P(H_3)=0{,}6;$$
$$P(\bar{H}_1)=0{,}7;\ P(\bar{H}_2)=0{,}1;\ P(\bar{H}_3)=0{,}4.$$

а) $A=H_1\cdot\bar{H}_2\cdot\bar{H}_3$. Так как вероятность любого из событий $H_i$, $i=1,2,3$ не меняется при наступлении другого события, то события $H_i$ независимы. Тогда:

$$P(A)=P(H_1\cdot\bar{H}_2\cdot\bar{H}_3)=P(H_1)\cdot P(\bar{H}_2)\cdot P(\bar{H}_3)=0{,}3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}4=0{,}012.$$

б) $B=H_1\cdot H_2\cdot\bar{H}_3+H_1\cdot\bar{H}_2\cdot H_3+\bar{H}_1\cdot H_2\cdot H_3$. Все три слагаемые – несовместные события, так как появление любого из них исключает появление других. Вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме их вероятностей. Тогда:

$$P(B)=P(H_1\cdot H_2\cdot\bar{H}_3+H_1\cdot\bar{H}_2\cdot H_3+\bar{H}_1\cdot H_2\cdot H_3)=$$
$$=P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(\bar{H}_3)+P(H_1)\cdot P(\bar{H}_2)\cdot P(H_3)+P(\bar{H}_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3)=$$
$$=0{,}3\cdot 0{,}9\cdot 0{,}4+0{,}3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}6+0{,}7\cdot 0{,}9\cdot 0{,}6=0{,}108+0{,}018+0{,}375=0{,}504.$$

в) Событие $C=\bar{D}=\bar{H}_1\cdot\bar{H}_2\cdot\bar{H}_3$. События $D$ и $\bar{D}$ образуют полную группу событий, поэтому $P(D)+P(\bar{D})=1$, тогда

$$P(D)=1-P(\bar{D})=1-P(\bar{H}_1\cdot\bar{H}_2\cdot\bar{H}_3)=1-P(\bar{H}_1)\cdot P(\bar{H}_2)\cdot P(\bar{H}_3)=$$
$$=1-0{,}7\cdot 0{,}1\cdot 0{,}4=1-0{,}028=0{,}972.$$

Ответ: а) *0,012*; б) *0,504*; в) *0,972*.

Задание 2. Модельер, разрабатывающий новую коллекцию одежды к сезону весна-лето, создает модели в зеленой, черной и красной цветовой гамме. Вероятность того, что зеленый цвет будет в моде весной, равна *90*%, что чёрный – *85*%, а вероятность того, что в моде будет красный цвет, равна *92*%. Предполагая, что цвета выбираются независимо друг от друга, найти вероятность того, что: а) цветовое решение коллекции будет удачным только по одному цвету; б) в моде весной будет преобладать только красный цвет; в) в моде весной будут другие цвета, отличные от указанных.

*Решение*.

Пусть событие *A* состоит в том, что «цветовое решение коллекции будет удачным только по одному цвету»; *B* – «в моде весной будет преобладать только красный цвет»; *C* – «в моде весной будут другие цвета, отличные от указанных». Введем следующие события: $H_1$ – «зеленый цвет будет в моде весной»; $H_2$ – «черный цвет будет в моде весной»; $H_3$ – «красный цвет будет в моде весной». Из условия задачи:

$$P(H_1)=0,9;\ P(H_2)=0,85;\ P(H_3)=0,92;$$

$$P(\overline{H}_1)=0,1;\ P(\overline{H}_2)=0,15;\ P(\overline{H}_3)=0,08.$$

а) $A=H_1\cdot\overline{H}_2\cdot\overline{H}_3+\overline{H}_1\cdot H_2\cdot\overline{H}_3+\overline{H}_1\cdot\overline{H}_2\cdot H_3$. Все три слагаемые – несовместные события, так как появление любого из них исключает появление других. Вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме их вероятностей. События $H_i$ независимы ($i=1,2,3$), поэтому вероятность произведения этих событий равна произведению их вероятностей. Тогда:

$$P(A)=P\left(H_1\cdot\overline{H}_2\cdot\overline{H}_3+\overline{H}_1\cdot H_2\cdot\overline{H}_3+\overline{H}_1\cdot\overline{H}_2\cdot H_3\right)=$$
$$=P(H_1)\cdot P(\overline{H}_2)\cdot P(\overline{H}_3)+P(\overline{H}_1)\cdot P(H_2)\cdot P(\overline{H}_3)+P(\overline{H}_1)\cdot P(\overline{H}_2)\cdot P(H_3)=$$
$$=0,9\cdot0,15\cdot0,08+0,1\cdot0,85\cdot0,08+0,1\cdot0,15\cdot0,92=0,0108+0,0068+0,0138=$$
$$=0,0314.$$

б) $B=\overline{H}_1\cdot\overline{H}_2\cdot H_3$,

$$P(B)=P\left(\overline{H}_1\cdot\overline{H}_2\cdot H_3\right)=P(\overline{H}_1)\cdot P(\overline{H}_2)\cdot P(H_3)=0,1\cdot0,15\cdot0,92=0,0138.$$

в) $C=\overline{H}_1\cdot\overline{H}_2\cdot\overline{H}_3$,

$$P(C)=P\left(\overline{H}_1\cdot\overline{H}_2\cdot\overline{H}_3\right)=P(\overline{H}_1)\cdot P(\overline{H}_2)\cdot P(\overline{H}_3)=0,1\cdot0,15\cdot0,08=0,0012.$$

Ответ: а) *0,0314*; б) *0,0138*; в) *0,0012*.

Задание 3. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна *0,5*, второй – *0,6*, третий – *0,9*. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) не менее двух экзаменов; б) менее трех экзаменов; в) хотя бы один экзамен.

*Решение*.

Пусть событие А состоит в том, что «студент сдаст не менее двух экзаменов»; В – «студент сдаст менее трех экзаменов»; С – «студент сдаст хотя бы один экзамен». Введем следующие события: $H_1$ – «студент сдаст первый экзамен»; $H_2$ – «студент сдаст второй экзамен»; $H_3$ – «студент сдаст третий экзамен». Из условия задачи:

$$P(H_1)=0,5;\ P(H_2)=0,6;\ P(H_3)=0,9;\ \ P(\overline{H}_1)=0,5;\ P(\overline{H}_2)=0,4;\ P(\overline{H}_3)=0,1.$$

а) Рассмотрим события: $A_1$ – «студент сдаст два экзамена»; $A_2$ – «студент сдаст три экзамена». Тогда $A=A_1+A_2$, в свою очередь $A_2=H_1\cdot H_2\cdot H_3$, а $A_1=H_1\cdot H_2\cdot\overline{H}_3+$ $+H_1\cdot\overline{H}_2\cdot H_3+\overline{H}_1\cdot H_2\cdot H_3$, то есть

$$A=H_1\cdot H_2\cdot\overline{H}_3+H_1\cdot\overline{H}_2\cdot H_3+\overline{H}_1\cdot H_2\cdot H_3+H_1\cdot H_2\cdot H_3.$$

Все слагаемые – несовместные события, так как появление любого из них исключает появление других. Вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме их вероятностей. События $H_i$ независимы ($i=1,2,3$), поэтому вероятность произведения этих событий равна произведению их вероятностей. Тогда:

$$P(A)=P\left(H_1\cdot H_2\cdot\overline{H}_3+H_1\cdot\overline{H}_2\cdot H_3+\overline{H}_1\cdot H_2\cdot H_3+H_1\cdot H_2\cdot H_3\right)=$$
$$=P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(\overline{H}_3)+P(H_1)\cdot P(\overline{H}_2)\cdot P(H_3)+P(\overline{H}_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3)+$$
$$+P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3)=0,5\cdot0,6\cdot0,1+0,5\cdot0,4\cdot0,9+0,5\cdot0,6\cdot0,9+0,5\cdot0,6\cdot0,9=$$

$=0,03+0,18+0,27+0,27=0,75$.

б) Рассмотрим событие $\overline{B}$, состоящее в том, что «студент сдаст три экзамена». События $B$ и $\overline{B}$ образуют полную группу событий, поэтому $P(B)+P(\overline{B})=1$. Тогда

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(H_1\cdot H_2\cdot H_3)=1-P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3)=1-0,5\cdot 0,6\cdot 0,9=$$
$$=1-0,27=0,73.$$

в) Рассмотрим событие $\overline{C}$, состоящее в том, что «студент не сдаст ни одного экзамена». События $C$ и $\overline{C}$ образуют полную группу событий, поэтому $P(C)+P(\overline{C})=1$. Тогда

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(\overline{H}_1\cdot \overline{H}_2\cdot \overline{H}_3)=1-P(\overline{H}_1)\cdot P(\overline{H}_2)\cdot P(\overline{H}_3)=1-0,5\cdot 0,4\cdot 0,1=$$
$$=1-0,02=0,98.$$

Ответ: а) 0,75; б) 0,73; в) 0,98.

**Тема 1.4**

Задание 1. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: *10* – с первого завода, *25* – со второго завода, *15* – с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе *0,9*, на втором – *0,85*, на третьем – *0,7*. а) Какова вероятность того, что случайно взятое изделие будет качественным? б) Взятое случайным образом изделие оказалось качественным. Найти вероятность того, что оно изготовлено на втором заводе.

*Решение*.

Пусть событие А состоит в том, что случайно взятое изделие будет качественным. Возможны следующие предположения (гипотезы):

$H_1$ – «взятое изделие изготовлено первым заводом»;

$H_2$ – «взятое изделие изготовлено вторым заводом»;

$H_3$ – «взятое изделие изготовлено третьим заводом».

Всего на сборочное предприятие поступило $10+25+15=50$ комплектующих. Тогда вероятности гипотез будут равны:

$$P(H_1)=\frac{10}{50}=0,2;\ P(H_2)=\frac{25}{50}=0,5;\ P(H_3)=\frac{15}{50}=0,3.$$

Из условия задачи условные вероятности события А при указанных гипотезах равны:

$$P\left(A/H_1\right)=0,9;\ P\left(A/H_2\right)=0,85;\ P\left(A/H_3\right)=0,7.$$

а) Вероятность того, что случайно взятое изделие будет качественным, найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)+P(H_3)\cdot P\left(A/H_3\right)=$$
$$=0,2\cdot 0,9+0,5\cdot 0,85+0,3\cdot 0,7=0,18+0,425+0,21=0,815.$$

б) Если взятое случайным образом изделие оказалось качественным, то вероятность того, что оно изготовлено на втором заводе найдем по формуле Байеса:

$$P\left(H_2/A\right)=\frac{P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)}{P(A)}=\frac{0,5\cdot 0,85}{0,815}=\frac{0,425}{0,815}\approx 0,521.$$

Ответ: а) *0,815*; б) *0,521*.

Задание 2. Статистика запросов кредитов в банке такова: 39% – от государственных органов, 12% – от других банков, остальное – от физических лиц. Вероятности невозврата кредита в оговоренный срок соответственно равны *0,02*, *0,03*, *0,01*. Найти вероятность невозврата очередного запроса на кредит. Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но в факсовом сообщении имя клиента было плохо пропечатано. Кто наиболее вероятно из клиентов не возвращает кредит?

*Решение*.

Введем в рассмотрение следующие гипотезы:

$H_1$ – «сообщение о невозврате поступило от госорганов»;

$H_2$ – «сообщение о невозврате поступило от других банков»;

$H_3$ – «сообщение о невозврате поступило от физических лиц».

Вероятности гипотез равны:

$P(H_1)=0,39$; $P(H_2)=0,12$; $P(H_3)=0,49$.

Пусть событие А – «невозврат очередного запроса на кредит». При данных гипотезах условные вероятности события А равны:

$$P\left(A/H_1\right)=0,02;\; P\left(A/H_2\right)=0,03;\; P\left(A/H_3\right)=0,03.$$

Следовательно, по формуле полной вероятности находим

$$P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)+P(H_3)\cdot P\left(A/H_3\right)=$$

$$=0,39\cdot 0,02+0,12\cdot 0,03+0,49\cdot 0,01=0,0163.$$

Предположим, что событие А произошло. Свидетельством тому – факсовое сообщение начальнику кредитного отдела. По формуле Байеса пересчитаем вероятности гипотез, то есть найдем апостериорные вероятности гипотез:

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)}{P(A)}=\frac{0,39\cdot 0,02}{0,0163}=0,4785;$$

$$P\left(H_2/A\right)=\frac{P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)}{P(A)}=\frac{0,12\cdot 0,03}{0,0163}=0,2208;$$

$$P\left(H_3/A\right)=\frac{P(H_3)\cdot P\left(A/H_3\right)}{P(A)}=\frac{0,49\cdot 0,01}{0,0163}=0,3006.$$

Т.о., наиболее вероятно невозвращение кредита государственными органами.

Ответ: а) 0,0163; б) госорганы.

Задание 3. В группе студентов решают задачу. Известно, что 7 студентов учатся на «отлично», 10 на «хорошо» и 8 на «удовлетворительно». Вероятность того, что задача будет решена отличником равна *0,66*; хорошистом – *0,22*; посредственным студентом –

*0,08*. а) Какая вероятность решения задачи? б) студентом решена задача. Найти вероятность того, что он учится на «удовлетворительно».

*Решение*.

Введем в рассмотрение следующие гипотезы:

*$H_1$* – «задача решена отличником»; *$H_2$* – «задача решена хорошистом»;

*$H_3$* – «задача решена посредственным студентом».

