лоднее, нежели у минеральных почв. Торфяно-болотные почвы, осушаемые гончарным дренажем, оказываются теплее почв, осушаемых открытой сетью каналов. Температурный режим осушаемых торфяно-болотных почв, занятых посевами сельскохозяйственных культур, определяется не только характером мелиорации, но и в значительной мере фазой развития, высотой, густотой и степенью покрытия поверхности почвы надземной частью растений.

Заключение

В последние годы ведутся большие дискуссии о влиянии мелиорации на речной сток. По исследованиям ученых, в целом на годовой сток влияние мелиорации практически не сказывается. Нет однозначных выводов о влиянии мелиорации на внутригодовое распределение стока. Большая часть исследователей склоняется к выводу о повышении меженных (летних и зимних) расходов воды после проведения мелиоративных работ. Однако что касается максимального стока весенних половодий и дождевых паводков, то выводы тоже по одной и той же реке оказываются противоположными: в одних случаях, отмечается увеличение максимумов, в других – их снижение.

УДК 551.492

ОБ ОЦЕНКЕ МОМЕНТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МОДЕЛИ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГИДРОЛОГИИ

Волчек А.А., Гладкий И.И., Махнист Л.П., Рубанов В.С.
Учреждение образования «Брестский государственный технический университет», г. Брест, Республика Беларусь, vig_bstu@tut.by

This research work deals with the model of several years' fluctuation of the river flow, which was received by applying the stochastic differential equation of Ornstein–Uhlenbeck. The process under consideration is the homogeneous in terms of time Markow process of diffusion type with corresponding coefficient of drift and diffusion. It gives the opportunity to evaluate the mathematical expectation and the moment of frequency distribution of the river flow.

Постановка задачи

Рассматривается марковский процесс для описания колебаний речного стока, используемый в стохастической гидрологии.

Пусть $\overline{V}$ – среднегодовой расход воды, а V_t – расход воды в момент времени *t*. Тогда, полагая $X_t = (V_t - \overline{V}) / \overline{V}$, процесс многолетних колебаний стока можно описать с помощью стационарного решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Орнштейна–Уленбека с непрерывным временем [1]

$$dX_t = -kX_t dt + \sigma dW_t \ , \qquad (1)$$

где W_t – стандартный винеровский процесс (так что $\frac{dW_t}{dt} = W_t'$ – обобщенный случайный процесс белого шума с параметром $\sigma = C_V\sqrt{2k}$); C_V – коэффициент вариации; k^{-1} – время релаксации речного стока.

Орнштейна–Уленбека процесс является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа с коэффициентом сноса $a(t,x) = -kx$ и диффузии $\sigma(t,x) = \sigma^2$, переходная плотность вероятности $p(t,\ x,y)$ которого является фундаментальным решением соответствующего уравнения Фоккера–Планка вида

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial y}(yp) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2},$$

где коэффициент k определяется по формуле $k = -\ln r$, так как автокорреляционная функция колебаний стока имеет вид $e^{-k\tau}$, а r – коэффициент автокорреляции годового стока.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ сток равен x, а x_* – некоторое фиксированное значение стока. Выясним, за какой промежуток времени значение V будет находиться в полуинтервале $[x_*,\infty)$ при условии, что $x \in [x_*,+\infty)$. Так как случайные колебания стока, описываемые СДУ, однородны по времени, то решить эту задачу можно с помощью обратного уравнения Колмогорова, которое для процесса (1) имеет вид $\frac{\partial}{\partial t}p(t,x,y) = -kx\frac{\partial}{\partial x}p(t,x,y) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x^2}$.

Пусть T – момент времени, в который значение V покинет промежуток $[x_*,+\infty)$. Тогда $prob(T \geq t) = G(t,x), G(t,x) = \int\limits_{x_*}^{+\infty} p(t,x,y)dy$.

Учитывая условия отражения на бесконечности и поглощения в точке $x = x_*$, получим следующие краевые условия: $G(t,x)\big|_{x=x_*} = 0, \frac{\partial G(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=+\infty} = 0$.

Так как функция $1 - G(t,x)$ является распределением случайной величины T, то моменты n-ого порядка времени достижения границы x_* определяются соотношениями $T_k = -\int\limits_0^{+\infty} t^k\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}dt = \int\limits_0^{+\infty} kt^{k-1}G(t,x)dt$.

Введя безразмерные величины $kT_1 = \theta_1$, $k^2 T_2 = \theta_2$, $x\frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x}{C_V} = \xi$, $x_*\frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x_*}{C_V} = \xi_*$, приходим к системе дифференциальных уравнений с краевыми условиями для моментов T_n:

$$\frac{d^2\theta_n}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_n}{d\xi} = -n\theta_{n-1},\ \frac{d\theta_n}{d\xi}(+\infty) = 0,\ \theta_n(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0,\ \theta_{-1} \equiv 1. \qquad (2)$$

Частный случай системы (2), приведенный в [1], при решении различных прикладных задач, например, в [2], интегрировалась численными методами.