Всего в группе $7+10+8=25$ студентов. Вероятности гипотез равны:

$$P(H_1)=\frac{7}{25}=0,28;\ P(H_2)=\frac{10}{25}=0,4;\ P(H_3)=\frac{8}{25}=0,32.$$

Пусть событие *A* – «задача решена». При данных гипотезах условные вероятности события *A* равны:

$$P\left(A/H_1\right)=0,66;\ P\left(A/H_2\right)=0,22;\ P\left(A/H_3\right)=0,08.$$

Следовательно, по формуле полной вероятности находим

$$P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)+P(H_3)\cdot P\left(A/H_3\right)=$$

$$=0,28\cdot 0,66+0,4\cdot 0,22+0,32\cdot 0,08=0,1848+0,088+0,0256=0,2984.$$

Предположим, что событие *A* произошло. Задача была решена. По формуле Байеса найдем вероятности того, что посредственный студент решил задачу

$$P\left(H_3/A\right)=\frac{P(H_3)\cdot P\left(A/H_3\right)}{P(A)}=\frac{0,32\cdot 0,08}{0,2984}=0,0858.$$

Ответ: а) *0,2984*; б) *0,0858*.

**Тема 1.5**

<u>Задание 1.</u> Банк имеет *8* отделений. С вероятностью *0,2* независимо от других каждое отделение может заказать на завтра крупную сумму денег. В конце рабочего дня один из вице-президентов банка знакомится с поступившими заявками. Какова вероятность того, что будет: а) хотя бы одна заявка; б) ровно *3* заявки; в) как минимум *3* заявки?

*Решение*.

а) Для вычисления вероятности того, что на завтра не будет ни одной заявки, воспользуемся формулой Бернулли

$$P_8(0)=C_8^0p^0q^{8-0}=\frac{8!}{0!\cdot 8!}(0,2)^0\cdot(0,8)^8=0,1678.$$

Найдем вероятность того, что на завтра будет хотя бы одна заявка

$$P_8(m\ge 1)=1-P_8(0)=1-0,1678=0,8322.$$

б) Вероятность того, что на завтра будет ровно три заявки, равна

$$P_8(3)=C_8^3p^3q^{8-3}=\frac{8!}{3!\cdot 5!}(0,2)^3\cdot(0,8)^5=56\cdot 0,008\cdot 0,3277=0,1468.$$

в) Вероятность того, что есть как минимум три заявки, равна

$$P_8(m\ge 3)=1-P_8(0\le m\le 2)=1-\left(P_8(0)+P_8(1)+P_8(2)\right)=$$

$$=1-\left(C_8^0p^0q^{8-0}+C_8^1p^1q^{8-1}+C_8^2p^2q^{8-2}\right)=$$

$$=1-\left(\frac{8!}{0!\cdot 8!}(0{,}2)^0\cdot(0{,}8)^8+\frac{8!}{1!\cdot 7!}(0{,}2)^1\cdot(0{,}8)^7+\frac{8!}{2!\cdot 6!}(0{,}2)^2\cdot(0{,}8)^6\right)=$$

$$=1-(0{,}1678+0{,}3355+0{,}2936)=1-0{,}7969=0{,}2031.$$

Ответ: а) *0,8322*; б) *0,1468*; в) *0,2031*.

Задание 2. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна *0,3*. Куплено *13* билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

*Решение*.

Число $k_0$ (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна *p*) называется наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях $k_0$ раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности всех остальных возможных исходов испытаний. Наивероятнейшее число $k_0$ определяется из двойного неравенства:

$$np-q\le k_0<np+p.$$

Из условия задачи $p=0{,}3$, $q=0{,}7$, $n=13$.

Подставив данные в последнюю формулу, получим:

$$13\cdot 0{,}3-0{,}7\le k_0<13\cdot 0{,}3+0{,}3 \text{ или } 3{,}2\le k_0<4{,}2.$$

Так как $k_0$ – целое число и поскольку между числами 3,2 и 4,2 заключено одно целое число, а именно 4, то искомое наивероятнейшее число $k_0=4$.

Вероятность того, что из 13 купленных билетов выигрышными будут ровно 4, найдем по формуле Бернулли:

$$P_{13}(4)=C_{13}^4p^4q^{13-4}=\frac{13!}{4!\cdot 9!}(0{,}3)^4\cdot(0{,}7)^9=0{,}234.$$

Ответ: $P_{13}(4)=0{,}234$.

Задание 3. Вероятность наступления некоторого события в каждом из *400* независимых испытаний равна *0,8*. Определить вероятность того, что число наступлений события *m* удовлетворяет следующим неравенствам: а) $300\le m\le 350$; б) $m\ge 300$; в) $m\le 350$. Какова вероятность того, что в *400* независимых испытаниях событие появится ровно *300* раз?

*Решение*.

Для нахождения вероятности того, что число наступлений события *m* удовлетворяет неравенству $k_1\le m\le k_2$, воспользуемся интегральной формулой Лапласа

$$P_n(k_1\le m\le k_2)\approx\Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right),\quad q=1-p.$$

а) Из условия задачи $n=400$, $p=0{,}8$, $k_1=300$, $k_2=350$, тогда

$$P_{400}(300\le m\le 350)\approx\Phi\left(\frac{350-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)-\Phi\left(\frac{300-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{30}{8}\right)-\Phi\left(-\frac{20}{8}\right)=\Phi(3,75)+\Phi(2,5)=0,4999+0,4938=0,9937$$

б) $P_{400}(m\geq 300)=P_{400}(300\leq m\leq 400)\approx$

$$\approx\Phi\left(\frac{400-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right)-\Phi\left(\frac{300-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right)=\Phi\left(\frac{80}{8}\right)-\Phi\left(-\frac{20}{8}\right)=$$

$$=\Phi(10)+\Phi(2,5)=0,5+0,4938=0,9938.$$

в) $P_{400}(m\leq 350)=P_{400}(0\leq m\leq 350)\approx$

$$\approx\Phi\left(\frac{350-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right)-\Phi\left(\frac{0-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right)=\Phi\left(\frac{30}{8}\right)-\Phi\left(-\frac{320}{8}\right)=$$

$$=\Phi(3,75)+\Phi(40)=0,4999+0,5=0,9999.$$

г) Для вычисления вероятности того, что в *400* независимых испытаниях событие появится ровно *300* раз, воспользуемся локальной *формулой Муавра-Лапласа*

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right),\quad q=1-p.$$

Следовательно,

$$P_{400}(300)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\,\varphi\left(\frac{300-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right)=\frac{1}{8}\varphi\left(\frac{-20}{8}\right)=\frac{1}{8}\varphi(2,5)=$$

$$=\frac{0,0175}{8}=0,0022.$$

Ответ: а) *0,9937*; б) *0,9938*; в) *0,9999*; г) *0,0022*.

Задание 4. Владельцы пластиковых карточек ценят их и теряют весьма редко. Пусть вероятность потерять в течение недели пластиковую карточку для произвольного владельца равна *0,002*. Всего банк выдал карточки *2165* клиентам. Найти вероятность того, что в предстоящую неделю будет потеряна: а) ровно одна карточка; б) хотя бы одна карточка. Чему равна вероятность того, что в предстоящую неделю будут утеряны более *3* карточек?

*Решение*.

В нашем случае $\lambda=np=2165\cdot 0,002=4,33<10$, а вероятность $p=0,002$ мала, то следует воспользоваться формулой Пуассона:

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}\,e^{-\lambda}.$$

а) Вероятность того, что в предстоящую неделю будет потеряна ровно одна карточка, равна:

$$P_{2165}(1)\approx\frac{4,33^1}{1!}\,e^{-4,33}=0,057.$$

б) Определим вероятность того, в предстоящую неделю будет утеряна хотя бы одна карточка:

$$P_{2165}\left(m \geq 1\right) = 1 - P_{2165}(0) \approx \frac{4,33^0}{0!}\, e^{-4,33} = 1 - 0,0132 = 0,9868\,.$$

в) Пусть событие *А* – «в предстоящую неделю будет утеряно более трех карточек». Тогда

$$P\left(A\right) = P_{2165}\left(m > 3\right) = 1 - P_{2165}\left(0 \leq m \leq 3\right) =$$

$$= 1 - \left(P_{2165}\left(0\right) + P_{2165}\left(1\right) + P_{2165}\left(2\right) + P_{2165}\left(3\right)\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{4,33^0 \cdot e^{-4,33}}{0!} + \frac{4,33^1 \cdot e^{-4,33}}{1!} + \frac{4,33^2 \cdot e^{-4,33}}{2!} + \frac{4,33^3 \cdot e^{-4,33}}{3!}\right) =$$

$$= 1 - \left(0,0132 + 0,0570 + 0,1234 + 0,1782\right) = 0,6282\,.$$

Ответ: а) *0,057*; б) *0,9868*; в) *0,6282*.

**Тема 2.1**

<u>Задание 1.</u> Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено $n = 4$ светофора, дающих независимо друг от друга зеленый сигнал в течение $t_1 = 1,55$ минут, желтый – в течение $t_2 = 0,35$ минут, красный – в течение $t_3 = 1,20$ минут. Требуется:

а) написать закон распределения случайной величины *Х* – числа остановок автомобиля на улице;

б) найти математическое ожидание и дисперсию величины $X$ ;

в) каково среднее число остановок автомобиля на данном пути?

*Решение*.

а) В нашем случае $t_1 = t_2 + t_3$, т.е. время, в течение которого светофор разрешает проезд (зеленый свет), равно времени, при котором проезд запрещен (желтый и красный свет). Значит, вероятность того, что светофор пропустит или задержит машину, одна и та же и равна $p = \dfrac{t_2 + t_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \dfrac{1}{2}$. Случайная величина *Х* может принимать значения *0, 1, 2, 3, 4* соответственно с вероятностями, которые находятся по формуле Бернулли:

$$P(X = 0) = C_4^0 p^0 q^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,0625, \quad P(X = 1) = C_4^1 p^1 q^3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,2500,$$

$$P(X = 2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,3750, \quad P(X = 3) = C_4^3 p^3 q = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,2500,$$

$$P(X = 4) = C_4^4 p^4 q^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,0625.$$

Закон распределения случайной величины *Х*:

| *X* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| *p* | 0,0625 | 0,2500 | 0,3750 | 0,2500 | 0,0625 |

б) Математическое ожидание ДСВ*X*:

$$M(X) = 0 \cdot 0,0625 + 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,375 + 3 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,0625 = 2,$$

$D(X) = 0^2 \cdot 0,0625 + 1^2 \cdot 0,25 + 2^2 \cdot 0,375 + 3^2 \cdot 0,25 + 4^2 \cdot 0,0625 - 4 = 1.$

в) Ожидаемое число остановок автомобиля на данной улице равно 2.

Задание 2. Задан закон распределения СВ X. Найти *M(X), D(X), M(3x+2), D(3x+2).* Составить функцию распределения *F(x)*, построить её график.

| $x$ | 2 | 4 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,2 |

*Решение*.

Найдём математическое ожидание $M(X)$ по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

В нашем случае $M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 0{,}2 = 6{,}5.$

Для вычисления дисперсии используем формулу $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$. Здесь $M(X^2) = 2^2 \cdot 0{,}1 + 4^2 \cdot 0{,}2 + 7^2 \cdot 0{,}5 + 10^2 \cdot 0{,}2 = 48{,}2.$

Тогда $D(X) = 48{,}2 - 6{,}5^2 = 5{,}95.$

Найдём

$M(3X+2) = 3M(X) + 2 = 3 \cdot 6{,}5 + 2 = 21{,}5;$

$D(3X+2) = 3^2 D(X) + D(2) = 9 \cdot 5.95 + 0 = 53.55.$

Составим функцию распределения F(x):

1) если $x \le 2$, то $F(x) = P(x < 2) = 0$. Действительно, значений, меньших числа 2, величина X не принимает. Следовательно, при $x \le 2$ функция $F(x) = P(X < x) = 0;$

2) если $2 < x \le 4$, то $F(x) = 0{,}1$. Действительно, X может принять значение 2 с вероятностью 0,1;

3) если $4 < x \le 7$, то $F(x) = P(x < 7) = P(x = 2) + P(x = 4) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3;$

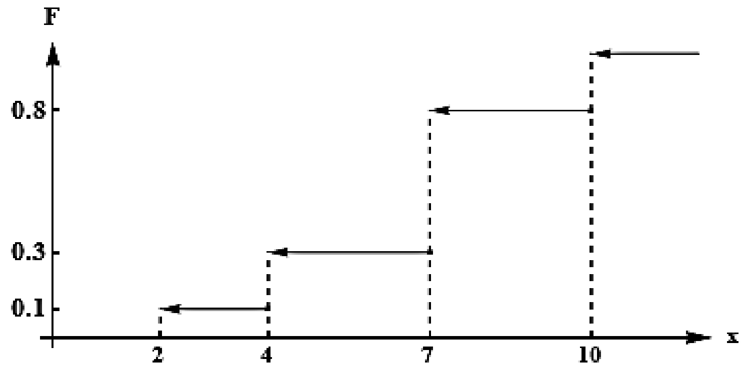
4) если $7 < x \le 10$,

то $F(x) = P(x < 10) = P(x = 2) + P(x = 4) + P(x = 7) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}8;$

5) если $x > 10$, то $F(x) = 1$. Действительно, событие $x \le 10$ достоверно и вероятность его равна единице.

Итак, искомая функция распределения имеет вид $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 2, \\ 0{,}1, \text{ при } 2 < x \le 4, \\ 0{,}3, \text{ при } 4 < x \le 7, \\ 0{,}8, \text{ при } 7 < x \le 10, \\ 1, \text{ при } x > 10. \end{cases}$

График $F(x)$:




Ответ: M(X) =6, 5; D(X)=5,95 ; M(3x+2)= 21,5 ; D(3x+2)=53,55.

<u>Задание 3.</u> Из урны, содержащей 3 белых и 5 черных шаров, извлекаются 3 шара. Пусть *СВ Х* – число вынутых черных шаров. Составить закон распределения, найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение.

*Решение*.