Основные результаты

В данной работе предлагается решение краевой задачи, соответствующее первому уравнению системы (2) $\theta_1(\xi) = \int_{\xi_*}^{\xi} \frac{0,5 - \Phi(x)}{\varphi(x)} dx$ ($\Phi(x)$ – интеграл вероятностей, $\varphi(x)$ – плотность стандартного нормального распределения), записанное в виде степенных рядов (см., например, [3])

$$\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*), \tag{3}$$

где $S_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$.

Сходимость рядов в $\theta_1(\xi)$ исследована в [4], а асимптотические оценки этого параметра распределения приведены в [5].

Решение краевой задачи, соответствующее второму уравнению системы (2), можно также представить в виде степенных рядов [6, 7]

$$\theta_2(\xi) = 2\left(S_2(\xi) - S_2(\xi_*) - S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)\right), \tag{4}$$

где $S_2(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\ln 2 - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m-1}\right)\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m}\right)\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$.

Для решения (3), (4) уравнений системы (2) были исследованы функции специального вида [6], связанные соотношениями с интегралами Эйлера первого и второго рода и неполной гамма-функцией.

Выводы

Методы, предлагаемые в [4], дают возможность получить условия для вычисления значений рядов в $\theta_n(\xi)$ с заданной точностью.

Анализ методики получения оценок асимптотического поведения математического ожидания $\theta_1(\xi)$ [5] дает возможность оценить поведение моментов $\theta_n(\xi)$ распределения рассматриваемой модели, что может послужить темой дальнейших исследований.

Список цитированных источников

1. Найденов, В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока / В.И. Найденов, В.И. Швейкина // Водные ресурсы. – М., 2002. – Т. 29, № 1. – С. 62–67.
2. Волчек, А.А. Сравнительная оценка марковских и нелинейных моделей годового стока рек Беларуси / А.А. Волчек, С.И. Парфомук // Вестник Брестского государственного технического университета. – Брест: БрГТУ, 2006. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 56–60.
3. Волчек, А.А. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист, С.И. Парфомук // Вестник Брестского государственного технического университета. – Брест, 2008. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 84–87.
4. Волчек, А.А. О сходимости решения одной малопараметрической модели многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Вестник Брестского государственного технического университета. – Брест, 2009. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 2–5.

5. Волчек, А.А. Об асимптотическом поведении параметра одного из распределений вероятностей речного стока / А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Проблемы водоснабжения, водоотведения и энергосбережения в западном регионе Республики Беларусь: сборник материалов международной научно-технической конференции, Брест, 26–28 апреля 2010 г. – Брест: БрГТУ, 2010. – С. 45–49.

6. Волчек, А.А. О решении системы дифференциальных уравнений, одной из моделей многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, Л.П. Махнист., В.С. Рубанов // Веснік Брэсцкага універсітэта. – Брест, 2010. – № 1: Физика, математика. – С. 68–77.

7. Волчек, А.А. О решении системы дифференциальных уравнений, одной из задач стохастической гидрологии / А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Международная математическая конференция «Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям»: тезисы докладов международной научной конференции. Минск, 7–10 декабря 2010 г. / Белорусский государственный университет, Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2010. – С. 105.

УДК 621.9.08

К ВОПРОСУ РАСЧЕТА ЗАТОПЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ МОНИТОРИНГА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПАВОДКА

Волчек А.А., Костюк Д.А., Петров Д.О.
Учреждение образования «Брестский государственный технический университет», г. Брест, Республика Беларусь, volchak@tut.by, dmitrykostiuk@gmail.com, polegdo@gmail.com

The algorithm and its implementation are presented for precise evaluation of inundated territories to be used in system of flood monitoring and prediction, which is in development for the Pripyat' river. The chosen method is based on geometrical approach of flood modeling and results in building triangulated curved surface of the water mirror. Proposed implementation provides effective balance of computational complexity and accuracy of calculations.

Введение

Ежегодно значительные территории во многих странах, не исключая и Беларусь, оказываются в зоне паводка, на ликвидацию последствий которого расходуются существенные средства. Прогноз рисков затопления – это сложная, комплексная задача, требующая привлечения больших объемов информации и значительных вычислительных ресурсов. В рамках решения этой проблемы нами разрабатывается распределенная программно-аппаратная система наблюдения и прогнозирования наводнений, ориентированная на контроль паводка на реке Припять [1]. Система состоит из размещаемых в различных точках русла реки множества автономных гидрологических устройств (АГУ) на базе однокристальных микроЭВМ MSP, задачей которых является периодическое измерение уровня и скорости течения водного потока, хранение информации и автоматическая ее передача через GSM-сеть в единый информационный центр (ЕИЦ) для последующей систематизации и выполнения прогнозов развития паводка (см. рис. 1).