*СВ Х* может принять значения: 0, 1, 2, 3. Вычислим соответствующие вероятности.

$$p_1 = P(X=0) = P(ббб) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{8\cdot 7\cdot 6} = \frac{1}{56}.$$

$$p_2 = P(X=1) = P(чбб + бчб + ббч) = \frac{C_5^1 \cdot C_3^2}{C_8^3} = \frac{5\cdot 3}{56} = \frac{15}{56}.$$

$$p_3 = P(X=2) = P(ччб + чбч + ббч) = \frac{C_5^2 \cdot C_3^1}{C_8^3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{2\cdot 56} = \frac{15\cdot 2}{56} = \frac{30}{56}.$$

$$p_4 = P(X=3) = P(ччч) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{56} = \frac{10}{56}.$$

Закон распределения для данной *СВ Х* имеет вид

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{56}$ | $\frac{15}{56}$ | $\frac{30}{56}$ | $\frac{10}{56}$ |

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = \frac{1+15+30+10}{56} = 1.$$

Находим числовые характеристики данного распределения.

$$M(X) = 0\cdot\frac{1}{56} + 1\cdot\frac{15}{56} + 2\cdot\frac{30}{56} + 3\cdot\frac{10}{56} = \frac{15+60+30}{56} = \frac{105}{56} = 1{,}875.$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).\ M(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i.$$

$$M(X^2) = 1\cdot\frac{15}{56} + 4\cdot\frac{30}{56} + 9\cdot\frac{10}{56} = \frac{15+120+90}{56} = \frac{225}{56} = 4{,}018.$$

$$D(X) = 4{,}018 - 1{,}875^2 = 0{,}5024.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{0{,}5024}=0{,}71.$$

**Тема 2.2**

Задание 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(X)=\begin{cases}0; & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4}; & 0<x\le 2,\\ 1; & x>2.\end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и $P(|X-M(X)|<0{,}25)$.

*Решение*.

Плотность распределения вероятностей СВ X имеет вид

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0; & x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}x; & 0<x\le 2,\\ 0; & x>2.\end{cases}$$

Математическое ожидание СВX:

$$M(X)=\int_0^2\frac{1}{2}x\cdot x\,dx=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Дисперсия СВX:

$$D(X)=\int_0^2\frac{1}{2}x\cdot x^2dx-\frac{16}{9}=\frac{1}{8}x^4\Big|_0^2-\frac{16}{9}=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}.$$

Вычислим $P(|X-M(X)|<0{,}25)$.

$$P\left(\left|X-\frac{4}{3}\right|<0{,}25\right)=P\left(-0{,}25<X-\frac{4}{3}<0{,}25\right)=P(1{,}083<X<1{,}583)=$$

$$=\int_{1.083}^{1.583}f(x)dx=\int_{1.083}^{1.583}\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{6}x^3\Big|_{1,083}^{1,583}=0{,}449.$$

Задание 2. Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0; & x\le 1,\\ A(2x-1); & 1<x\le 2.\\ 0; & x>2.\end{cases}$$

Найти неизвестный параметр $A$, $M(X)$, дисперсию $D(X)$.

*Решение*.

Из условия нормировки будем иметь

$$A\int_{-\infty}^{\infty}(2x-1)dx=1\Rightarrow A\int_{1}^{2}(2x-1)dx=A(x^2-x)\Big|_1^2=1\Rightarrow A=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, функция плотности запишется в виде

$$f(x)=\begin{cases}0; & x\le 1,\\ 0.5(2x-1); & 1<x\le 2,\\ 0; & x>2.\end{cases}$$

Находим числовые характеристики СВ *X*:

$$M(X)=\frac{1}{2}\int_1^2 x(2x-1)dx=\frac{1}{2}\int_1^2(2x^2-x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2=\frac{19}{12},$$

$$D(X)=\frac{1}{2}\int_1^2 x^2(2x-1)dx-\left(\frac{19}{12}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2-\left(\frac{19}{12}\right)^2=\frac{11}{144}.$$

**Тема 2.3**

Задание 1. СВ *T* подчиняется показательному закону с известным $\lambda=1{,}2$. Записать $f(t)$, $F(t)$. Построить их графики. Найти $M(T), D(T), \sigma(T)$, $P(0{,}98<T<2{,}43)$.

*Решение*.

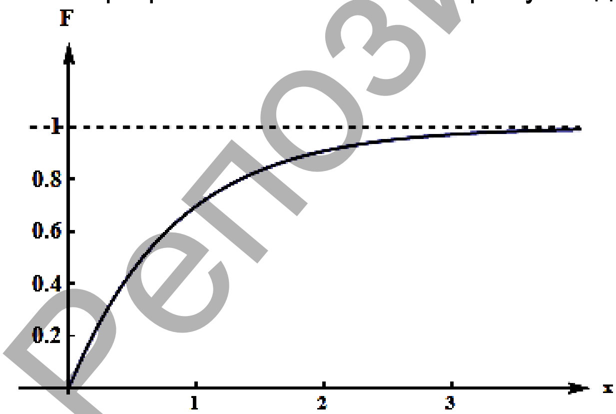
Для показательного распределения плотность вероятности имеет вид

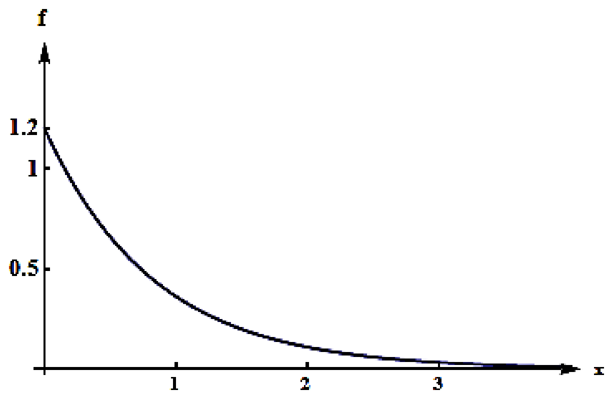
$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{если}\quad x\ge 0,\\ 0, & \text{если}\quad x<0;\end{cases}=\begin{cases}1{,}2e^{-1{,}2x}, & \text{если}\quad x\ge 0,\\ 0, & \text{если}\quad x<0;\end{cases}$$

Функция распределения равна

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & \text{если}\quad x\ge 0,\\ 0, & \text{если}\quad x<0;\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-1{,}2x}, & \text{если}\quad x\ge 0,\\ 0, & \text{если}\quad x<0;\end{cases}$$

И графики соответственно примут вид:




$$M(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{1{,}2}=0{,}83,\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{1{,}2^2}=0{,}694,\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}=0{,}83.$$

$$P(0{,}98<X<2{,}43)=e^{-0{,}98\cdot 1{,}2}-e^{-2{,}43\cdot 1{,}2}=0{,}254.$$

Задание 2. Среднее время работы каждого из трех элементов, входящих в техническое устройство, равно *T = 750* часов. Для безотказной работы устройства необходима безотказная работа хотя бы одного из трех этих элементов. Определить вероятность того, что устройство будет работать от $t_1 = 450$ до $t_2 = 600$ часов, если время работы каждого из трех элементов независимо и распределено по показательному закону.

*Решение*.

Рассмотрим СВ Т – длительность времени безотказной работы *i*-го элемента, $i = \overline{1,3}$. Так как M(T) = 750, то $\lambda = {}^{1}\!/_{750}$ и функция распределения случайной величины Т примет вид

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/750}; \ t \ge 0, \\ 0; \ t < 0. \end{cases}$$

Вероятность того, что величина Т примет значение из интервала $(\alpha; \beta)$, определяется формулой

$$P(\alpha < T < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Введем событие $A_i$ = {*i*-й элемент устройства проработал безотказно от $t_1$ до $t_2$ часов}. Тогда искомая вероятность

$$P = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3).$$

Находим

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = e^{-450/750} - e^{-600/750} = e^{-0,6} - e^{-0,8} = 0,5488 - 0,4493 = 0,0995.$

Следовательно,

$P = 1 - 0,9005^3 = 1 - 0,7302 = 0,2698.$

<u>Задание 3.</u> Все значения равномерно распределенной СВ *Х* лежат на отрезке $[2; 8]$. Найти вероятность попадания СВ Х в промежуток $(0, 3)$.

*Решение*.

Для равномерного распределения имеет СВ *Х*, ее плотность вероятности определяется функцией

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \ \text{если} \ \ x \in [a; b], \\ 0, \quad \text{если} \ \ x \notin [a; b]; \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{6}, \ \text{если} \ \ x \in [2; 8], \\ 0, \quad \text{если} \ \ x \notin [2; 8]. \end{cases}$$

Вероятность попадания СВ Х в заданный промежуток равна

$$P(0 < X < 3) = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = 0 + \int_2^3 \frac{1}{6}dx = \left.\frac{x}{6}\right|_2^3 = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.$$

<u>Задание 4.</u> СВ *Х* подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием, равным $\lambda = 2,6$. Найти вероятность того, что СВ *Х* принимает положительное значение и меньшее, чем ее математическое ожидание.

*Решение*.

Если СВ *Х* подчинена закону Пуассона, то $P_n(m)$ считаем по формуле Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Тогда вероятность того, что СВ *X* принимает положительное значение и меньшее, чем ее $M(X) = \lambda$, будет равна

$$P(0 < X < 2,6) = P(1) + P(2) = \frac{2,6^1}{1!} e^{-2,6} + \frac{2,6^2}{2!} e^{-2,6} = e^{-2,6}\left(2,6 + \frac{2,6^2}{2}\right) =$$

$$= 0,074 \cdot 5,98 = 0,44.$$

**Тема 2.4**

Задание 1. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально: математическое ожидание размера детали равно *a=280* (мм), среднее квадратичное отклонение равно $\sigma$ = 0,8 (мм). Годными считаются те детали, размер которых заключен в рамках между $\alpha$ = 278 и $\beta$ = 283 (мм). Определить:

а) вероятность изготовления годной детали;

б) процент бракованных изделий, если точность изготовления ухудшится и будет характеризоваться средним квадратичным отклонением $\sigma_1$ = 0,9 (мм).

*Решение*.

а) Здесь случайная величина *X* – фактический размер детали, тогда

$X \in N(a,\sigma) = N(280;\ 0,8)$.

Найдем вероятность изготовления годной детали, т.е. вероятность события: *278<X<283*:

$$P(278 < X < 283) = \Phi\left(\frac{283-280}{0,8}\right) - \Phi\left(\frac{278-280}{0,8}\right) =$$

$$= \Phi(3,75) - \Phi(-2,50) = \Phi(3,75) + \Phi(2,50) = 0,4970 + 0,4938 = 0,9908.$$

б) Если точность изготовления детали ухудшится, то вероятность изготовления годной детали будет равна

$$P(278 < X < 283) = \Phi\left(\frac{283-280}{0,9}\right) - \Phi\left(\frac{278-280}{0,9}\right) =$$

$$= \Phi(33) - \Phi(-2,2) = 0,4994 + 0,4861 = 0,9855.$$

Вероятность изготовления бракованной детали при ухудшении точности ее изготовления равна *0,0145*. Это значит, что в среднем брак будет составлять *1,45%*.

Задание 2. В страховой компании застраховано *N = 15000* автомобилей. Вероятность поломки каждого автомобиля в результате аварии равна *p = 0,004.* Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год *C = 15* денежных единиц страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании *S = 2500* денежных единиц. Найти вероятность того, что к концу года страховая компания потерпит убыток.

*Решение*.

Пусть *N* – число автолюбителей, застрахованных в компании; *C* – страховой взнос; *S* – сумма, выплачиваемая пострадавшему в аварии; *K* – предельное число автолюбителей, попавших в аварию, при котором страховая компания не терпит убытки.

Очевидно, что сумма страховых взносов должна быть не меньше суммы, выплачиваемой по страхованию, т.е. $C \cdot N \ge S \cdot K$.

Откуда

$$K \le \frac{C \cdot N}{S} = \frac{15 \cdot 15000}{2500} = 90.$$

Если $m$ – число автолюбителей, попавших в аварию в течение года, то при выполнении неравенства $K < m < N$ страховая компания будет терпеть убытки. Согласно интегральной теореме Муавра-Лапласа будем иметь

$$P_N\left(K < m < N\right) = \Phi\left(x''\right) - \Phi\left(x'\right),$$

где $$x'' = \frac{N - Np}{\sqrt{Npq}} = \frac{15000 - 15000 \cdot 0{,}004}{\sqrt{15000 \cdot 0{,}004 \cdot 0{,}996}} = \frac{14940}{7{,}73} = 1933,$$

$$x' = \frac{K - Np}{\sqrt{Npq}} = \frac{90 - 15000 \cdot 0{,}004}{\sqrt{15000 \cdot 0{,}004 \cdot 0{,}996}} = \frac{30}{7{,}73} = 3{,}88.$$

Таким образом, искомая вероятность равна

$$P_{15000}\left(90 < m < 15000\right) \approx \Phi(1933) - \Phi(3{,}88) = 0{,}5 - 0{,}4999 = 0{,}0001.$$

**Тема 3.1**

В результате статистических наблюдений некоторой совокупности относительно количественного признака X были получены выборочные данные.

Требуется :

- составить дискретный или интервальный ряд распределения частот и относительных частот случайной величины X и построить полигон частот или гистограмму относительных частот;
- найти эмпирическую функцию распределения признака X и построить ее график;
- вычислить числовые оценки параметров распределения: выборочные среднюю, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

<u>Задание 1.</u>

2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 0, 3, 1, 1, 1, 5, 4, 4, 4, 0, 1, 1, 4, 1, 0, 9, 1, 4, 5, 2, 1, 2, 1

*Решение.*

Обозначим через $x_i$ варианты признака X. Из условия видно, что $x_i$ принимают одно из значений 0, 1, 2, 3, 4, 5, 9. Следовательно, X – дискретная случайная величина. Число вариант выборки n = 30 (объем выборки). Составим вариационный ряд, то есть сгруппированный ряд числовых данных, ранжированный в порядке возрастания.

0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 9

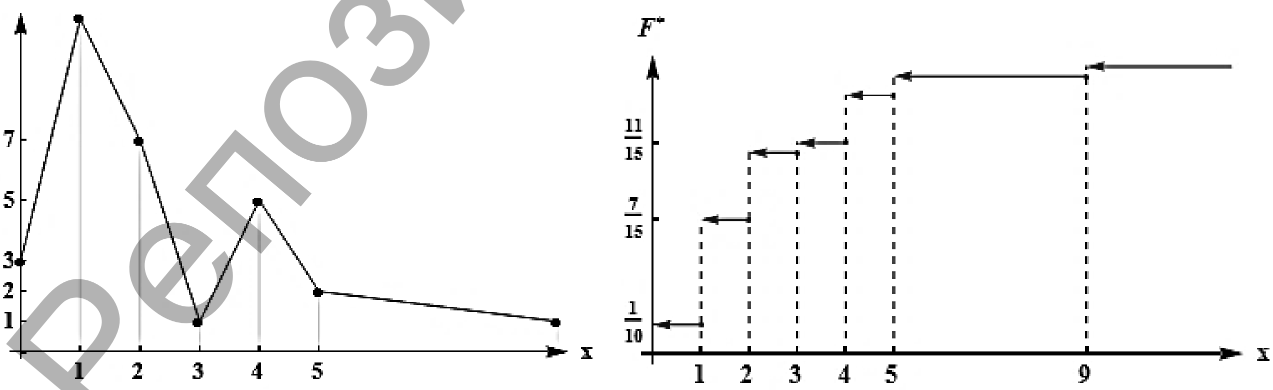
Получили семь групп, т.е. различных значений случайной величины. Для каждой группы подсчитаем частоту значений варианты. Результаты группировки сведем в таблицу. Получим ряд распределения частот и относительных частот случайной величины X.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 3 | 11 | 7 | 1 | 5 | 2 | 1 |
| $\omega_i = \frac{n_i}{n}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{11}{30}$ | $\frac{7}{30}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{30}$ |

Так как случайная величина X – дискретная, поэтому построим полигон частот. Полигоном частот называют ломаную, которая состоит из отрезков, соединяющих точки $(x_i;\ n_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты $x_i$, а на оси ординат – соответствующие им частоты $n_i$. Точки ($x_i$; $n_i$) соединяют отрезками прямых и получают полигон частот (рисунок 1а).

Составим эмпирическую функцию распределения. Объём выборки по условию примера n = 30. Наименьшая варианта равна 0, значит, $n_x = 0$ при $x \le 0$. Тогда $F^*(x) = \dfrac{0}{30} = 0$ при $x \le 0$. Если $0 < x \le 1$, то неравенство $X < x$ выполняется для варианты $x_1 = 1$, которая встречается 3 раза, поэтому $n_x = 3$ и $F^*(x) = \dfrac{0+3}{30} = \dfrac{1}{10}$. Если $1 < x \le 2$, то неравенство $X < x$ выполняется для вариант $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, которые встречаются 3 и 11 раз соответственно, поэтому $n_x = 14$ и $F^*(x) = \dfrac{0+3+11}{30} = \dfrac{7}{15}$ и т.д. В результате имеем функцию. Построим график функции $F^*(x)$ (рисунок 1б).

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0; \\ \dfrac{0+3}{30} = \dfrac{1}{10}, \quad 0 < x \le 1; \\ \dfrac{0+3+11}{30} = \dfrac{7}{15}, \quad 1 < x \le 2; \\ \dfrac{0+3+11+7}{30} = \dfrac{7}{10}, \quad 2 < x \le 3; \\ \dfrac{0+3+11+7+1}{30} = \dfrac{11}{15}, \quad 3 < x \le 4; \\ \dfrac{0+3+11+7+1+5}{30} = \dfrac{9}{10}, \quad 4 < x \le 5; \\ \dfrac{0+3+11+7+1+5+2}{30} = \dfrac{29}{30}, \quad 5 < x \le 9; \\ \dfrac{0+3+11+7+1+5+2+1}{30} = \dfrac{30}{30} = 1, \quad x > 9. \end{cases}$$




а) б)

*а – полигон частот; б – график функции $F^*(x)$*

***Рисунок 1***

Для вычисления числовых оценок параметров распределения: выборочной средней, дисперсии и среднего квадратичного отклонения составим вспомогательную расчетную таблицу (см. ниже).

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i\ n_i$ | $x_i^{\ 2}\ n_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 0 | 0 |
| 1 | 11 | 11 | 11 |
| 2 | 7 | 14 | 28 |
| 3 | 1 | 3 | 9 |
| 4 | 5 | 20 | 80 |
| 5 | 2 | 10 | 50 |
| 9 | 1 | 9 | 81 |
| $\sum$ | 30 | 67 | 259 |

Вычислим выборочные оценки параметров распределения по формулам:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum\ x_i n_i}{n}, \quad D_B = \frac{\sum x_i^{\ 2} n_i}{n} - \overline{x}_B^{\ 2}, \quad \sigma_B = \sqrt{D_B}\ .$$

Используя результаты вычислений, приведенных в таблице, найдем:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum\ x_i n_i}{n} = \frac{67}{30} \approx 2{,}23\ , \quad D_B = \frac{\sum x_i^{\ 2} n_i}{n} - \overline{x}_B^{\ 2} = \frac{259}{30} - \left(\frac{67}{30}\right)^2 = \frac{3281}{900} \approx 3{,}66,$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{\frac{3281}{900}} \approx 1{,}91.$$

<u>Задание 2.</u>

19, 20, 19, 19, 20, 20, 18, 18, 15, 19, 20, 17, 23, 23, 21, 24,
20, 22, 20, 23, 20, 23, 21, 19, 21, 20, 19, 21, 17, 20

*Решение.*

Судя по тому, что повторяющихся значений, как это было в задании 1, достаточно мало, этот признак следует отнести к непрерывным. Следовательно, требуется построить для него интервальное распределение, для чего, подсчитав количество данных, определяем объем выборки n = 30. Затем находим наименьшую и наибольшую варианты: $x_{\min}$ = 15 и $x_{\max}$ = 24 и по формуле Стерджеса находим длину интервала варьирования

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}322 \lg n} = \frac{24 - 15}{1 + 3{,}322 \lg 30} \approx 1{,}5.$$

За начало первого интервала можно принять некоторое значение, несколько меньшее $x_{\min}$, или само значение $x_{\min}$. В приведённом решении примера выбрано $a_0 = x_{\min}$. Далее, последовательно прибавляя h, получаем границы интервалов: $a_1 = 15;$ $a_2 = 16{,}5;$ $a_3 = 18;$ $a_4 = 19{,}5;$ $a_5 = 21;$ $a_6 = 22{,}5;$ $a_7 = 24.$ Последний интервал должен «накрывать» $x_{\max}$ = 24. Теперь подсчитаем интервальные частоты – количества вариант, попавших в каждый интервал. Это удобно делать с помощью приводимой ниже таблицы.

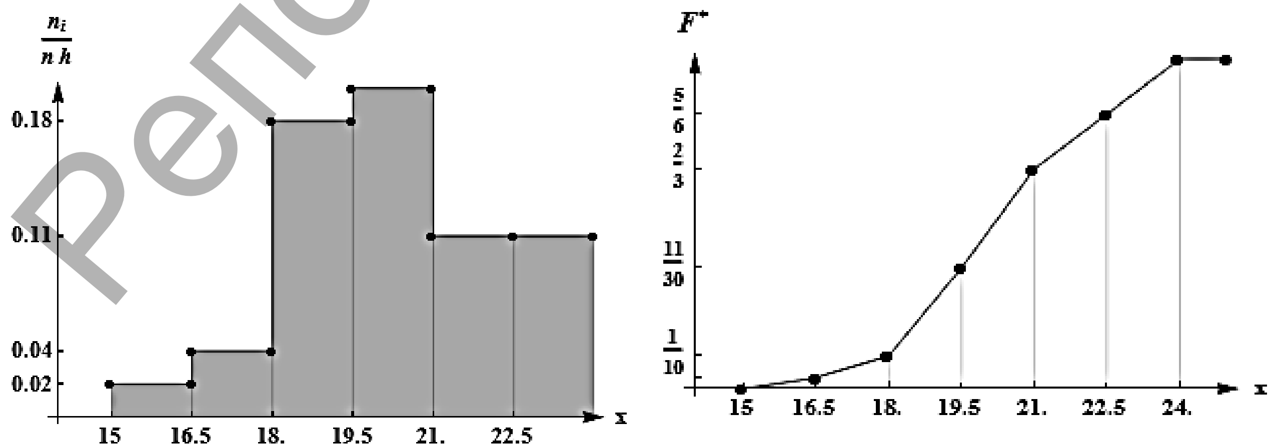
| № интервала | Интервалы | Подсчет частот | Частоты $n_i$ | Относительные частоты $\frac{n_i}{n}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $(15;16{,}5)$ | | 1 | $1/30$ |
| 2 | $(16{,}5;18)$ | | 2 | $1/15$ |
| 3 | $(18;19{,}5)$ | | 8 | $4/15$ |
| 4 | $(19{,}5;21)$ | | 9 | $3/10$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | $(21; 22{,}5)$ | ⊠ | 5 | $1/6$ |
| 6 | $(22{,}5; 24)$ | ⊠ | 5 | $1/6$ |
| Объем выборки | | | n = 30 | $\sum n_i / n = 1$ |

Последовательно просматривая данные, каждое значение отмечаем чертой в строке соответствующего интервала, формируя квадратики с диагональю, что соответствует пяти вариантам, попавшим в интервал, и удобно при подсчете частот $n_i$. Полученная совокупность граф 2 и 4 называется интервальным распределением. На их данных строится гистограмма относительных частот: прямоугольники с основаниями – интервалами вариации и высотами, равными соответствующим интервальным относительным частотам $\frac{n_i}{n\,h}$ (рисунок 2а). Эмпирическую функцию распределения зададим таблично, исходя из данных столбца 5 по правилу накопления частот.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 15; \\ \dfrac{0+1}{30} = \dfrac{1}{30}, & 15 < x \le 16{,}5; \\ \dfrac{0+1+2}{30} = \dfrac{3}{30}, & 16{,}5 < x \le 18; \\ \dfrac{0+1+2+8}{30} = \dfrac{11}{30}, & 18 < x \le 19{,}5; \\ \dfrac{0+1+2+8+9}{30} = \dfrac{20}{30}, & 19{,}5 < x \le 21; \\ \dfrac{0+1+2+8+9+5}{30} = \dfrac{25}{30}, & 21 < x \le 22{,}5; \\ \dfrac{0+1+2+8+9+5+5}{30} = \dfrac{30}{30} = 1, & 12{,}5 < x \le 24; \\ 1, & x > 24. \end{cases}$$

Строим график эмпирической функции распределения. Для интервального распределения частот эта функция должна быть непрерывна, поэтому в системе координат отмечаем точки, исходя из вида функции $F^*(x)$, и соединяем их плавной линией (рис. 2б).




а) б)

*а – гистограмма относительных частот; б – график функции* $F^*(x)$

***Рисунок 2***

Для вычисления числовых оценок параметров распределения введем в рассмотрение $x_i$ – середины интервалов и, приписав им соответствующие интервальные частоты $n_i$, получим, как и в задании 1, вариационный ряд, который запишем в виде следующей таблицы:

| Интервалы | $x_i = \frac{a_{i-1}+a_i}{2}$ | $n_i$ | $x_i\ n_i$ | $x_i^{\ 2}\ n_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $(15;16{,}5)$ | 15,75 | 1 | 15,75 | 248,06 |
| $(16{,}5;18)$ | 17,25 | 2 | 34,5 | 595,12 |
| $(18;19{,}5)$ | 18,75 | 8 | 150 | 2812,5 |
| $(19{,}5;21)$ | 20,25 | 9 | 182,25 | 3690,56 |
| $(21;22{,}5)$ | 21,75 | 5 | 108,75 | 2365,31 |
| $(22{,}5;24)$ | 23,25 | 5 | 116,25 | 2702,81 |
| $\sum$ | | 30 | 607,5 | 12414,4 |

Найдем:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{607{,}5}{30} \approx 20{,}25; \quad D_B = \frac{\sum x_i^{\ 2} n_i}{n} - \bar{x}_B^{\ 2} = \frac{12414{,}4}{30} - (20{,}25)^2 \approx 3{,}75;$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{3{,}75} \approx 1{,}94.$$

**Тема 3.2**

Задание 1. По заданному распределению найти несмещенные оценки для $x_Г$, $D_Г$.

| $x_i$ | 19 | 34,4 | 49,8 | 65,1 | 80,5 | 95,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 7 | 15 | 23 | 15 | 7 | 3 |

*Решение*.

Объем выборки $n = 70$. Для нахождения несмещенных оценок $x_Г$ и $D_Г$ составим вспомогательную расчетную таблицу

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i\ n_i$ | $x_i^{\ 2}\ n_i$ |
|---|---|---|---|
| 19 | 7 | 133 | 2527 |
| 34,4 | 15 | 516 | 17750,4 |
| 49,8 | 23 | 1145,4 | 57040,92 |
| 65,1 | 15 | 976,5 | 63570,15 |
| 80,5 | 7 | 563,5 | 45361,75 |
| 95,9 | 3 | 287,7 | 27590,43 |
| $\sum$ | 70 | 3622,1 | 213840,65 |

Находим выборочную среднюю $\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{3622{,}1}{70} \approx 51{,}74;$

Далее находим выборочную дисперсию:

$$D_B = \frac{\sum x_i^{\ 2} n_i}{n} - \overline{x}_B^{\ 2} = \frac{373594{,}25}{70} - (51{,}74)^2 \approx 377{,}84,$$

Находим несмещенную оценку дисперсии:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B = \frac{70}{69} \cdot 377{,}84 = 383{,}31.$$

Ответ: $\overline{x}_B \approx 51{,}74$; $S^2 \approx 383{,}31$.

<u>Задание 2.</u> Из генеральной совокупности извлечена выборка. Оценить с надежностью 0,99 математическое ожидание *a* и среднее квадратичное отклонение нормально распределенного признака *X* при помощи доверительных интервалов.

| $x_i$ | 1,7 | 3,2 | 4,7 | 6,2 | 7,7 | 9,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 5 | 6 | 7 | 4 | 1 |

*Решение*.

Так как $n = 25$ и $n < 30$, следовательно применяем интервальные оценки. Составим расчетную таблицу:

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i\ n_i$ | $x_i^{\ 2}\ n_i$ |
|---|---|---|---|
| 1,7 | 2 | 3,4 | 5,78 |
| 3,2 | 5 | 16 | 51,2 |
| 4,7 | 6 | 28,2 | 132,54 |
| 6,2 | 7 | 43,4 | 269,08 |
| 7,7 | 4 | 30,8 | 237,16 |
| 9,2 | 1 | 9,2 | 84,64 |
| $\sum$ | 25 | 131 | 780,4 |

Найдем, что: $\overline{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{131}{25} \approx 5{,}24;$

$$D_B = \frac{\sum x_i^{\ 2} n_i}{n} - \overline{x}_B^{\ 2} = \frac{780{,}4}{25} - (5{,}24)^2 \approx 3{,}75,$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B = \frac{25}{24} \cdot 3{,}75 = 3{,}92; \ \ S = \sqrt{3{,}92} = 1{,}98.$$

Доверительный интервал для $a$ при неизвестном $\sigma$:

$$\overline{x}_B - \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}},$$

где число $t_{0,99} = t(0{,}99, 25) = 2{,}797$ находим по таблице 3 (см. приложение) распределения Стьюдента при значениях $\gamma = 0{,}99$ и $\nu = n - 1 = 24 -$ степенях свободы.

$$5{,}24 - \frac{2{,}797 \cdot 1{,}98}{\sqrt{25}} < a < 5{,}24 + \frac{2{,}797 \cdot 1{,}98}{\sqrt{25}}, \qquad 4{,}13 < a < 6{,}35.$$

Доверительный интервал для $\sigma$

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q),$$

где $q = q(0{,}99, 25) = 0{,}49$ находим по таблице 5 (см. приложение).

$1{,}98(1-0{,}49)<\sigma<1{,}98(1+0{,}49),$ $\qquad\qquad 1{,}0098<\sigma<2{,}95.$

Ответ: $4{,}13<a<6{,}35;\ 1{,}0098<\sigma<2{,}95.$

Задание 3. $X \in N(a,\sigma)$. Составить доверительный интервал для а, если известны $\gamma,\ \bar{x}_B,\ n$ и $\sigma$.

$\gamma=0{,}99,\ \ \sigma=7,\ \ \bar{x}_B=52{,}3,\ \ n=20.$

*Решение*.

Доверительный интервал для *а* при известном $\sigma$:

$$\bar{x}_B-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_B+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $2\Phi(t)=\gamma$; $2\Phi(t)=0{,}99$; $\Phi(t)=0{,}495.$

По таблице значений функции $\Phi(t)$ (таблица 2, см. приложение) находим значение аргумента $t$, при котором значение функции $\Phi(t)=0{,}495$, а именно получаем что $t=2{,}58$. Тогда

$$53{,}2-\frac{2{,}58\cdot 7}{\sqrt{20}}<a<53{,}2-\frac{2{,}58\cdot 7}{\sqrt{20}}, \qquad 49{,}16<a<57{,}24.$$

Ответ: $49{,}16<a<57{,}24.$

**Тема 3.3**

Задание 1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha=0{,}01$ установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами $n_i$ и теоретическими частотами $n_i'$, которые вычислены исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности Х.

| $n_i$ | 3 | 8 | 22 | 35 | 24 | 8 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n'_i$ | 1,8 | 8,2 | 21,3 | 30,6 | 24,3 | 10,7 | 2,6 |

*Решение*.

По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha=0{,}05$ требуется проверить, значимо или нет различие в частотах $n_i$ и $n'_i$. Для этого требуется вычислить статистику $\chi^2_{набл.}=\sum\frac{(n_i-n'_i)^2}{n'_i}$. Составим расчетную таблицу, в которой объединим интервалы где $n_i<5$. Для рассматриваемого примера требуется объединить по два первых и последних интервала.

| $n_i$ | $n'_i$ | $(n_i-n'_i)^2$ | $\frac{(n_i-n'_i)^2}{n'_i}$ |
|---|---|---|---|
| $\left.\begin{matrix}3\\5\end{matrix}\right\}=8$ | $\left.\begin{matrix}1{,}8\\8{,}2\end{matrix}\right\}=10$ | 4 | 0,4 |
| 22 | 21,3 | 0,49 | 0,023 |
| 35 | 30,6 | 19,36 | 0,633 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 24 | 24,3 | 0,09 | 0,0037 |
| $\left.\begin{matrix}8\\3\end{matrix}\right\}=11$ | $\left.\begin{matrix}10,7\\2,6\end{matrix}\right\}=13,3$ | 5,29 | 0,3977 |
| $\sum$ | | | 1,0574 |

Таким образом, $\chi^2_{набл.}=1,0574$. По таблице 4 «Критические точки распределения «хи-квадрат» (см. приложение) находим $\chi^2_{крит.}(\alpha,\ k-r-1)$; $k=5$ – число пар значений в расчетной таблице; так как рассматривается гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности Х, то $r=2$.

$\chi^2_{крит.}(0,01,\ 2)=9,21.$

Т.о., получаем, что $\chi^2_{набл.}<\chi^2_{крит.}$, следовательно, нет оснований отвергнуть гипотезу о том, что эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо.

Задание 2. В таблице приведены данные об отказах аппаратуры за 10000 часов работы. Общее число обследованных экземпляров аппаратуры равно n. Приняты обозначения: $i$ – число отказов, $n_i$ – количество случаев, в которых наблюдалось $i$ отказов. Приняв уровень значимости $\alpha=0,05$, проверить гипотезу о том, что число отказов имеет распределение Пуассона.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 25 | 41 | 35 | 12 | 4 | 3 |

Решение.

Выдвинем гипотезу $H_0$ о том, что рассматриваемый признак Х распределен по закону Пуассона. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha=0,05$ проверим данную гипотезу. Вычислим выборочные оценки параметров распределения, с помощью которых найдем теоретические частоты $n'_i=n\cdot P_i$, $P_i=\dfrac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$ $\left(i=0,1,2,3,...\right)$, где $\lambda=\overline{x}_B=\sigma^2_B$ – параметр распределения. Составим следующую расчетную таблицу:

| $i$ | $n_i$ | $x_i\,n_i$ | $P_i$ | $n'_i=n\cdot P_i$ | $n_i$ | $(n_i-n'_i)^2$ | $\dfrac{(n_i-n'_i)^2}{n'_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 25 | 0 | 0,22 | 26,4 | 25 | 1,96 | 0,074 |
| 1 | 41 | 41 | 0,33 | 39,6 | 41 | 1,96 | 0,049 |
| 2 | 35 | 70 | 0,25 | 30 | 35 | 25 | 0,833 |
| 3 | 12 | 36 | 0,13 | 15,6 | 12 | 12,96 | 0,83 |
| 4 | 4 | 16 | 0,048 | $\left.\begin{matrix}5,76\\0,432\end{matrix}\right\}=6,192$ | $\left.\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right\}=7$ | 0,65 | 0,105 |
| 6 | 3 | 18 | 0,0036 | | | | |
| $\sum$ | 120 | 181 | 0,9816 | 117,8 | 120 | | 1,891 |

Объем выборки $n=\sum n_i=120$. Находим выборочную среднюю

$$\overline{x}_B=\frac{\sum x_i n_i}{n}=\frac{181}{120}\approx 1,51.$$

Тогда параметр $\lambda = \overline{x}_B = 1{,}51$ и $P_i = \dfrac{1{,}51^i e^{-1{,}51}}{i!}$ $(i = 0,1,2,3,...)$.

По таблице 4 (см. приложение) находим $\chi^2_{крит.}(\alpha,\ k - r - 1)$; $k = 5$ – число пар значений в расчетной таблице; так как рассматривается гипотеза о распределении Пуассона, то $r = 1$.

$$\chi^2_{крит.}(0{,}05,\ 3) = 7{,}815.$$

Т.о., получаем, что $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{крит.}$, следовательно, нет оснований отвергнуть гипотезу о том, что рассматриваемый признак X распределен по закону Пуассона.

<u>Задание 3.</u> Используя критерии Пирсона при $\alpha = 0{,}02$, проверить, согласуется ли гипотеза о показательном распределении генеральной совокупности с заданным эмпирическим распределением.

| $x_{i-1} - x_i$ | 0–5 | 5–10 | 10–15 | 15–20 | 20–25 | 25–30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота, $n_i$ | 133 | 45 | 15 | 4 | 2 | 1 |

*Решение.*

Выдвинем гипотезу $H_0$ о том, что рассматриваемый признак X распределен по показательному закону. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}02$ проверим данную гипотезу.

Известно, что плотность показательного распределения имеет вид

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0, \quad \lambda = \frac{1}{t_B}. \ P \ (a < t < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Составим следующую расчетную таблицу:

| $x_{i-1} - x_i$ | $n_i$ | $x_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$ | $x_i \cdot n_i$ | $P_i$ | $n \cdot P_i$ | $\dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0-5 | 33 | 2,5 | 332,5 | $1 - 0{,}3734 = 0{,}6266$ | 125,3 | 0,473 |
| 5-10 | 5 | 7,5 | 337,5 | $0{,}3734 - 0{,}1395 = 0{,}2339$ | 46,78 | 0,068 |
| 10-15 | 15 | 12,5 | 187,5 | $0{,}1395 - 0{,}0521 = 0{,}0874$ | 17,48 | 0,352 |
| 15-30 | 7 | 2,5 | 157,5 | $0{,}0521 - 0{,}0027 = 0{,}0494$ | 9,88 | 0,840 |
| $\sum$ | 200 | | 1015 | | 199,4 | 1,733 |

Интервалы, где $n_i < 5$, объединили в один от 15 до 30.

$$\overline{x_B} = \frac{1015}{200} = 5{,}075; \quad \lambda = 0{,}197.$$

Плотность распределения имеет вид $f(t) = 0{,}197 e^{-0{,}197t} \quad t \ge 0$.

По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверяем, значимо или нет различие в частотах $n_i$ и $n'_i$.

$$\chi^2_{набл.} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = 1{,}733; \ \chi^2_{крит.}(0{,}05;\ 4 - 1 - 1) = \chi^2_{крит.}(0{,}05; 2) = 6{,}00.$$

Так как $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{крит.}$, то различие в $n_i$ и $n'_i$ незначимо, нет оснований отвергать гипотезу о показательном распределении в генеральной совокупности.

## Тема 3.4

В результате статистических наблюдений некоторой совокупности относительно количественного признака X были получены выборочные данные.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11.5 | 14.2 | 12.3 | 5.6 | 8.8 | 5.9 | 6.9 | 16.3 | 4.5 | 7.8 |
| 13.4 | 6.1 | 11.3 | 13.6 | 7.5 | 2.6 | 14.4 | 7 | 6.6 | 9 |
| 9.1 | 9.6 | 10.8 | 10.2 | 10.1 | 10.2 | 8.9 | 10.2 | 8.1 | 11.7 |
| 11.6 | 11.5 | 7.9 | 11.2, | 10.2 | 6.1 | 8.6 | 13 | 6 | 10.7 |
| 7.1 | 7.1 | 10.8 | 9.8 | 8.1 | 11.3 | 12.4 | 9.8 | 6.9 | 5.1 |

*Решение*.

1. Построим для исследуемого признака интервальное распределение, для чего, подсчитав количество данных, определяем объем выборки n = 50. Затем находим наименьшую и наибольшую варианты: $x_{\min}$ =2,6 и $x_{\max}$ =16,3 и по формуле Стерджеса находим длину интервала варьирования

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}322\lg n} = \frac{16{,}3 - 2{,}6}{1 + 3{,}322\lg 50} \approx 2{,}1.$$

Прибавляя h, получаем последовательно границы интервалов и подсчитаем интервальные частоты – количества вариант, попавших в каждый интервал. Составим таблицу.

| № интервала | Интервалы $(a_{i-1};\ a_i)$ | Подсчет частот | Частоты $n_i$ | Относительные частоты $\frac{n_i}{n}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $(2{,}6; 4{,}7)$ | | 2 | $1/25$ |
| 2 | $(4{,}7; 6{,}8)$ | | 7 | $7/50$ |
| 3 | $(6{,}8; 8{,}9)$ | | 12 | $6/25$ |
| 4 | $(8{,}9; 11)$ | | 14 | $7/25$ |
| 5 | $(11; 13{,}1)$ | | 10 | $1/5$ |
| 6 | $(13{,}1; 15{,}2)$ | | 4 | $2/25$ |
| 7 | $(15{,}2; 17{,}3)$ | | 1 | $1/50$ |
| Объем выборки | | | n = 50 | $\sum n_i/n = 1$ |

Построим гистограмму относительных частот. Соединив середины верхних оснований прямоугольников отрезками прямых, получим полигон относительных частот.

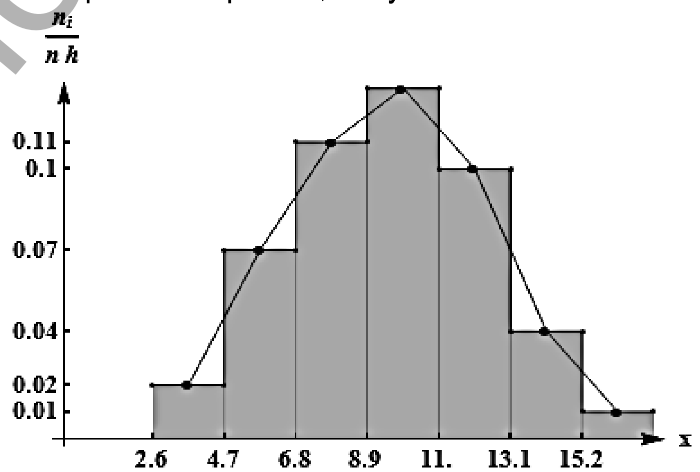
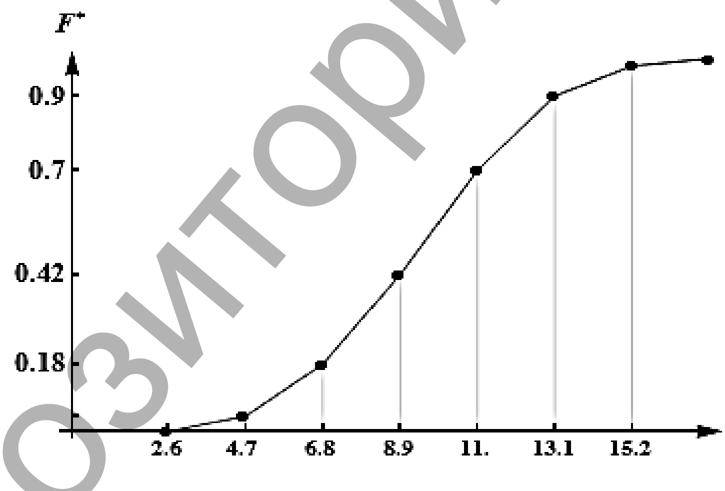



***Рисунок 3 – Полигон и гистограмма относительных частот***

2. Составим эмпирическую функцию распределения.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 2{,}6; \\ \dfrac{0+2}{50} = \dfrac{1}{25}, \quad 2{,}6 < x \le 4{,}7; \\ \dfrac{0+2+7}{50} = \dfrac{9}{50}, \quad 4{,}7 < x \le 6{,}8; \\ \dfrac{0+2+7+12}{50} = \dfrac{21}{50}, \quad 6{,}8 < x \le 8{,}9; \\ \dfrac{0+2+7+12+14}{50} = \dfrac{7}{10}, \quad 8{,}9 < x \le 11; \\ \dfrac{0+2+7+12+14+10}{50} = \dfrac{9}{10}, \quad 11 < x \le 13{,}1; \\ \dfrac{0+2+7+12+14+10+4}{50} = \dfrac{49}{50}, \quad 13{,}1 < x \le 15{,}2; \\ \dfrac{0+2+7+12+14+10+4+1}{50} = 1, \quad 15{,}2 < x \le 17{,}3; \\ 1, \quad x > 17{,}3. \end{cases}$$

Строим график эмпирической функции распределения. Из вида функции $F^*(x)$ в системе координат отмечаем точки и соединяем их плавной линией.




3. Для вычисления числовых оценок параметров распределения введем в рассмотрение $x_i$ – середины интервалов и, приписав им соответствующие интервальные частоты $n_i$, получим вариационный ряд, который запишем в виде следующей таблицы:

| Интервалы $(a_{i-1};\ a_i)$ | $x_i = \dfrac{a_{i-1}+a_i}{2}$ | $n_i$ | $x_i\ n_i$ | $x_i^{\ 2}\ n_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $(2{,}6; 4{,}7)$ | 3,65 | 2 | 7,3 | 26,65 |
| $(4{,}7; 6{,}8)$ | 5,75 | 7 | 40,25 | 231,44 |
| $(6{,}8; 8{,}9)$ | 7,85 | 12 | 94,2 | 739,47 |
| $(8{,}9; 11)$ | 9,95 | 14 | 139,3 | 1386,04 |
| $(11; 13{,}1)$ | 12,05 | 10 | 120,5 | 1452,02 |
| $(13{,}1; 15{,}2)$ | 14,15 | 4 | 56,6 | 800,89 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $(15{,}2;17{,}3)$ | 16,25 | 1 | 16,25 | 264,06 |
| $\sum$ | | 50 | 474,4 | 4900,57 |

Найдем:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{474{,}4}{50} \approx 9{,}5; \quad D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - \overline{x}_B^{\,2} = \frac{4900{,}57}{50} - (9{,}5)^2 \approx 7{,}99;$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{7{,}99} = 2{,}82;$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{50}{49} 7{,}99 = 8{,}06; \quad s = \sqrt{8{,}06} = 2{,}84.$$

4. Рассматриваемый признак X имеет нормальное распределение, в пользу этого говорят следующие факты:

− полигон относительных частот (рисунок 3) напоминает кривую Гаусса;

− для исходных данных выполняется «правило $3\sigma$»: если СВ X имеет нормальный закон распределения с параметрами $a$ и $\sigma$, т.е. $X \in N(a, \sigma)$, то практически достоверно, что ее значения заключены в интервале $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$. А именно, оценивая теоритическое математическое ожидание $a$ величиной $\overline{x}_B = 9{,}5$, теоритическое среднее квадратичное отклонение $\sigma$ величиной $\sigma_B = 2{,}82$, получим интервал

$$(a - 3\sigma; a + 3\sigma) \cong (\overline{x}_B - 3\sigma_B; \overline{x}_B + 3\sigma_B) = (9{,}5 - 3 \cdot 2{,}82;\ 9{,}5 + 3 \cdot 2{,}82) = (1{,}04; 17{,}96).$$

Получаем, что в нашем случае все 50 вариант заключены в интервале $(a - 3\sigma; a + 3\sigma) = (1{,}04; 17{,}96)$, т.к. $x_{\min}$=2,6 и $x_{\max}$=16,3.

В силу этого при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ выдвинем и проверим гипотезу о том, что рассматриваемый признак X имеет нормальное распределение с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_B \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - x_B)^2}{2\sigma_B^2}} = \frac{1}{2{,}82\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-9.5)^2}{15.98}}.$$

Теоретические (*выравнивающие*) частоты $n_i'$ определяются по формуле

$$n_i' = n \cdot P_i, \ i = \overline{1,k}, \ P_i = P(a_{i-1} < X < a_i) = \Phi\left(\frac{a_i - \overline{x}_B}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - \overline{x}_B}{s}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ − функция Лапласа значения, которой находим по таблице 2 (см. приложение). Для найденных числовых параметров распределения получаем

$$P_i = \Phi\left(\frac{a_i - 9{,}5}{2{,}84}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - 9{,}5}{2{,}84}\right).$$

Составим следующую расчетную таблицу:

| Интервалы $(a_{i-1};\ a_i)$ | Координаты границ интервалов $\left(\frac{a_{i-1} - 9{,}5}{2{,}84}; \frac{a_i - 9{,}5}{2{,}84}\right)$ | Значение функции Лапласа $\Phi(x)$ на границах интервала | Оценка вероятности попадания в интервал $P_i$ | $n_i' = n \cdot P_i = 50 \cdot P_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $(2{,}6; 4{,}7)$ | $(-2{,}43; -1{,}69)$ | −0,4925; −0,4545 | 0,038 | 1,9 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $(4{,}7;6{,}8)$ | $(-1{,}69;-0{,}95)$ | −0,4545; −0,3289 | 0,1255 | 6,275 |
| $(6{,}8;8{,}9)$ | $(-0{,}95;-0{,}21)$ | −0,3289; −0,0832 | 0,2458 | 12,29 |
| $(8{,}9;11)$ | $(-0{,}21;0{,}53)$ | −0,0832; 0,2019 | 0,2851 | 14,26 |
| $(11;13{,}1)$ | $(0{,}53;1{,}27)$ | 0,2019; 0,3980 | 0,196 | 9,8 |
| $(13{,}1;15{,}2)$ | $(1{,}27;2{,}01)$ | 0,3980; 0,4778 | 0,0798 | 3,99 |
| $(15{,}2;17{,}3)$ | $(2{,}01;2{,}75)$ | 0,4778; 0,4970 | 0,0192 | 0,96 |
| $\sum$ | | | 0,9895 | 49,47 |

5. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ требуется проверить, значимо или нет различие в частотах $n_i$ и $n'_i$. Для этого требуется вычислить статистику $\chi^2_{набл.} = \sum \dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$. Составим расчетную таблицу, в которой объединим интервалы, где $n_i < 5$. Для рассматриваемого примера требуется объединить по два первых и последних интервала.

| $n_i$ | $n'_i$ | $(n_i - n'_i)^2$ | $\dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$ |
|---|---|---|---|
| $\left.\begin{matrix}2\\7\end{matrix}\right\} = 9$ | $\left.\begin{matrix}1{,}9\\6{,}275\end{matrix}\right\} = 8{,}175$ | 0,68 | 0,083 |
| 12 | 12,29 | 0,084 | 0,0068 |
| 14 | 14,26 | 0,068 | 0,0047 |
| 10 | 9,8 | 0,04 | 0,0041 |
| $\left.\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right\} = 5$ | $\left.\begin{matrix}3{,}99\\0{,}96\end{matrix}\right\} = 4{,}95$ | 0,0025 | 0,0005 |
| $\sum$ | | | 0,099 |

Таким образом, $\chi^2_{набл.} = 0{,}099$. По таблице 4 (см. приложение) находим $\chi^2_{крит.}(\alpha,\ k - r - 1)$; $k = 5$ – число пар значений в расчетной таблице; так как рассматривается гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X, то $r = 2$.

$\chi^2_{крит.}(0{,}05,\ 2) = 5{,}991.$

Таким образом, получаем, что $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{крит.}$, следовательно, нет оснований отвергнуть гипотезу о том, что эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо. Такой вывод можно сделать и из рисунка 4, где в одной системе координат изображен полигон теоретических частот (пунктирная линия) и эмпирических частот (сплошная линия).

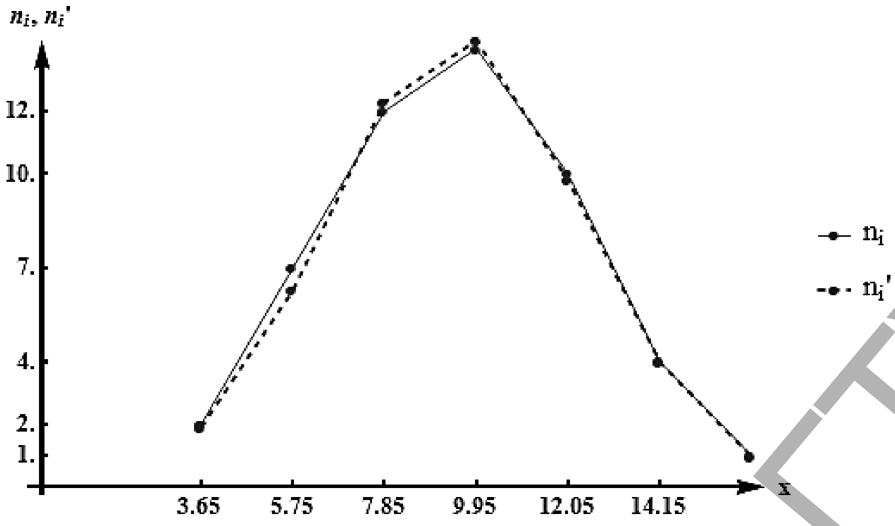



***Рисунок 4 − Полигон теоретических и эмпирических частот***

6. Для отыскания вероятности попадания признака *X* в интервал $(a-5, a+3)=\left(\overline{x_B}-5; \overline{x_B}+3\right)=(9{,}5-5; 9{,}5+3)=(4{,}5; 12{,}5)$ воспользуемся формулой

$$P(\alpha < X < \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\beta-\overline{x_B}}{s}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-\overline{x_B}}{s}\right),$$

$$P(4{,}5 < X < 12{,}5)=\Phi\left(\frac{12{,}5-\overline{x_B}}{2{,}84}\right)-\Phi\left(\frac{4{,}5-\overline{x_B}}{2{,}84}\right)=\Phi(1{,}06)-\Phi(-1{,}76)=$$

$$=0{,}3554+0{,}4608=0{,}8162.$$

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание $a$ и среднее квадратичное отклонение нормально распределенного признака *X* при помощи доверительных интервалов. Доверительный интервал для $a$ при неизвестном $\sigma$:

$$\bar{x}_B-\frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B+\frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}},$$

где число $t_{0,95}=t(0{,}95{,}50)=2{,}009$ находим по таблице 3 (см. приложение).

$$9{,}5-\frac{2{,}84\cdot 2{,}009}{\sqrt{50}} < a < 9{,}5+\frac{2{,}84\cdot 2{,}009}{\sqrt{50}}, \qquad 8{,}69 < a < 10{,}31.$$

Доверительный интервал для $\sigma$

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q),$$

где $q=q(0{,}95{,}50)=0{,}21$ находим по таблице 5 (см. приложение).

$$2{,}84(1-0{,}21) < \sigma < 2{,}84(1+0{,}21), \qquad 2{,}24 < \sigma < 3{,}44.$$

**Тема 3.5**

Задание 1. Компания контролирует 6 фабрик, выпускающих однородную продукцию. В таблице приведены данные о производительности труда $y_i$ (тысячи изделий в год на одного работающего) и энерговооруженности фабрики $x_i$ (тыс. квт.ч. в год на одного работающего) $i=\overline{1,6}$. Составить уравнения прямых регрессии, вычислить $r_B$ (пояснить его смысл), найти среднюю производительность труда $\overline{y_x}$, если $x=l$ $(l=2,8)$.

| $x_i$ | 2 | 2,5 | 3 | 3,4 | 3,6 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |

*Решение*.

Составим расчетную таблицу

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^{\,2}$ | $y_i^{\,2}$ | $x_i\ y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1,9 | 4 | 3,61 | 3,8 |
| 2 | 2,5 | 2 | 6,25 | 4 | 5 |
| 3 | 3 | 2,6 | 9 | 6,76 | 5,2 |
| 4 | 3,4 | 3 | 11,56 | 9 | 10,2 |
| 5 | 3,6 | 3,5 | 12,96 | 12,25 | 12,6 |
| 6 | 4 | 4 | 16 | 16 | 16 |
| $\sum$ | 18,5 | 17 | 59,77 | 51,62 | 55,4 |

Так как данные не сгруппированы, то

$$\bar{x}_B=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{18{,}5}{6}=3{,}08; \qquad \bar{y}_B=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{17}{6}=2{,}83;$$

$$\overline{x^2}=\frac{\sum x^2}{n}=\frac{59{,}77}{6}=9{,}96; \qquad \overline{y^2}=\frac{\sum y^2}{n}=\frac{51{,}62}{6}=8{,}6;$$

$$\sigma_B^{\ 2}(x)=\overline{x^2}-(\bar{x}_B)^2=9{,}96-3{,}08^2=0{,}47; \qquad \sigma_B(x)=\sqrt{0{,}47}=0{,}69;$$

$$\sigma_B^{\ 2}(y)=\overline{y^2}-\bar{y}_B^{\ 2}=8{,}6-2{,}83^2=0{,}59; \qquad \sigma_B(y)=\sqrt{0{,}59}=0{,}77;$$

$$\overline{xy}=\frac{\sum x_i y_i}{n}=\frac{55{,}4}{6}=9{,}23;$$

$$r_B=\frac{\overline{xy}-\bar{x}_B\cdot\bar{y}_B}{\sigma_B(x)\cdot\sigma_B(y)}=\frac{9{,}23-3{,}08\cdot 2{,}83}{0{,}69\cdot 0{,}77}=0{,}97.$$

Уравнение прямой регрессии $Y$ на $X$ имеет вид

$$\bar{y}_x-\bar{y}_B=r_B\frac{\sigma_B(y)}{\sigma_B(x)}\cdot(x-\bar{x}_B);$$

$$\bar{y}_x-2{,}83=0{,}97\frac{0{,}77}{0{,}69}\cdot(x-3{,}08); \qquad \bar{y}_x=1{,}08x-0{,}5.$$

Уравнение прямой регрессии $X$ на $Y$ имеет вид

$$\bar{x}_y-\bar{x}_B=r_B\frac{\sigma_B(x)}{\sigma_B(y)}\cdot(y-\bar{y}_B);$$

$$\bar{x}_y=0{,}8y+0{,}81.$$

Заметим, что в данном случае коэффициент корреляции $r_B=0{,}97$ достаточно близок к единице. Следовательно, между признаками X и Y существует весьма высокая тесная связь.

Вычислим среднюю производительность труда $\overline{y_x}$, если $x = 2{,}8$.

$\overline{y}_x = 1{,}08 \cdot 2{,}8 - 0{,}5 = 2{,}52.$

<u>Задание 2.</u> Для данной таблицы значений двух СВ *X* и *Y*, между которыми существует линейная корреляционная зависимость, определить:

− числовые характеристики СВ *X* и *Y*;

− коэффициент корреляции $r_B$, составить уравнение прямых регрессии;

− построить их графики, корреляционное поле;

−оценить тесноту корреляционной зависимости и значимость $r_B$.

| X \ У | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 3 | 4 | | | | |
| 35 | | 10 | 9 | 3 | | |
| 40 | | 6 | 10 | 5 | | |
| 45 | | | 5 | 8 | 3 | |
| 50 | | | | | 4 | 5 |

*Решение*.

Предварительные вычисления вносим в "расширенную" таблицу:

| У \ X | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | $m_y$ | $y m_y$ | $y^2 m_y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 3 | 4 | | | | | 7 | 210 | 6300 |
| 35 | | 10 | 9 | 3 | | | 22 | 770 | 26950 |
| 40 | | 6 | 10 | 5 | | | 21 | 840 | 33600 |
| 45 | | | 5 | 8 | 3 | | 16 | 720 | 32400 |
| 50 | | | | | 4 | 5 | 9 | 450 | 22500 |
| $m_x$ | 3 | 20 | 24 | 16 | 7 | 5 | n = 75 | 2990 | 121750 |
| $x m_x$ | 6 | 80 | 144 | 128 | 70 | 60 | 488 | | |
| $x^2 m_x$ | 12 | 320 | 864 | 1024 | 700 | 720 | 3640 | | |

Находим числовые характеристики составляющих признаков X и У:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_i m_x}{n} = \frac{488}{75} = 6{,}51;$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x_i^{\,2} m_x}{n} = \frac{3640}{75} = 48{,}53;$$

$$\sigma_B^{\,2}(x) = \overline{x^2} - (\overline{x}_B)^2 = 48{,}53 - 6{,}51^2 = 6{,}15$$

$$\sigma_B^{\,2}(y) = \overline{y^2} - (\overline{y}_B)^2 = 1623{,}33 - 39{,}87^2 = \\ = 33{,}71;$$

$$\overline{y}_B = \frac{\sum y_j m_y}{n} = \frac{2990}{75} = 39{,}87;$$

$$\overline{y^2} = \frac{\sum y_j^{\,2} m_y}{n} = \frac{121750}{75} = 1623{,}33;$$

$$\sigma_B(x) = \sqrt{6{,}15} = 2{,}48;$$

$$\sigma_B(y) = \sqrt{33{,}71} = 5{,}81;$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum x_i y_i m_{xy} = \frac{1}{75}\big(30(2\cdot 3 + 4\cdot 4) + 35(4\cdot 10 + 6\cdot 9 + 8\cdot 3) + 40(4\cdot 6 + 6\cdot 10 + 8\cdot 5) +$$

$$+ 45(6\cdot 5 + 8\cdot 8 + 10\cdot 3) + 50(10\cdot 4 + 12\cdot 5)\big) = \frac{22250}{75} = 271{,}067.$$

Находим выборочный коэффициент корреляции по формуле

$$r_B = \frac{\overline{xy} - \overline{x}_B \cdot \overline{y}_B}{\sigma_B(x)\cdot\sigma_B(y)} = \frac{271{,}067 - 6{,}51\cdot 39{,}87}{2{,}48\cdot 5{,}81} = 0{,}799.$$

Близость $r_B$ к единице говорит о достаточно высокой связи признаков X и У. Для оценки существенности этой связи на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ вычислим статистику

$$t_{набл} = \frac{r_B\cdot\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_B{}^2}} = \frac{0{,}799\cdot\sqrt{75-2}}{\sqrt{1-0{,}799^2}} = 11{,}35.$$

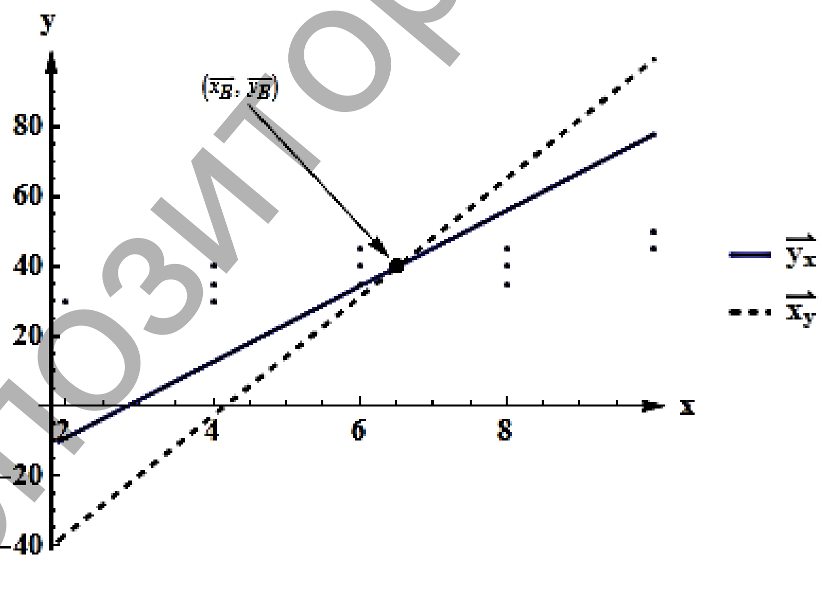
Принимая уровень значимости $\alpha = 0{,}01$, при числе степеней свободы $\nu = n-2 = 73$ по таблице распределения Стьюдента находим $t_{крит} = 2{,}639$. Так как $|t_{набл.}| < t_{крит.}$, то с 99%-й уверенностью можно говорить о существенности тесной связи между признаками Y и X. Теперь находим уравнения прямых регрессии по формулам:

$$\overline{y}_x - \overline{y}_B = r_B\frac{\sigma_B(y)}{\sigma_B(x)}\cdot(x-\overline{x}_B); \qquad \overline{x}_y - \overline{x}_B = r_B\frac{\sigma_B(x)}{\sigma_B(y)}\cdot(y-\overline{y}_B);$$

$$\overline{y}_x - 39{,}87 = 0{,}799\frac{33{,}71}{2{,}48}\cdot(x-6{,}51); \qquad \overline{x}_y - 6{,}51 = 0{,}799\frac{2{,}48}{33{,}71}\cdot(y-39{,}87).$$

После преобразований получим: $\overline{y}_x = 10{,}86x - 30{,}83$; $\overline{x}_y = 0{,}059x + 4{,}17$.

Изобразим обе прямые на одном чертеже. Построим также корреляционное поле, для этого изобразим точки с координатами $(x_k; y_k)\,(k=\overline{1,n})$ на том же чертеже, что и прямые регрессии.




Из рисунка видно, что угол между прямыми острый и близок к нулю, что также свидетельствует о тесной связи между признаками.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Статистические таблицы

**Таблица 1** – Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Сотые доли

| *x* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 3683 | 3668 | 3653 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1,1 | 2179 | 2155 | 2331 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1,2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1,7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2,0 | 0,0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3,1 | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3,2 | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3,3 | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |
| 3,4 | 0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3,5 | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3,6 | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3,7 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| 3,8 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| 3,9 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 | 0001 |

При *x* > 4 принимают $\varphi(x) = 0$.

**Таблица 2** – Значения функции $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0000 | 0.45 | 0.1736 | 0.90 | 0.3159 | 1.35 | 0.4115 | 1.80 | 0.4641 | 2.50 | 0.4938 |
| 0.01 | 0.0040 | 0.46 | 0.1772 | 0.91 | 0.3186 | 1.36 | 0.4131 | 1.81 | 0.4649 | 2.52 | 0.4941 |
| 0.02 | 0.0080 | 0.47 | 0.1808 | 0.92 | 0.3212 | 1.37 | 0.4147 | 1.82 | 0.4656 | 2.54 | 0.4945 |
| 0.03 | 0.0120 | 0.48 | 0.1844 | 0.93 | 0.3238 | 1.38 | 0.4162 | 1.83 | 0.4664 | 2.56 | 0.4948 |
| 0.04 | 0.0160 | 0.49 | 0.1879 | 0.94 | 0.3264 | 1.39 | 0.4177 | 1.84 | 0.4671 | 2.58 | 0.4951 |
| 0.05 | 0.0199 | 0.50 | 0.1915 | 0.95 | 0.3289 | 1.40 | 0.4192 | 1.85 | 0.4678 | 2.60 | 0.4953 |
| 0.06 | 0.0239 | 0.51 | 0.1950 | 0.96 | 0.3315 | 1.41 | 0.4207 | 1.86 | 0.4686 | 2.62 | 0.4956 |
| 0.07 | 0.0279 | 0.52 | 0.1985 | 0.97 | 0.3340 | 1.42 | 0.4222 | 1.87 | 0.4693 | 2.64 | 0.4959 |
| 0.08 | 0.0319 | 0.53 | 0.2019 | 0.98 | 0.3365 | 1.43 | 0.4236 | 1.88 | 0.4699 | 2.66 | 0.4961 |
| 0.09 | 0.0359 | 0.54 | 0.2054 | 0.99 | 0.3389 | 1.44 | 0.4251 | 1.89 | 0.4706 | 2.68 | 0.4963 |
| 0.10 | 0.0398 | 0.55 | 0.2088 | 1.00 | 0.3413 | 1.45 | 0.4265 | 1.90 | 0.4713 | 2.70 | 0.4965 |
| 0.11 | 0.0438 | 0.56 | 0.2123 | 1.01 | 0.3438 | 1.46 | 0.4279 | 1.91 | 0.4719 | 2.72 | 0.4967 |
| 0.12 | 0.0478 | 0.57 | 0.2157 | 1.02 | 0.3461 | 1.47 | 0.4292 | 1.92 | 0.4726 | 2.74 | 0.4969 |
| 0.13 | 0.0517 | 0.58 | 0.2190 | 1.03 | 0.3485 | 1.48 | 0.4306 | 1.93 | 0.4732 | 2.76 | 0.4971 |
| 0.14 | 0.0557 | 0.59 | 0.2224 | 1.04 | 0.3508 | 1.49 | 0.4319 | 1.94 | 0.4738 | 2.78 | 0.4973 |
| 0.15 | 0.0596 | 0.60 | 0.2257 | 1.05 | 0.3531 | 1.50 | 0.4332 | 1.95 | 0.4744 | 2.80 | 0.4974 |
| 0.16 | 0.0636 | 0.61 | 0.2291 | 1.06 | 0.3554 | 1.51 | 0.4345 | 1.96 | 0.4750 | 2.82 | 0.4976 |
| 0.17 | 0.0675 | 0.62 | 0.2324 | 1.07 | 0.3577 | 1.52 | 0.4357 | 1.97 | 0.4756 | 2.84 | 0.4977 |
| 0.18 | 0.0714 | 0.63 | 0.2357 | 1.08 | 0.3599 | 1.53 | 0.4370 | 1.98 | 0.4761 | 2.86 | 0.4979 |
| 0.19 | 0.0753 | 0.64 | 0.2389 | 1.09 | 0.3621 | 1.54 | 0.4382 | 1.99 | 0.4767 | 2.88 | 0.4980 |
| 0.20 | 0.0793 | 0.65 | 0.2422 | 1.10 | 0.3643 | 1.55 | 0.4394 | 2.00 | 0.4772 | 2.90 | 0.4981 |
| 0.21 | 0.0832 | 0.66 | 0.2454 | 1.11 | 0.3665 | 1.56 | 0.4406 | 2.02 | 0.4783 | 2.92 | 0.4982 |
| 0.22 | 0.0871 | 0.67 | 0.2486 | 1.12 | 0.3686 | 1.57 | 0.4418 | 2.04 | 0.4793 | 2.94 | 0.4984 |
| 0.23 | 0.0910 | 0.68 | 0.2517 | 1.13 | 0.3708 | 1.58 | 0.4429 | 2.06 | 0.4803 | 2.96 | 0.4985 |
| 0.24 | 0.0948 | 0.69 | 0.2549 | 1.14 | 0.3729 | 1.59 | 0.4441 | 2.08 | 0.4812 | 2.98 | 0.4986 |
| 0.25 | 0.0987 | 0.70 | 0.2580 | 1.15 | 0.3749 | 1.60 | 0.4452 | 2.10 | 0.4821 | 3.00 | 0.4987 |
| 0.26 | 0.1026 | 0.71 | 0.2611 | 1.16 | 0.3770 | 1.61 | 0.4463 | 2.12 | 0.4830 | 3.20 | 0.4993 |
| 0.27 | 0.1064 | 0.72 | 0.2642 | 1.17 | 0.3790 | 1.62 | 0.4474 | 2.14 | 0.4838 | 3.40 | 0.4997 |
| 0.28 | 0.1103 | 0.73 | 0.2673 | 1.18 | 0.3810 | 1.63 | 0.4484 | 2.16 | 0.4846 | 3.60 | 0.4998 |
| 0.29 | 0.1141 | 0.74 | 0.2703 | 1.19 | 0.3830 | 1.64 | 0.4495 | 2.18 | 0.4854 | 3.80 | 0.4999 |
| 0.30 | 0.1179 | 0.75 | 0.2734 | 1.20 | 0.3849 | 1.65 | 0.4515 | 2.20 | 0.4861 | 4.00 | 0.4999 |
| 0.31 | 0.1217 | 0.76 | 0.2764 | 1.21 | 0.3869 | 1.66 | 0.4505 | 2.22 | 0.4868 | 4.50 | 0.5000 |
| 0.32 | 0.1255 | 0.77 | 0.2794 | 1.22 | 0.3883 | 1.67 | 0.4525 | 2.24 | 0.4875 | 5.00 | 0.5000 |
| 0.33 | 0.1293 | 0.78 | 0.2823 | 1.23 | 0.3907 | 1.68 | 0.4535 | 2.26 | 0.4881 | | |
| 0.34 | 0.1331 | 0.79 | 0.2852 | 1.24 | 0.3925 | 1.69 | 0.4545 | 2.28 | 0.4887 | ↓ | ↓ |
| 0.35 | 0.1368 | 0.80 | 0.2881 | 1.25 | 0.3944 | 1.70 | 0.4554 | 2.30 | 0.4893 | $+\infty$ | 0.5 |
| 0.36 | 0.1406 | 0.81 | 0.2910 | 1.26 | 0.3962 | 1.71 | 0.4564 | 2.32 | 0.4898 | | |
| 0.37 | 0.1443 | 0.82 | 0.2939 | 1.27 | 0.3980 | 1.72 | 0.4573 | 2.34 | 0.4904 | | |
| 0.38 | 0.1480 | 0.83 | 0.2967 | 1.28 | 0.3997 | 1.73 | 0.4582 | 2.36 | 0.4909 | | |
| 0.39 | 0.1517 | 0.84 | 0.2995 | 1.29 | 0.4015 | 1.74 | 0.4591 | 2.38 | 0.4913 | | |
| 0.40 | 0.1554 | 0.85 | 0.3023 | 1.30 | 0.4032 | 1.75 | 0.4599 | 2.40 | 0.4918 | | |
| 0.41 | 0.1591 | 0.86 | 0.3051 | 1.31 | 0.4049 | 1.76 | 0.4608 | 2.42 | 0.4922 | | |
| 0.42 | 0.1628 | 0.87 | 0.3078 | 1.32 | 0.4066 | 1.77 | 0.4616 | 2.44 | 0.4927 | | |
| 0.43 | 0.1654 | 0.88 | 0.3106 | 1.33 | 0.4082 | 1.78 | 0.4625 | 2.46 | 0.4931 | | |
| 0.44 | 0.1700 | 0.89 | 0.3133 | 1.34 | 0.4099 | 1.79 | 0.4633 | 2.48 | 0.4934 | | |

**Таблица 3** – Распределение Стьюдента (двусторонняя критическая область).
*$\alpha$ – уровень значимости, γ = 1 - α – доверительная вероятность,*
*v – число степеней свободы, n = v +1 –объем выборки.*

| α<br>γ<br>v ↓ | 0,10<br>0,90 | 0,05<br>0,95 | 0,02<br>0,98 | 0,01<br>0,99 | 0,002<br>0,998 | 0,001<br>0,999 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6,314 | 12,71 | 31,82 | 63,66 | 318,3 | 636,6 |
| 2 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 | 22,33 | 31,60 |
| 3 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 | 10,22 | 12,94 |
| 4 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 | 7,173 | 8,610 |
| 5 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 5,032 | 5,893 | 6,859 |
| 6 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 | 5,208 | 5,959 |
| 7 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 | 4,785 | 5,405 |
| 8 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 | 4,501 | 5,041 |
| 9 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 | 4,297 | 4,781 |
| 10 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 | 4,144 | 4,587 |
| 11 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 | 4,025 | 4,437 |
| 12 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 | 3,930 | 4,318 |
| 13 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 | 3,852 | 4,221 |
| 14 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 | 3,787 | 4,140 |
| 15 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 | 3,733 | 4,073 |
| 16 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 | 3,686 | 4,015 |
| 17 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 | 3,646 | 3,965 |
| 18 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 | 3,611 | 3,922 |
| 19 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 | 3,579 | 3,883 |
| 20 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 | 3,562 | 3,850 |
| 21 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 | 3,527 | 3,819 |
| 22 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 | 3,505 | 3,792 |
| 23 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 | 3,485 | 3,767 |
| 24 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 | 3,467 | 3,745 |
| 25 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 | 3,450 | 3,725 |
| 26 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 | 3,435 | 3,707 |
| 27 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 | 3,421 | 3,690 |
| 28 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 | 3,408 | 3,674 |
| 29 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 | 3,396 | 3,659 |
| 30 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 | 3,385 | 3,646 |
| 40 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 | 3,307 | 3,551 |
| 50 | 1,676 | 2,009 | 2,403 | 2,678 | 3,262 | 3,495 |
| 60 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 | 3,232 | 3,460 |
| 80 | 1,664 | 1,990 | 2,374 | 2,639 | 3,195 | 3,415 |
| 100 | 1,660 | 1,984 | 2,365 | 2,626 | 3,174 | 3,389 |
| 200 | 1,653 | 1,972 | 2,345 | 2,601 | 3,131 | 3,339 |
| 300 | 1,648 | 1,965 | 2,334 | 2,586 | 3,106 | 3,310 |
| ∞ | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 3,090 | 3,291 |

**Таблица 4** – $\chi^2$ – распределение.
*$\nu$ – число степеней свободы, $\alpha$ – уровень значимости.*

| $\nu$ \ $\alpha$ | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,642 | 2,706 | 3,841 | 5,412 | 6,635 | 10,827 |
| 2 | 3,219 | 4,605 | 5,991 | 7,824 | 9,210 | 13,815 |
| 3 | 4,642 | 6,251 | 7,815 | 9,837 | 11,345 | 16,266 |
| 4 | 5,989 | 7,779 | 9,488 | 11,668 | 13,237 | 18,467 |
| 5 | 7,289 | 9,236 | 11,070 | 13,388 | 15,086 | 20,515 |
| 6 | 8,558 | 10,645 | 12,592 | 15,033 | 16,812 | 22,457 |
| 7 | 9,803 | 12,017 | 14,067 | 16,622 | 18,475 | 24,322 |
| 8 | 11,030 | 13,362 | 15,507 | 18,168 | 20,090 | 26,125 |
| 9 | 12,242 | 14,684 | 16,919 | 19,679 | 21,666 | 27,877 |
| 10 | 13,442 | 15,987 | 18,307 | 21,161 | 23,209 | 29,588 |
| 11 | 14,631 | 17,275 | 19,675 | 22,618 | 24,795 | 31,264 |
| 12 | 15,812 | 18,549 | 21,026 | 24,054 | 24,217 | 32,909 |
| 13 | 16,985 | 19,812 | 22,362 | 25,472 | 27,688 | 34,528 |
| 14 | 18,151 | 21,064 | 23,685 | 26,783 | 29,141 | 36,123 |
| 15 | 19,311 | 22,307 | 24,996 | 28,259 | 30,578 | 37,697 |
| 16 | 20,465 | 23,542 | 26,296 | 29,633 | 32,000 | 39,252 |
| 17 | 21,615 | 24,769 | 27,587 | 30,995 | 32,409 | 40,790 |
| 18 | 22,760 | 25,989 | 28,869 | 32,346 | 34,805 | 42,312 |
| 19 | 23,900 | 27,204 | 30,144 | 33,678 | 36,191 | 43,820 |
| 20 | 25,038 | 28,412 | 31,410 | 35,020 | 37,566 | 45,315 |
| 21 | 26,171 | 29,615 | 32,671 | 36,343 | 38,932 | 46,797 |
| 22 | 27,301 | 30,813 | 33,924 | 37,659 | 40,289 | 48,268 |
| 23 | 28,429 | 32,007 | 35,172 | 38,968 | 41,638 | 49,728 |
| 24 | 29,553 | 33,196 | 36,415 | 40,270 | 42,980 | 51,179 |
| 25 | 30,675 | 34,382 | 37,652 | 41,566 | 42,314 | 52,620 |
| 26 | 31,795 | 35,563 | 38,885 | 42,856 | 45,642 | 54,052 |
| 27 | 32,912 | 36,741 | 40,113 | 44,140 | 46,963 | 55,476 |
| 28 | 34,027 | 37,916 | 41,337 | 45,419 | 48,278 | 56,893 |
| 29 | 35,139 | 39,087 | 42,557 | 46,693 | 49,588 | 58,302 |
| 30 | 36,250 | 40,256 | 43,773 | 47,962 | 50,892 | 59,703 |

**Таблица 5** – Значения $q = q(\gamma, n)$.
$(1 - q)\, s < \sigma < (1+ q)\, s$, если $q< 1$,
$0< \sigma < (1+ q)\, s$, если $q> 1$.

$$\left(s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\right).$$

| $n$ \ $\gamma$ | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
|---|---|---|---|
| 5 | 1,37 | 2,67 | 5,64 |
| 6 | 1,09 | 2,01 | 3,88 |
| 7 | 0,92 | 1,62 | 2,98 |
| 8 | 0,80 | 1,38 | 2,42 |
| 9 | 0,71 | 1,20 | 2,06 |
| 10 | 0,65 | 1,08 | 1,80 |
| 11 | 0,59 | 0,98 | 1,60 |
| 12 | 0,55 | 0,90 | 1,45 |
| 13 | 0,52 | 0,83 | 1,33 |
| 14 | 0,48 | 0,78 | 1,23 |
| 15 | 0,46 | 0,73 | 1,15 |
| 16 | 0,44 | 0,70 | 1,07 |
| 17 | 0,42 | 0,66 | 1,01 |
| 18 | 0,40 | 0,63 | 0,96 |
| 19 | 0,39 | 0,60 | 0,92 |
| 20 | 0,37 | 0,58 | 0,88 |
| 25 | 0,32 | 0,49 | 0,73 |
| 30 | 0,28 | 0,43 | 0,63 |
| 35 | 0,26 | 0,38 | 0,56 |
| 40 | 0,24 | 0,35 | 0,50 |
| 45 | 0, 22 | 0,32 | 0,46 |
| 50 | 0,21 | 0,30 | 0,43 |
| 60 | 0,188 | 0,269 | 0,38 |
| 70 | 0,174 | 0,245 | 0,34 |
| 80 | 0,161 | 0,226 | 0,31 |
| 90 | 0,151 | 0,211 | 0,29 |
| 100 | 0,143 | 0,198 | 0,27 |
| 150 | 0,115 | 0,160 | 0,211 |
| 200 | 0,099 | 0,136 | 0,185 |
| 250 | 0,089 | 0,120 | 0,162 |

## Литература


1. Теория вероятностей. Методические указания и задания к контрольной работе по теории вероятностей для студентов экономических специальностей заочной формы обучения / Сост.: Т.А. Тузик, А.В. Санюкевич, Г.Р. Емельянова, Р.А. Гоголинская, О.К. Денисович. – Брест: БрПИ. – 1999.
2. Теория вероятностей и математическая статистика: методические рекомендации и варианты контрольных работ по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов технических специальностей заочной формы обучения / Сост.: М.П. Сидоревич, Л.П. Махнист, С.Т. Гусева, Л.Т. Мороз. – Брест: БрПИ. – 2000.
3. Математическая статистика / задания, методические указания, статистические таблицы / Сост.: Б.А. Годунов, В.С. Рубанов, Т.А. Тузик. – Брест: УО «БГТУ». – 2002.
4. Рябушко, А.П. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике / А.П. Рябушко [и др.]. – Мн.: Выш.шк., 1992.
5. Белько, И.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи / И.В. Белько, Г.П. Свирид. – Мн.: Новое издание, 2002. – 250 с.
6. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.
7. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1998. – 479 с.
8. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1979, – 400 с.
9. Колемаев, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика / В.А. Колемаев , В.Н. Калинина. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 302 с.

**Учебное издание**

**Составители:** Швычкина Елена Николаевна
Мороз Людмила Трофимовна
Наумовец Светлана Николаевна
Черненко Виктор Петрович
Джура Валентина Тимофеевна

Ответственный за выпуск: Е.Н. Швычкина
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная верстка: Кармаш Е.Л.
Корректор: Никитчик Е.В.

---

Подписано к печати 03.02.2015 г. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага «Снегурочка».
Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л.5,0. Тираж экз. Заказ № .
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Е.Н. Швычкина, Л.Т. Мороз, С.Н. К
В.П. Черненко, В.Т. Джур

# ПРАКТИКУ

ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИ

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИС

## Часть VII

Е.Н. Швычкина, Л.Т. Мороз, С.Н.
В.П. Черненко, В.Т. Джу